

Институт физики высоких энергий АН Каз ССР

Воинов В.Г.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ
И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

(диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук)

Научные руководители:

Доктор физико-математических наук
Академик АН Каз ССР Ж.С.Такибаев

Кандидат физико-математических
наук И.Я.Часников.

Алма-Ата 1972

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Введение.....	4
Гл. I. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ	
§1. Многократное кулоновское рассеяние заряженных частиц.	6
§2. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию.....	14
§3. Постоянная многократного кулоновского рассеяния...	20
§4. Корреляционные свойства вторых разностей.....	23
Гл. II. ПОМЕХИ, СОПУТСТВУЮЩИЕ ИЗМЕРЕНИЯМ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ, И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ.	
§1. Шумы.....	31
§2. Дисторсии.....	37
§3. Ложное рассеяние.....	45
§4. Экспериментальное определение многократного кулоновского рассеяния.....	53
§5. Оценка многократного кулоновского рассеяния при выборках малого объема.....	65
Гл. III. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ.	
§1. О расхождении теоретических и экспериментальных значений постоянной многократного рассеяния.....	71
§2. Причины занижения экспериментальных оценок постоянной многократного кулоновского рассеяния.....	74
§3. Экспериментальное определение постоянной рассеяния на следах π -мезонов с энергией 60 Гэв.....	79
§4. Сравнение полученных данных с данными других работ.....	85
Гл. IV. ИЗМЕРЕНИЕ И АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВТОРИЧНЫХ ПИОНОВ ИЗ πN ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ ЭНЕРГИИ 60 Гэв И ВОЗМОЖНОСТИ ФОТОМЕТОДА ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ.	
§1. Методика эксперимента.....	91

§2. Сравнение импульсных распределений при энергии 60 Гэв с некоторыми теоретическими представлениями	95
§3. О статистической зависимости поперечных и продоль- ных импульсов	102
§4. Перспективы использования фотометода при энергии 200 Гэв	106
ВЫВОДЫ	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
ЛИТЕРАТУРА	114

ВВЕДЕНИЕ

Энергия заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях обычно определяется по измерениям многократного рассеяния. Этот метод широко используется в физике высоких энергий. Создание ускорителей элементарных частиц на энергии 76 Гэв и более привело к необходимости измерять рассеяние вторичных частиц на очень больших ячейках, на которых наблюдалось расхождение экспериментальных и теоретических значений постоянной многократного кулоновского рассеяния \mathcal{K} . Это потребовало подробного исследования указанного расхождения, чтобы избежать систематических ошибок в определении энергии вторичных частиц.

В настоящей работе впервые проведено систематическое изучение расхождения экспериментальных и теоретических значений \mathcal{K} и показано, что таковое устраняется, если избежать методических ошибок при оценке \mathcal{K} (§5 гл. II и гл. III).

Необходимость более точного и надежного измерения энергии требует детального исследования помех, сопутствующих измерениям многократного кулоновского рассеяния. Для этой цели автор использует корреляционный метод анализа случайных функций (§4 гл. I и §§ I-3 гл. II). На основании такого исследования предложен метод оценки энергии частиц, обладающий несколько большей точностью и значительно большей надежностью (§4 гл. II). Показано, что с помощью ядерных фотоэмульсий можно измерять импульсы заряженных частиц при энергиях 60 Гэв и более.

В заключительной части работы проведенное методичес-

кое исследование используется для измерения и анализа импульсных распределений вторичных пионов из π^-N взаимодействий в ядерных фотоэмульсиях при энергии 60 Гэв.

Г Л А В А I

ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО
РАССЕЯНИЯ§ I. Многократное кулоновское рассеяние заряженных
частиц

Исследованию многократного кулоновского рассеяния посвящено большое количество работ / I - 23 / и ряд обзоров / 24 - 29 /. В связи с этим в этом и последующих двух параграфах мы ограничимся рассмотрением и анализом лишь тех результатов теории, которые потребуются нам в дальнейшем.

Согласно Резерфорду, дифференциальное поперечное сечение однократного упругого кулоновского рассеяния, рассчитанное на единицу длины, при условии, что масса рассеивающего центра много больше массы налетающей частицы,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4(\rho\beta c)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\Theta}{2}, \quad (I, I)$$

где $z_1 e$, ρ и βc - соответственно заряд, импульс и скорость налетающей частицы; $z_2 e$ и N - соответственно заряд и число рассеивающих центров в I см³; Θ - пространственный угол рассеяния; $d\Omega$ - элемент телесного угла.

Выражение (I, I) для поперечного сечения рассеяния получено в предположении, что электрическое поле атома совпадает с полем точечного заряда $z_2 e$. Конечные размеры ядра, а так

экранирование его поля внешними электронами ограничивают справедливость этого выражения определенным интервалом углов.

Учёт экранирования поля ядра атомными электронами приводит к следующему выражению для функции распределения по углам однократно рассеянных частиц / 3 /

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(\rho\beta c)^2} (\theta^2 + \Theta_a^2)^{-3/2}, \quad (1.2)$$

где $\Theta_a = \frac{1,063 h^*}{\tau_a \beta c} \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{z_1 z_2}{75}\right)^2}$, а $\tau_a = 0,885 z_2^{-1/3} \frac{h^2}{m e^2}$ - радиус атома.

Влияние протяженности ядра на рассеяние количественно оценивалось Олбертом / 8, 9 /, Купером и Рейнвотером / 10 /, а также Тер-Микаэляном / 11 /, которые для $f(\theta)$ используют формулу

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(\rho\beta c)^2} \frac{F_j(\theta)}{(\theta^2 + \Theta_a^2)^{3/2}}, \quad (1.3)$$

где $F_j(\theta)$ - ядерный формфактор.

Форма распределения заряда в ядре существенно не отражается на поперечном сечении рассеяния при $\theta \ll \lambda/\tau_0$, где

$\lambda = h/\rho$, а τ_0 - радиус ядра, хотя $f(\theta)$ и стремится к нулю при $\theta > \lambda/\tau_0$.

Заряженная частица, проходя через слой вещества конечной толщины t , претерпевает большое число столкновений, причем изменения в направлении движения частицы очень малы. Обозначим изменение в направлении движения частицы, прошедшей слой вещества толщиной t , через Θ . Важно знать зависимость закона распределения величин Θ и среднеквадратического значе-

* $h = 6,5817 \cdot 10^{-22}$ Мэв. сек.

ния $\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle}$ от t . Если частица испытывает большое число малых отклонений, то закон распределения Θ будет гауссовым. Определим дисперсию этого распределения, равную $\langle \Theta^2 \rangle$. Очевидно, что

$$\langle \Theta^2(t+dt) \rangle = \langle \Theta^2(t) \rangle + d\langle \Theta^2(t) \rangle, \text{ где } d\langle \Theta^2 \rangle = 2\pi dt \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (I.4)$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{d\langle \Theta^2 \rangle}{dt} = \Theta_s^2 = 2\pi \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (I.5)$$

Если предположить что $f(\Theta)$ дается формулой Резерфорда (I.1) для $\Theta_{min} \leq \Theta \leq \Theta_{max}$ и равно нулю вне этого интервала, то

$$\Theta_s^2 = 8\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(\rho\beta c)^2} \ln \frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}}. \quad (I.6)$$

Пренебрегая потерями энергии в слое t и интегрируя уравнение (I.5), получим

$$\langle \Theta^2 \rangle = \Theta_s^2 t. \quad (I.7)$$

Согласно (I.6) и (I.7)

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} = \delta (\ln M)^{1/2} \sqrt{\pi}, \quad (I.8)$$

где M , равное $\left(\frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}}\right)^2$, служит мерой среднего числа столкновений, испытываемых частицей при прохождении слоя t , а величина δ , равная $\frac{2z_1 z_2 e^2 (Nt)^{1/2}}{\rho\beta c}$, есть угловая единица. Физический смысл её в том, что полная вероятность рассея-

ния на угол, больший, чем $\delta' = \delta\sqrt{\pi}$, равна единице.

Формула (I.8), основная в теории многократного рассеяния разработанной Вильямсом / 5, 10 /, дает приближенную количественную оценку зависимости $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ от $\rho\beta c$ и t . Чтобы точнее оценить величину $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$, необходимо использовать более корректную формулу для поперечного сечения рассеяния $f(\theta)$. Кроме того, вклад отдельных актов рассеяния на большие углы приводит к отклонению распределения величины θ от гауссового. Поэтому необходимо тщательно анализировать функцию распределения углов θ .

Пусть $P(t, y, \theta) dy d\theta$ - число частиц на глубине t (ось t совпадает с направлением движения падающих частиц), имеющих боковое смещение в интервале от y до $y + dy$ и движущихся под углом к оси t , значение которого заключено в пределах от θ до $\theta + d\theta$; а $f(\theta) d\theta$ - вероятность акта рассеяния на единицу толщины в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$.

Счевидно, что $f(\theta) = f(-\theta)$, и поэтому

$$\langle \theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta) d\theta = 0. \quad (I.9)$$

Используя (I.5), получаем

$$\begin{aligned} \theta_s^2 &= \int \theta^2 f(\theta) d\Omega = \iint (\theta^2 + \theta_z^2) f[(\theta^2 + \theta_z^2)^{1/2}] d\theta d\theta_z = \\ &= 2 \int \theta^2 f(\theta) d\theta = 2 \langle \theta^2 \rangle. \end{aligned} \quad (I.10)$$

Таким образом, из (I.10) находим связь между средним квадратом пространственного угла и средним квадратом

его проекции на плоскость (x, y) :

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} \Theta_s^2. \quad (I.11)$$

Вычисляя изменение, которое испытывает функция $P(t, y, \theta)$ в слое между t и $t+dt$, можно получить / 25 /

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \int [P(t, y, \theta + \theta') - P(t, y, \theta)] f(\theta') d\theta'. \quad (I.12)$$

Предполагая, что $P(t, y, \theta + \theta')$ можно разложить в ряд по степеням θ' , и опустить члены выше второго порядка, с учетом (I.10) и (I.12), имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\Theta_s^3}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}.$$

Решением этого уравнения будет / 26 / :

$$P(t, y, \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi \Theta_s^2 t^2} \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2} \left(\frac{\theta^2}{t} - \frac{3y\theta}{t^2} + \frac{3y^2}{t^3} \right) \right]. \quad (I.13)$$

Интегрируя это соотношение по y , получим функцию $Q(t, \theta)$, представляющую угловое распределение безотносительно к боковому смещению:

$$Q(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t \Theta_s^2}} \exp \left(-\frac{\theta^2}{\Theta_s^2 t} \right). \quad (I.14)$$

Аналогично, интегрируя (I.13) по θ , получим функцию $S(t, y)$, представляющую распределение частиц в пространстве, независимо от распределения по углам :

$$S(t, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi t^3 \Theta_s^2}} \exp \left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 t^3} \right). \quad (I.15)$$

Равенство (I.14) показывает, что если ограничиться такими углами θ , при которых справедливо разложение $P(t, y, \theta + \theta')$ в ряд, то функция распределения по углам имеет гауссов вид, причем $\langle \theta^2 \rangle = 1/2 \theta_s^2 t$. Так как функцию распределения нужно изучить не только для малых углов, то разлагать $P(t, y, \theta + \theta')$ в ряд нельзя, необходимо точно решить уравнение (I.12). нас интересует угловое распределение безотносительно к боковому смещению, поэтому, интегрируя (I.12) по y , получим следующее уравнение для $Q(t, \theta)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(t, \theta + \theta') - Q(t, \theta)] f(\theta') d\theta'. \quad (I.16)$$

Разнообразие теорий многократного рассеяния / 8, II-18 / в основном объясняется различными методами решения уравнения (I.16) и использованием различных приближений для закона однократного рассеяния $f(\theta)$. Задачу определения функции распределения $Q(t, \theta)$ впервые достаточно полно рассмотрел Компанец / II /.

В работе Мольер / 12 / функция распределения $Q(t, \theta)$ определена так: если $f_t(\theta)$ есть вероятность того, что частица, пройдя слой вещества толщиной t , испытала однократное рассеяние на угол θ , то

$$P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, t) = e^{-\sigma} f_t(\theta_1) \cdot f_t(\theta_2) \dots f_t(\theta_n)$$

- вероятность того, что частица испытала n однократных рассеяний на углы $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Здесь $\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta$. Поскольку мы интересуемся только конечным значением угла

$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$, то, интегрируя по всем промежуточным значениям углов, получим вероятность рассеяния на угол θ :

$$P_n(t, \theta) = \frac{\bar{e}^{-\delta}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\theta_1) f_t(\theta_2) \dots f_t(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_{n-1}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}. \quad (I.17)$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье для $f_t(\theta)$

$$f_t(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{i\zeta\theta} d\zeta, \quad (I.18)$$

$$g(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\theta) e^{-i\zeta\theta} d\theta$$

и подставляя (I.18) в (I.17), имеем

$$P_n(t, \theta) = \frac{\bar{e}^{-\delta}}{(2\pi)^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta_1) \dots g(\zeta_n) e^{i\zeta_1\theta_1} \dots e^{i\zeta_n(\theta - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}. \quad (I.19)$$

Промежуточные интегралы в (I.19) берутся с помощью δ - функций, и тогда выражение (I.19) приводится к виду

$$P_n(t, \theta) = \frac{\bar{e}^{-\delta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[g(\zeta)]^n}{n!} e^{i\zeta\theta} d\zeta. \quad (I.20)$$

Если число актов однократного рассеяния n не фиксировано, то вероятность отклонения на угол θ будет

$$Q(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta\theta} e^{g(\zeta) - g(0)} d\zeta. \quad (I.21)$$

Множитель $\bar{e}^{-\delta} = e^{-g(0)}$ нормирует функцию распределения $Q(t, \theta)$ к единице. Чтобы получить $Q(t, \theta)$ в окончательном виде, необходимо вычислить разность $g(\zeta) - g(0)$, которая определяется обратным преобразованием Фурье (I.18)

$$g(z) - g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\theta) (e^{-iz\theta} - 1) d\theta. \quad (I.22)$$

Подставляя в это выражение функцию распределения (I.2),
имеем

$$g(z) - g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\theta) (e^{-iz\theta} - 1) d\theta = 4\pi Nt \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(\rho\beta c)^2} \left[\frac{z^2}{4} \ln \left(\frac{\delta^2 \Theta_a^2}{4e'} \right) \right], \quad (I.23)$$

где $\ln \gamma$ - постоянная Эйлера (0,5772 ...), а $\ln e' = 1$.
Введем обозначения:

$$\Theta_c^2 = \pi \delta^2 = \frac{4\pi Nt z_1^2 z_2^2 e^4}{(\rho\beta c)^2};$$

$$\Omega = \frac{\Theta_c^2}{\Theta_a^2} = \frac{1,47 \cdot 10^{-20} Nt z_1^2 z_2^2 e^4}{\beta^2 + \left(\frac{z_1 z_2}{75} \right)^2};$$

$$\ln \Omega = B - \ln \beta - \ln \frac{e'}{\gamma^2}.$$

В этих выражениях δ - угловая единица, а $\Omega = \frac{\pi \delta^2}{\Theta_a^2}$ мера
среднего числа столкновений, испытываемых частицей при
прохождении слоя t .

Подставляя (I.23) в (I.21) и разлагая $Q(t, \theta)$
в ряд по степеням $\frac{1}{B}$, окончательно имеем

$$Q(t, \theta) = \frac{1}{\Theta_c \sqrt{B}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\theta^2}{\Theta_c^2 B} \right) + \frac{1}{B} f^{(1)} \left(\frac{\theta}{\Theta_c \sqrt{B}} \right) + \frac{1}{B^2} f^{(2)} \left(\frac{\theta}{\Theta_c \sqrt{B}} \right) + \dots \right\}. \quad (I.24)$$

Таблицы функций $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ даны в работе Моллер
/ 12 /. Первый член в фигурных скобках описывает гауссову
часть функции распределения $Q(t, \theta)$, а члены, со-
держащие степени $\frac{1}{B}$, - негауссову, обусловленную од-

нократным и кратным рассеянием на большие углы.

В экспериментах по многократному рассеянию частиц для сравнения с теорией обычно используется выражение (I.24) или следствия из него. Олберт / 7 /, Бете / 17 / и Солнцев / 15 / показали, что функцию распределения Мольер можно непосредственно получить из уравнения (I,16) с помощью преобразований Фурье или Фурье-Бесселя. Полученные там выражения для $Q(t, \theta)$ идентичны распределению (I.24). Нигам и другие / 16 / подвергли критике некоторые аспекты теории Мольер. В частности, они считали недостаточно строгим мольеровский метод ввода в теорию параметра экранирования

Θ_a , а также полагали, что для изучения рассеяния на малые углы нельзя пользоваться потенциалом Томаса-Ферми. Мужерье / 18 / рассчитал функцию распределения $Q(t, \theta)$ и определил $f(\theta)$ с помощью приближенного решения уравнения Дирака. В его теории параметр Θ_a обоснован строго математически. Мужерье получил функцию распределения $Q(t, \theta)$, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными Хансона и других / 30 /.

§ 2. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию

Из функции распределения рассеянных частиц по углам можно получить зависимость ρ/ρ_c от среднеквадратического значения угла θ . Используя выражение (I.24), для чисто-

го вещества получим

$$\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = \frac{z_1 \mathcal{K}^I t^{1/2}}{\rho \beta c}, \quad (1.25)$$

где

$$\mathcal{K}^I = (2\pi N B)^{1/2} z_2 e^2 \left(1 + \frac{0.982}{B} - \frac{0.117}{B^2} + \dots \right)^{1/2}.$$

Величина \mathcal{K}^I в основном зависит от числа рассеивающих центров N с зарядом $z_2 e$ в 1 см^3 вещества и B , слабо зависящего от толщины слоя и скорости частицы βc . Измерив $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ и зная величину \mathcal{K}^I , можно определить величину $\rho \beta c$ для моноэнергетического пучка частиц, прошедших слой вещества t , по формуле (1.25). Экспериментаторов же обычно интересует определение энергии отдельных частиц. Поэтому, чтобы воспользоваться формулой (1.25), найдем угол θ для n равных отрезков (длиной t) следа и вычислим $\langle \theta^2 \rangle^{1/2}$. Известно, что это среднеквадратическое значение равно среднеквадратическому значению угла, вычисленному для пучка одинаковых частиц, прошедших слой t . Угол $\langle \theta^2 \rangle^{1/2}$ для отдельного следа можно найти угловым (метод касательных) или координатным (метод хорд) методами.

Наибольшее распространение получил координатный метод измерения, предложенный Фаулером / 51 /. Чтобы измерить рассеяние с помощью этого метода, след выставляется приблизительно параллельно оси, совпадающей с направлением движения столика микроскопа так, чтобы при перемещении он не ^{был} входил из поля зрения. Через равные участки длиной t , которые обычно называют ячейками, измеряется величина смещения сле-

да по отношению к оси x . Обозначим её как y_k . Затем вычисляются вторые разности координат:

$$\mathcal{D}_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \quad (I.26)$$

Тангенс угла между хордами, соединяющими крайние точки траектории частицы в ячейках t , равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{t} - \frac{y_{k+1} - y_k}{t} = \frac{\mathcal{D}_k}{t}. \quad (I.27)$$

Так как углы между хордами при многократном рассеянии малы, то $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Формула (I.27) показывает, что, вычисляя средний квадрат величины \mathcal{D}_k , можно найти средний квадрат угла α между хордами. Чтобы воспользоваться формулой (I.25), необходимо установить связь между

$\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle$ и $\langle \theta^2 \rangle$, которая подробно изучалась в работах / 12, 15, 19-23, 28 /. Наиболее простой вывод соотношения между $\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle$ и $\langle \theta^2 \rangle$ принадлежит Баркасу / 28 /. Суть его состоит в следующем. Пусть частица влетает в слой вещества толщиной t под углом θ_k и вылетает под углом θ_{k+1} . Пусть далее она испытала n_k однократных рассеяний на углы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_k}$ в точках, разделенных расстоянием $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_k}$.

Очевидно, что $\theta_{k+1} = \theta_k + \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i$,

$$\begin{aligned} \text{а } y_{k+1} &= y_k + \theta_k \lambda_0 + (\theta_k + \omega_1) \lambda_1 + \dots + (\theta_k + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n_k}) \lambda_{n_k} = \\ &= y_k + \theta_k \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_j + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta = y_k + \theta_k t + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta. \end{aligned}$$

Вычислим вторые разности координат \mathcal{D}_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = \left(t\theta_{k+1} + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta \right) - \left(t\theta_k + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\gamma=1}^j \omega_\gamma \right) = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n_k} \lambda_\ell \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\gamma=1}^j \omega_\gamma = \\ &= \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta + \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i \sum_{\gamma=1}^i \lambda_{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (I.28)$$

обозначим

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_\beta, \\ U_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \omega_j \sum_{\beta=1}^j \lambda_{\beta-1} \end{aligned} \quad (I.29)$$

и введем новые переменные Ψ_k и \mathcal{Y}_k по формулам

$$\begin{aligned} S_k + U_k &= 2\Psi_k = t \sum_{j=1}^{n_k} \omega_j = t(\theta_{k+1} - \theta_k), \\ S_k - U_k &= 2\mathcal{Y}_k. \end{aligned} \quad (I.30)$$

Можно показать, что $\langle S_k^2 \rangle = \langle U_k^2 \rangle$,

а, следовательно,

$$\langle \Psi_k \mathcal{Y}_k \rangle = \frac{1}{4} (\langle S_k^2 \rangle - \langle U_k^2 \rangle) = 0.$$

Очевидно также, что

$$\langle \Psi_k \Psi_\ell \rangle = \langle \Psi_k \mathcal{Y}_\ell \rangle = \langle \mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_\ell \rangle = 0, \quad k \neq \ell,$$

а

$$\langle \Psi_k^2 \rangle = 3 \langle \mathcal{Y}_k^2 \rangle = \frac{n_k t^2}{4} \langle \omega^2 \rangle.$$

Таким образом, переменные Ψ_k и \mathcal{Y}_k статистически независимы. Выразим теперь вторые разности \mathcal{D}_k через Ψ_k и \mathcal{Y}_k . С помощью (I.28 - I.30) имеем

$$\mathcal{D}_k = S_{k+1} + U_k = \Psi_{k+1} + \Psi_k + \mathcal{Y}_{k+1} - \mathcal{Y}_k,$$

а

$$\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle = \frac{8}{3} \langle \Psi_k^2 \rangle = 8 \langle \mathcal{Y}_k^2 \rangle = \frac{2}{3} n_k t^2 \langle \omega^2 \rangle. \quad (I.31)$$

Усредняя это соотношение по n_k , получим

$$\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle = \frac{2}{3} M t^2 \langle \omega^2 \rangle, \quad (I.32)$$

где M — среднее число столкновений в слое t . Методом математической индукции доказывается, что вторые моменты разностей порядка τ равны

$$\langle \mathcal{D}_k^\tau \mathcal{D}_{k+j}^\tau \rangle = \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle \frac{(-1)^j [(\tau-2)!]^2 \tau^{-j}}{8} \sum_{\alpha=1}^{\tau-j} \frac{(\alpha-1)^2 + 3(2\alpha-\tau-1)(2\alpha+2j-\tau-1)}{(\alpha-2)!(\alpha-1)!(\alpha-\alpha-j)!(\alpha+j-1)!}. \quad (I.33)$$

Из (I.33) вытекают важные соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{k+1} \rangle &= \frac{1}{4} \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle; \\ \langle \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{k+j} \rangle &= 0, \quad j \geq 2; \\ \langle T_k^2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle; \\ \langle F_k^2 \rangle &= 4 \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle. \end{aligned} \quad (I.34)$$

Здесь T_k и F_k — третьи и четвертые разности координат соответственно:

$$T_k = \mathcal{D}_{k+1} - \mathcal{D}_k;$$

$$F_k = T_{k+1} - T_k.$$

Комбинируя (I.30) и (I.31), получим искомую связь между

$$\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle \text{ и } \langle \Theta^2 \rangle :$$

$$\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle = \frac{2}{3} t^2 \langle \Theta^2 \rangle. \quad (I.35)$$

Используя точное решение уравнения (I.12), / 13 /

$$P(t, y, \Theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[i(\Theta s + yx) - \frac{h(s+tx) - h(s)}{\lambda x} \right], \quad \text{где}$$

$$h(s) = \int_0^s [1 - q(s')] ds', \quad q(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta s} p(\Theta) d\Theta, \quad p(\Theta) = \frac{\Theta_a^2 F_A(\Theta)}{2(\Theta^2 + \Theta_a^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{t}{\lambda} = \frac{\pi \delta^2}{\Theta_a^2} = \Omega,$$

можно показать, что $\langle y^2 \rangle = \frac{1}{3} t^2 \langle \Theta^2 \rangle$,

а соотношение (I.35) справедливо при любом конкретном виде $F_{\alpha}(\theta)$, если $\langle y^2 \rangle$ и $\langle \theta^2 \rangle$ конечны / 23 /. Используя соотношения (I.25) и (I.35), для однозарядных частиц находим

$$\rho_{\beta c} = \frac{\mathcal{K}'_0 t^{3/2}}{573 \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle^{1/2}}, \quad (I.36)$$

где $\rho_{\beta c}$ выражено в миллионах электронвольт, а \mathcal{D}_k и t — в микронах.

Величина $\mathcal{K}'_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K}'$, которую принято называть постоянной рассеяния, как было сказано выше, в основном зависит от свойств вещества. Чтобы вычислить \mathcal{K}'_0 для ядерной фотоэмульсии, необходимо найти угловое распределение рассеянных частиц по углам, учитывая элементарный количественный состав эмульсии. Так как вывод такого соотношения затруднителен, постоянную рассеяния обычно оценивают, усредняя величину \mathcal{K}'_0 по всем элементам, входящим в состав ядерной фотоэмульсии. Постоянная рассеяния теоретически рассчитана в работах / 27, 32, 33 и др./ При измерении многократного рассеяния часто вместо $\langle \mathcal{D}_k^2 \rangle$ находят среднеарифметическое значение $\langle |\mathcal{D}_k| \rangle = \mathcal{D}'_k$. Это особенно удобно при ручном методе измерения \mathcal{D}_k . Если бы закон распределения величин \mathcal{D}_k был точно гауссовым, то

$$\mathcal{D}'_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \mathcal{D}_k^2 \rangle^{1/2}. \quad (I.37)$$

Поскольку негауссов характер распределения вторых разностей \mathcal{D}_k начинает сказываться при больших углах рассеяния θ , то отбрасывание больших значений \mathcal{D}_k (нап-

пример, таких, что $\mathcal{D}_K > 4\mathcal{D}'_K$) приводит к выполнению соотношения (I.37) с большой точностью. Заменяв $\langle \mathcal{D}_K^2 \rangle^{1/2}$ в формуле (I.36) на \mathcal{D}'_K , получим

$$\rho\beta c = \frac{\mathcal{H} t^{3/2}}{573 \mathcal{D}'_K}, \quad (\text{ I.38})$$

где t и \mathcal{D}'_K выражено в микронах, а $\mathcal{H} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{H}'_0 \frac{\text{град} \cdot \text{МэВ}}{(100 \text{мк})^{1/2}}$.

§ 3. Постоянная многократного кулоновского рассеяния

В работах / 27, 32, 33 / постоянная многократного кулоновского рассеяния рассчитана для функций распределения

$Q(t, \theta)$, полученных разными способами. В предыдущем § получено следующее выражение для $\langle \theta^2 \rangle^{1/2}$

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = z_1 z_2 e^2 (2\pi NB)^{1/2} \left(1 + \frac{0,982}{B} - \frac{0,117}{B^2} + \dots \right)^{1/2} \frac{t^{1/2}}{\rho\beta c}. \quad (\text{ I.39})$$

Согласно (I.37) и (I.39)

$$\theta' = \langle |\theta| \rangle = \delta \left(B + 0,982 - \frac{0,117}{B} + \dots \right)^{1/2}, \quad (\text{ I.40})$$

где

$$\delta = \frac{2z_1 z_2 e^2 (Nt)^{1/2}}{\rho\beta c}. \quad (\text{ I.41})$$

Согласно (I.35) и (I.38) получим, что для чистого вещества

$$\mathcal{H} \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho\beta c}{t^{1/2}} \theta' = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho\beta c}{t^{1/2}} \delta \left(B + 0,982 - \frac{0,117}{B} \right)^{1/2}. \quad (\text{ I.42})$$

Для усреднения по элементам ядерной фотозумульсии заменим Nz_2^2 в формулах (I.41) и (I.42) на $\sum_i N_i z_{2i}^2$ и подставим вместо z_2 $\frac{1}{N} \sum_i N_i z_{2i}$. Это дает / 27, 32 /

$$\begin{aligned} \delta &= 1,006 t^{1/2} (\rho \beta c)^{-1}, \\ \beta &\approx 1,153 + 2,583 \lg \Omega, \\ \Omega &= 6,31 t (0,23 + 0,77 \beta^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (I.43)$$

где t - выражено в микронах, $\rho \beta c$ - в миллионах электронвольт, а δ - в градусах. Подставляя (I.43) в (I.42) имеем

$$\mathcal{H} = 10,06 \sqrt{\frac{2}{3}} (\beta + 0,982 - \frac{0,117}{\beta})^{1/2} \cdot \frac{\text{град} \cdot \text{МэВ}}{(100 \text{мк})^{1/2}}. \quad (I.44)$$

В литературе часто используется постоянная рассеяния, рассчитанная Воиводиком и Пикап / 32 / по теории Вильямса / 5, 10 / с учетом экранирующего параметра Θ_a , предложенного Мольер. Согласно Вильямсу,

$$\Theta' = \delta [1,45 + 0,80 (\ln M)^{1/2}]. \quad (I.45)$$

Величина $M = \left(\frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}} \right)^2$ так же, как и Ω в теории Мольер, - мера среднего числа столкновений, испытываемых частицей в слое t . Для M Вильямс получил

$$M = 0,64 \pi N t z_1^{4/3} z_2^{4/3} \beta^{-2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2, \text{ если } \gamma \ll 1; \quad (I.46)$$

$$M = 0,20 \pi N t z_2^{-2/3} \left(\frac{\hbar}{me^2} \right)^2, \text{ если } \gamma \gg 1, \quad (I.47)$$

где
$$\gamma = \frac{z_1 z_2}{137 \beta}.$$

Воиводик и Пикап показали, что среднее число столкновений в слое равно

$$M_I = M \left(1 + \frac{\gamma^2}{0,31} \right)^{-1}. \quad (1.48)$$

Теория Вильямса справедлива при $M_I \gg 1$. Для ядерной фотоэмульсии M_I обычно больше 100, поэтому его теорию вполне можно применить для расчета K . В дальнейшем используется параметр M , определяемый формулой (1.46), так как в случае рассеяния релятивистских частиц в ядерной эмульсии $\gamma \ll 1$. Согласно (1.46) и (1.48), для чистого вещества ($Z_1 = 1$)

$$\ln M_1 = \ln(0,64\pi N t Z_2^2 h^2 m^2 c^2) - \ln \beta^2 - \ln \left(1 + \frac{\gamma^2}{0,31} \right) Z_2^{2/3}. \quad (1.49)$$

По аналогии с методом Мольер осреднения для смеси

$$\ln M_1 = \ln(\text{const.} \cdot t \sum_i N_i Z_{2i}^2) - \ln \beta^2 - \frac{\sum_i N_i Z_{2i}^2 \ln Z_{2i}^{2/3} \left(1 + \frac{\gamma_i^2}{0,31} \right)}{\sum_i N_i Z_{2i}^2}. \quad (1.50)$$

Подставляя численные значения всех величин, получим / 32 /

$$\ln M_1 \cong \ln \frac{0,94t}{0,30 + \beta^2}. \quad (1.51)$$

Используя (1.43), (1.45) и (1.51), найдем

$$K = 11,9 \left[1 + 0,837 \left(\ln \frac{0,94t}{0,30 + \beta^2} \right)^{1/2} \right] \frac{\text{град.МэВ}}{(100\text{мк})^{1/2}} \quad (1.52)$$

Формулы (1.44) и (1.52) получены без учета рассеяния на атомных электронах, влияние которых можно учесть, заменяя Z_2^2 на $Z_2(Z_2 + 1)$. Значение постоянной рассеяния при этом увеличивается приблизительно на 2% / 28, 32 /.

Формула (I.52) для величины K получена в предположении, что ядра рассеивателя точечные. Влияние конечных размеров ядер сказывается в том, что при $\theta' \gg \frac{\lambda}{\tau_0}$ величина M не зависит от длины ячейки t , а среднеарифметическое значение угла θ равно / 32 /.

$$\theta' = \delta (19,5 - 3,11 \varkappa_2)^{1/2}.$$

Величина K при этом достигает своего максимального значения ($K_{max} = 31,2$) и далее не изменяется с изменением t . На рисунке I изображена зависимость от длины ячейки постоянной K , рассчитанной по формуле (I,52) при $\beta = 1$. Здесь же нанесена кривая, соответствующая постоянной K , определенной по формуле (I,44). Из рисунка видно, что постоянная K , рассчитанная по теории Вильямса с учетом Θ_a , незначительно отличается от величины, вычисленной по теории Мольер. Постоянную рассеяния можно рассчитать, используя и другие теории / 33 /.

§ 4. Корреляционные свойства вторых разностей.

Применим корреляционные методы анализа случайных процессов к изучению многократного рассеяния частиц в веществе. Приведем основные положения корреляционного метода анализа случайных процессов / 34 /. Случайной функцией $y(x)$ называется такая функция, значение которой при любом x -случайная величина. Всякая функция, которой может оказаться

$$\mathcal{K} \frac{\text{град} \cdot \text{МэВ}}{(100 \text{ мк})^{1/2}}$$

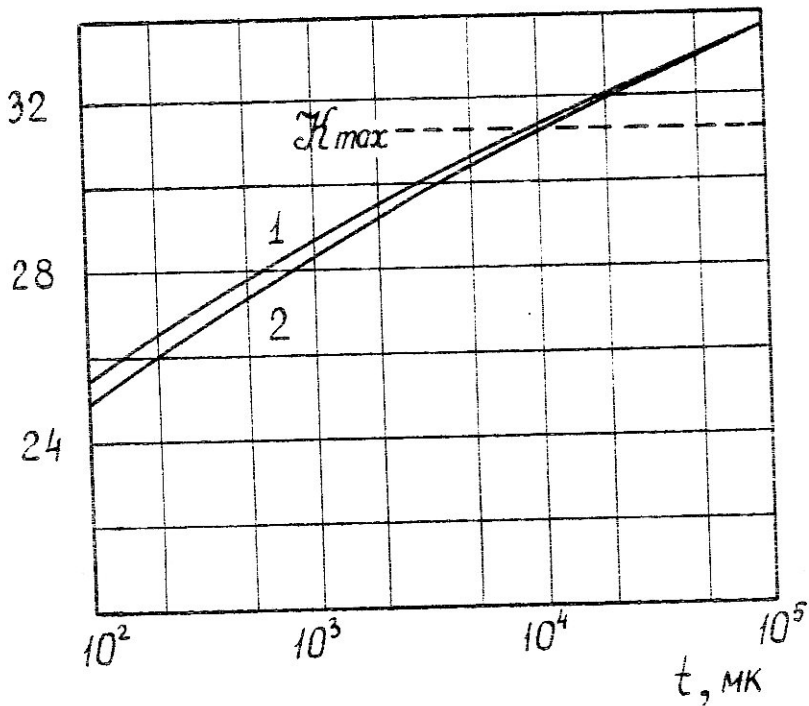


Рис. I. Зависимость \mathcal{K} от t , рассчитанная по формулам: 1-(I.52), 2-(I.44).

равной случайная функция в результате опыта, называется её реализацией. Аргумент случайной функции $Y(X)$ — величина неслучайная. Этот аргумент может принимать как дискретные значения, так и меняться непрерывно в некоторой области значений x .

Средним значением или математическим ожиданием $Y(X)$ называется величина

$$\langle Y(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy, \quad (1.53)$$

где $f(y)$ — плотность распределения ординаты случайной функции.

Дисперсия и корреляционная функция случайной функции $Y(X)$ определяются соотношениями:

$$D^2(Y) = \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle Y \rangle)^2 f(y) dy; \quad (1.54)$$

$$K(x_1, x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \langle Y_1 \rangle)(y_2 - \langle Y_2 \rangle) f(y_1, y_2, x_1, x_2) dy_1 dy_2, \quad (1.55)$$

Здесь $f(y_1, y_2, x_1, x_2)$ — двумерная плотность распределения $Y(X)$.

Если среднее значение и дисперсия случайной функции не зависят от x , а корреляционная функция зависит только от разности $x_2 - x_1 = \tau$, то случайная функция называется стационарной. Если корреляционная функция стационарной случайной функции $K(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то такая случайная функция называется эргодической. Для эргодической стационарной случайной функции математические ожидания, вычисленные усреднением по реализациям, равны средним значениям, полученным по

одной реализации. Для любой стационарной случайной функции справедливо разложение

$$y(x) = \langle y(x) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (I.56)$$

Дисперсия $S(\omega)$ случайной величины $V(\omega)$, равная дисперсии гармоники $V(\omega) e^{i\omega x}$ в разложении (I.56), называется спектральной плотностью. Иными словами, спектральная плотность характеризует распределение средней интенсивности колебаний по спектру частот. Для стационарного случайного процесса имеют место следующие формулы:

$$\mathcal{H}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (I.57)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{H}(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (I.58)$$

$$D^2(y) = \mathcal{H}(0) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (I.59)$$

Формулы (I.57) и (I.58) показывают, что задание спектральной плотности $S(\omega)$ эквивалентно заданию корреляционной функции $\mathcal{H}(\tau)$.

Пусть $y(x)$ — ордината следа частицы, испытавшей многократное кулоновское рассеяние (Рис. 2).

Разобьем измеряемый отрезок следа на ячейки длиной Δt и вычислим вторые разности $\mathcal{D}_i = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}$. Величины \mathcal{D}_i образуют случайную последовательность.

Поскольку траектория частицы в принципе непрерывна, то след всегда можно разбить на сколь угодно большое число сколь угодно малых отрезков Δt и вычислить вторые разности для всех троек точек, отстоящих друг от друга на t . В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ вторые разности образуют случайную

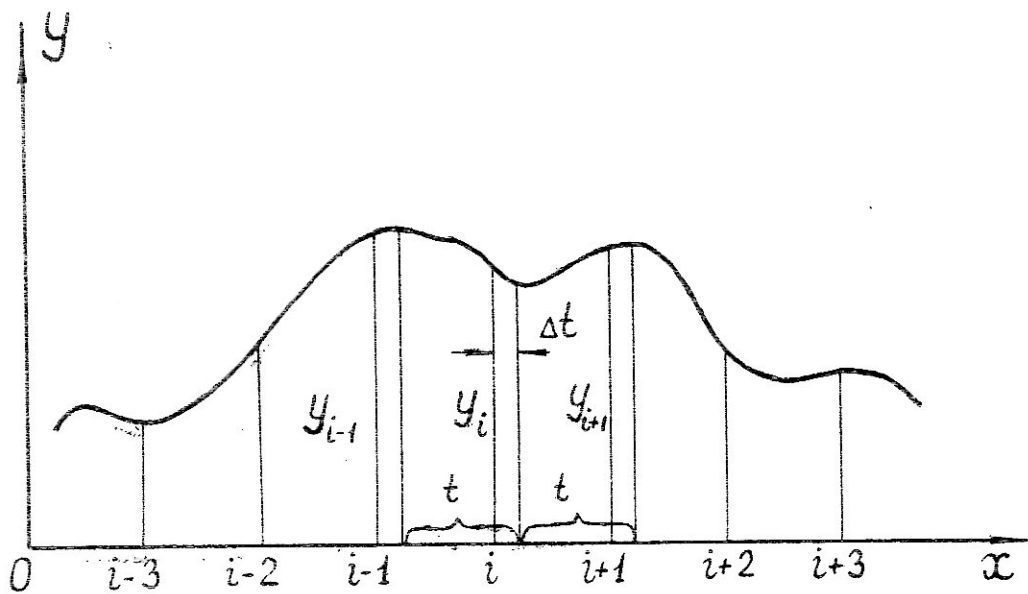


Рис.2. К анализу корреляции вторых разностей.

Функцию непрерывного аргумента

$$\mathcal{D}(x) = y(x) - 2y(x+t) + y(x+2t).$$

Можно показать / 35/, что $\langle \mathcal{D}(x) \rangle = 0$, $\langle \mathcal{D}^2(x) \rangle = \text{const}$, а

$$\mathcal{K}(\tau) = \langle \mathcal{D}(x)\mathcal{D}(x+\tau) \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathcal{D}^2(x) \rangle \cdot g(\tau); \quad (\text{рис.3})$$

$$g(\tau) = \begin{cases} 4 - 6\left(\frac{\tau}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{t}\right)^3, & 0 \leq \tau \leq t; \\ \left(2 - \frac{\tau}{t}\right)^3, & t < \tau \leq 2t; \\ 0, & \tau > 2t. \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

Легко видеть, что $\mathcal{K}(\tau) = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, т.е. случайная функция $\mathcal{D}(x)$ — стационарна и эргодична. Эргодичность многократного кулоновского рассеяния позволяет вычислить необходимые средние характеристики с помощью единственной реализации. Этот результат использован в § 2 этой главы при выводе формулы, связывающей многократное кулоновское рассеяние и $\rho\beta c$ отдельной частицы.

Согласно (I.60)

$$\langle \mathcal{D}(x)\mathcal{D}(x+t) \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathcal{D}^2(x) \rangle; \quad (\text{I.61})$$

$$\langle \mathcal{D}(x)\mathcal{D}(x+jt) \rangle = 0, \quad j \geq 2.$$

Эти соотношения говорят о том, что вторые разности, разделенные расстоянием, большим или равным двум ячейкам — некоррелированы, а коэффициент корреляции $\mathcal{K}(\tau)/\mathcal{K}(0)$ вторых разностей, разделенных ячейкой t , равен 1/4. Формулы (I.61) обобщают аналогичные результаты (I.34), полученные для функции дискретного аргумента.

Согласно (I.58) и (I.60), спектральная плотность случайной функции $\mathcal{D}(x)$ равна

$$S(\omega) = \frac{1}{4\pi} \langle \mathcal{D}^2(x) \rangle \int_0^{\infty} g(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (\text{I.62})$$

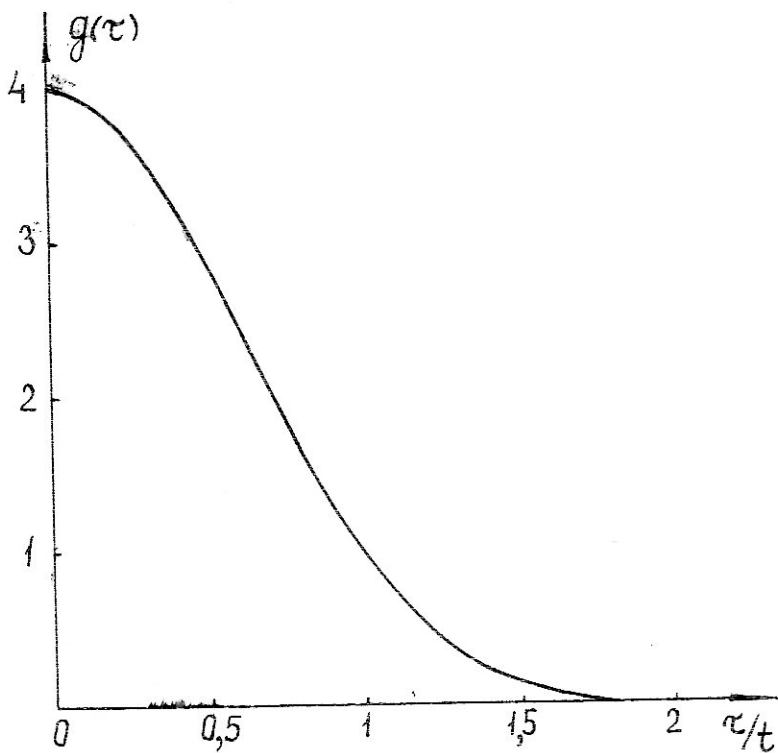


Рис.3. Корреляционная функция вторых разностей для многократного кулоновского рассеяния.

Подставляя в (I,62) конкретное выражение для $g(\tau)$, получим

$$S_K(\omega) = \frac{3 \langle \mathcal{D}^2(x) \rangle}{\pi \omega^4} (1 - \cos \omega)^2. \quad (\text{ I,63})$$

Рассмотрим корреляционные свойства вторых разностей многократного кулоновского рассеяния для перекрывающихся ячеек. Обозначим эти разности через ${}^n \mathcal{D}_i$, где n -- индекс характеризующий степень перекрывания. Поскольку ${}^n \mathcal{D}_i = y_i - 2y_{i+n} + y_{i+2n}$, то

$${}^n \mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^{n-1} j \mathcal{D}_{i+j-1} + \sum_{j=1}^n (n-j+1) \mathcal{D}_{i+j+n-2}, \quad (\text{ I.64})$$

где $\mathcal{D}_i = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}$.

При $n = 4$, например,

$${}^4 \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i + 2\mathcal{D}_{i+1} + 3\mathcal{D}_{i+2} + 4\mathcal{D}_{i+3} + 3\mathcal{D}_{i+4} + 2\mathcal{D}_{i+5} + \mathcal{D}_{i+6}. \quad (\text{ I.65})$$

Чтобы рассчитать корреляционные моменты $\langle {}^4 \mathcal{D}_i {}^4 \mathcal{D}_{i+j} \rangle$, удобно перейти от \mathcal{D}_i к новым статистически независимым переменным v_i по формуле

$$\mathcal{D}_i = v_i + a v_{i+1}. \quad (\text{ I.66})$$

Так как $\langle v_i v_{i+j} \rangle = 0$ при $j \geq 1$, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle &= (1+a^2) \langle v_i^2 \rangle; \\ \langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+1} \rangle &= a \langle v_i^2 \rangle; \\ \langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle &= 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{ I.67})$$

Сравнивая (I.67) с (I.34), найдем, что $a = 2 \pm \sqrt{3}$. Подставляя (I.66) в (I.65), получим

$$\begin{aligned} {}^4 \mathcal{D}_i &= v_i + (a+2)v_{i+1} + (2a+3)v_{i+2} + (3a+4)v_{i+3} + (4a+3)v_{i+4} + \\ &+ (3a+2)v_{i+5} + (2a+1)v_{i+6} + a v_{i+7}, \end{aligned} \quad (\text{ I.68})$$

откуда

$$\langle {}^4\mathcal{D}_i^2 \rangle = (44a^2 + 80a + 44) \langle v_i^2 \rangle = 64 \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle. \quad (I.69)$$

Вычисляя $\langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+j} \rangle$ при $j = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\begin{aligned} \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+1} \rangle &= \frac{235}{4} \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; & \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+5} \rangle &= \frac{27}{4} \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; \\ \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+2} \rangle &= 46 \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; & \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+6} \rangle &= 2 \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; \\ \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+3} \rangle &= \frac{121}{4} \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; & \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+7} \rangle &= \frac{1}{4} \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; \\ \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+4} \rangle &= 16 \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle; & \langle {}^4\mathcal{D}_i^4 \mathcal{D}_{i+j} \rangle &= 0, j \geq 8. \end{aligned} \quad (I.70)$$

Используя соотношения, аналогичные (I.68) и выражения (I.67), легко рассчитать корреляционные моменты вторых разностей, вычисленных для перекрывающихся ячеек при любой кратности n , причем $\langle {}^n\mathcal{D}_i^n \mathcal{D}_{i+j} \rangle = \frac{1}{4} \langle {}^n\mathcal{D}_i^2 \rangle \cdot {}^n g(j)$,

$${}^n g(j) = \begin{cases} 4 - 6(j/n)^2 + 3(j/n)^2, & 0 \leq j \leq n; \\ (2 - j/n)^3, & n < j \leq 2n; \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (I.71)$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ вторые разности ${}^n\mathcal{D}_i$ образуют непрерывную случайную функцию $D(x)$, а ${}^n g(j)$ переходит в $g(\tau)$.

Отметим, что корреляционные свойства вторых разностей целиком и полностью определяют свойства третьих разностей

T_i и разностей более высокого порядка. Например, параметр $\beta^2 = \frac{\langle T_i^2 \rangle}{\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle}$ можно вычислить, используя $\langle {}^n\mathcal{D}_i^2 \rangle$ и $\langle {}^n\mathcal{D}_i^n \mathcal{D}_{i+n} \rangle$ следующим образом:

$$\beta^2 = \frac{\langle ({}^n\mathcal{D}_{i+n} - {}^n\mathcal{D}_i)^2 \rangle}{\langle {}^n\mathcal{D}_i^2 \rangle} = 2 \left(1 - \frac{\langle {}^n\mathcal{D}_i^n \mathcal{D}_{i+n} \rangle}{\langle {}^n\mathcal{D}_i^2 \rangle} \right). \quad (I.72)$$

С помощью (I.71), для многократного кулоновского рассеяния находим, что $\beta^2 = 3/2$.

Рассмотрим связь между зависимостью $\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$ от t и видом

корреляционной функции $\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle$. Для многократного кулоновского рассеяния было получено $\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle \sim t^3$ (1.36). Очевидно, что зависимость $\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$ от t определяется корреляционной функцией $\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle$, так как вторые разности ${}^n \mathcal{D}_i$ однозначно определяются через \mathcal{D}_i . Возьмем для примера ещё две корреляционные функции и найдем для них зависимость $\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$ от t .

1. Пусть измеренные значения координат y_i статистически независимы, т.е. $\langle y_i y_{i+j} \rangle = 0$, $j \geq 1$. Вычисляя $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \mathcal{D}_{i+j} \rangle$ получим / 36 / (см. рис. 4) $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \mathcal{D}_{i+j} \rangle = \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle \cdot {}^n \rho(j)$, где

$${}^n \rho(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & 1 \leq j < n, \\ -\frac{2}{3}, & j = n, \\ 0, & n < j < 2n, \\ \frac{1}{6}, & j = 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (1.73)$$

Таким образом, для корреляционной функции (1.73) $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$, т.е. средний квадрат вторых разностей для статистически независимых координат с длиной ячейки t не меняется.

2. Пусть y_i представляет случайные поперечные смещения. Для этих смещений / 35 /

$$\mathcal{D}_i = S_{i+1} - S_i,$$

где S_i - статистически независимые первые разности ко-

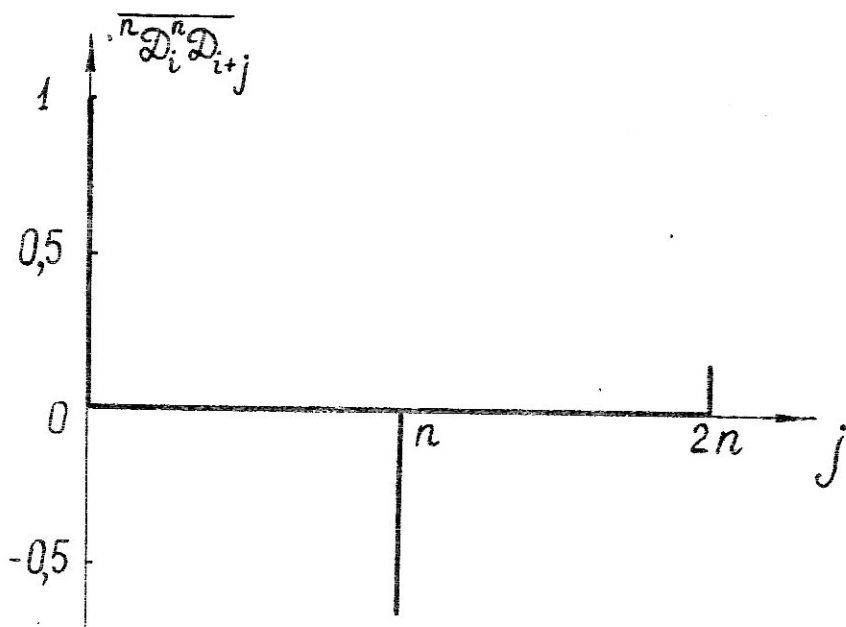


Рис. 4. Корреляционная функция вторых разностей для статистически независимых координат.

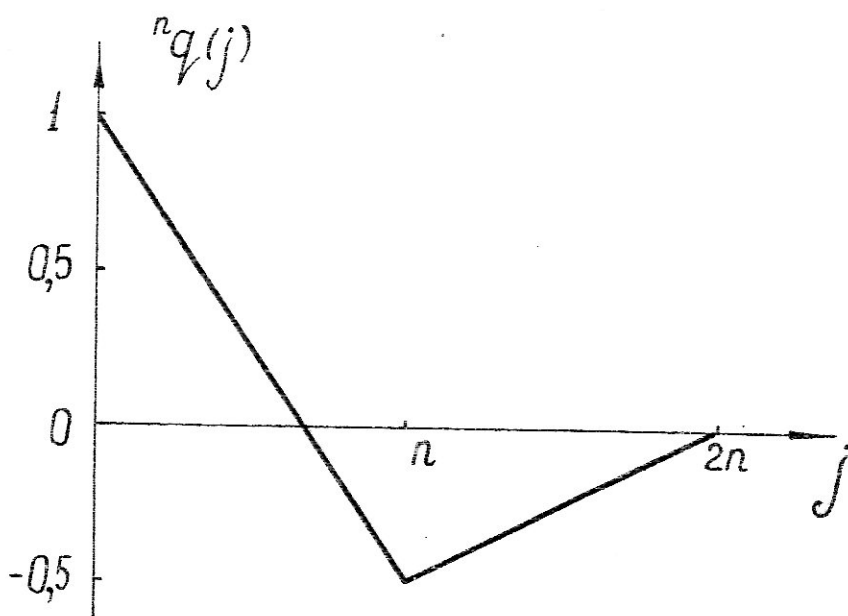


Рис. 5. Корреляционная функция вторых разностей для случайных поперечных смещений.

ординат. Вычисляя $\langle {}^n \mathcal{D}_i {}^n \mathcal{D}_{i+j} \rangle$, получим (рис. 5)

$$\langle {}^n \mathcal{D}_i {}^n \mathcal{D}_{i+j} \rangle = n \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle \cdot {}^n q(j),$$

$${}^n q(j) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{j}{n} \right), & 0 \leq j \leq n; \\ -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{j}{n} \right), & n \leq j \leq 2n; \\ 0, & j > 2n, \end{cases} \quad (1.74)$$

причем, $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle \sim t \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$. Средний квадрат вторых разностей для \mathcal{D}_i , определяемых случайными смещениями, пропорционален длине ячейки.

Спектральная плотность такого процесса

$$S(\omega) = \frac{\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle}{\pi \omega^2} (1 - \cos \omega)^2. \quad (1.75)$$

В общем случае связь между зависимостью $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle$ от t и видом корреляционной функции $\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle$ установлена Кирали/37.

Пусть $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle = f(t) \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$, а рассматриваемый случайный процесс эргодичен, т.е. $\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle = 0$ при $j \geq K$. В этом случае

$$f(t) = At^3 + Bt + C, \quad (1.76)$$

где $A = \frac{2}{3} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^K \chi_j \right)$; $B = \frac{1}{3} \cdot \left[1 + 2 \sum_{j=1}^K (1 - 3j^2) \chi_j \right]$;

$$C = \sum_{j=1}^K j(j^2 - 1) \chi_j, \quad \text{а} \quad \chi_j = \frac{\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle}{\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle}.$$

Значения параметра $\rho = \langle T_i^2 \rangle^{1/2} / \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle^{1/2}$ для случаев

$\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle = \text{const}$ и $\langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle \sim t \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$, соответственно равны $\frac{10}{3}$ и $\sqrt{3}$.

Г Л А В А П

ПОМЕХИ, СОПУТСТВУЮЩИЕ ИЗМЕРЕНИЯМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ, И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КУЛОНОВСКОГО РАС- СЕЯНИЯ

Измерениям многократного рассеяния в ядерной фотоэмульсии сопутствуют различного рода ошибки и помехи, которые можно разбить на три категории : шумы ,дисторсии и ложное рассеяние .

§ I. Ш у м ы

Под шумами будем понимать статистическую сумму: шума отсчета, шума зерен, шума перефокусировки, шума столика микроскопа и теплового шума:

$$\langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_{iо}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}_{iз}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}_{iл}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}_{iст}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}_{iт}^2 \rangle. \quad (2.1)$$

Все компоненты $\mathcal{D}_{iш}$ имеют различную природу, статистические свойства и величину. Поэтому, чтобы правильно учитывать влияние шума на результаты измерений, необходимо знать соотношение между всеми его составными частями.

Шум отсчета определяется в основном ошибками при установке нити или биштриха окулярмикрометра на отдельные зерна или группы зерен трека, а также ошибками отсчета делений на шкале барабана окулярмикрометра или ценой наименьшего деления датчика смещения биштриха в полуавтоматических микроскопах.

Отдельные значения координаты y , обусловленные ошибка-

ми этого типа, статистически независимы, т.е.

$$\langle y_i y_{i+j} \rangle = 0, \quad j \geq 1, \quad (2.2)$$

откуда следует, что

$$\langle \mathcal{D}_{i_0}^2 \rangle = \langle (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})^2 \rangle = 6 \langle y_i^2 \rangle. \quad (2.3)$$

С помощью этого соотношения можно экспериментально определить $\langle \mathcal{D}_{i_0}^2 \rangle$, повторно измеряя координаты y_i следа строго в одних и тех же точках. Так как координаты y_i и повторно измеренные y_i' статистически независимы, то

$$\langle \mathcal{D}_{i_0}^2 \rangle \approx \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i')^2. \quad (2.4)$$

На практике обычно вместо среднеквадратических значений $\langle \mathcal{D}_{i_0}^2 \rangle^{1/2}$ и $\langle y_i^2 \rangle^{1/2}$ используются среднеарифметические $\mathcal{D}_{i_0}' = \langle |\mathcal{D}_{i_0}| \rangle$ и $\varepsilon = \langle |y_i| \rangle$, которые при гауссовом законе распределения в $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ раз меньше первых.

Величина ε для большинства микроскопов равна 0,02 мк / 38 - 40 /.

Шум отсчета $\langle \mathcal{D}_{i_0}^2 \rangle$, согласно работам / 38,39 и др./, не зависит от длины ячейки t , на которой измерялись координаты y_i . Этот результат - следствие статистической независимости y_i (§ 4, гл. I).

Ошибка, обусловленная отклонением положения центров проявленных зерен от истинной траектории частицы, называется шумом зерен. Этот шум вызывается, во-первых, тем, что частица, проходя через эмульсионный слой, активирует не только те кристаллы *AgHal*, которые она пересекает по диаметру но и почти все кристаллы, пересекаемые по хордам; и, во-вторых тем, что на заключительной стадии проявления проис-

Ходят микросмещения отдельных зерен серебра.

Как и шум отсчета, шум зерен может быть определен экспериментально путем измерения координат y_i и y_i'' в точках, отстоящих на расстояние t порядка 10 ± 50 мк.

$$\langle \mathcal{D}_{i3}^2 \rangle \cong \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i'')^2 - \langle \mathcal{D}_{i0}^2 \rangle. \quad (2.5)$$

В работе / 40/ подробно изучены все свойства шума зерен на микроскопе типа МБИ-8М. Показано, что шум зерен определяется в основном процессом активирования микрокристаллов и физико-механическими свойствами эмульсии. Наиболее вероятный шум отдельных зерен и блобов в эмульсии НИКФМ-Р равен $\mathcal{D}'_{i3} = 0,162 \pm 0,003$ мк.

Как и шум отсчета, шум зерен не зависит от t , т.е.

$$\langle {}^n \mathcal{D}_{i3}^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_{i3}^2 \rangle = const. \quad (2.6)$$

Ошибки, обусловленные непрямолинейностью перемещения об"ектива микроскопа при перефокусировке, называются шумом перефокусировки. Величина этой ошибки зависит от угла погружения следа частицы в эмульсии. При вертикальном перемещении об"ектива на 5 ± 20 мк шум перефокусировки $\mathcal{D}'_{in} \cong 0,02 \pm 0,30$ мк. Для шума \mathcal{D}_{in} , очевидно, имеет место соотношение

$$\langle {}^n \mathcal{D}_{in}^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle = const. \quad (2.7)$$

Непрямолинейность перемещения столика микроскопа вызывает ошибки, которые называют шумом столика. В современных исследованиях, связанных с измерением многократного рассеяния, приходится работать на отрезках следов достаточно большой длины (~ 10 см), поэтому необходим тщатель-

ный контроль и учет боковых смещений столика. Шум столиков обычно измеряют с помощью интерферометров /41,42/. Шум столиков микроскопов МИРЭ-2 /43/ Користка М S -2 и др., специально разработанных для измерения рассеяния, невелик и равен приблизительно $\mathcal{D}'_{ict} \approx 0,01 \pm 0,03$ мк на ячейке $t = 500$ м с длиной ячейки \mathcal{D}'_{ict} изменяется незначительно ($\mathcal{D}'_{ict} \sim t^{0,2 \div 0,5}$)

Тепловой шум обусловлен различным влиянием температуры на отдельные части микроскопа.

В современных микроскопах величина теплового шума пренебрежимо мала по сравнению с другими источниками шумов и её при измерениях обычно не учитывают.

Пусть измеренные значения $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{ik} + \mathcal{D}_{iш}$, где \mathcal{D}_{ik} - вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием, а $\mathcal{D}_{iш}$ - вторые разности, обусловленные не зависящими от t шумами. Существует множество различных способов определения $\langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle$ по измеренным значениям \mathcal{D}_i .

Способ I. Величину $\mathcal{D}_K = \langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2}$ определяют по формулам:

$$\mathcal{D}_K = (\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle - \langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle)^{1/2}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{D}_K = \left[\frac{2}{3} (\langle T_i^2 \rangle - \frac{10}{3} \langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle) \right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

где $\langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle$ - шумы, измеренные на следах частиц очень большой энергии, которые обычно называют калибровочными. При определении $\langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle$ необходимо следить, чтобы калибровочные следы имели ту же плотность зерен, что и измеряемые.

Относительная ошибка величины \mathcal{D}_K равна /44/

$$\frac{\delta \mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_K} = \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

где N - число вторых разностей, а

$$C = (0,95 + 1,13\mu + 2,49\mu^2)^{1/2} \quad \text{для (2.8) и}$$

$$C = (1,53 + 6,45\mu + 10,33\mu^2)^{1/2} \quad \text{для (2.9).}$$

Здесь $\mu = \langle \mathcal{D}_{iij}^2 \rangle / \langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle$.

Способ 2. основан на использовании кратных ячеек.

Поскольку $\langle T_{ik}^2 \rangle$ и $\langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle \sim t^3$, $\langle T_{iij}^2 \rangle$ и $\langle \mathcal{D}_{iij}^2 \rangle \sim t^0$, то \mathcal{D}_k можно определить следующим образом:

$$\mathcal{D}_k = \left(\frac{\langle \mathcal{D}_{iij}^2 \rangle - \langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle}{n^3 - 1} \right)^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{D}_k = \left(\frac{\langle T_{iij}^2 \rangle - \langle T_{ik}^2 \rangle}{\frac{3}{2} \cdot (n^3 - 1)} \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

здесь n - показатель кратности ячейки. Относительная ошибка величины \mathcal{D}_k в этом случае также вычисляется по формуле (2.10), причем / 44 /.

$$C = (2,03 + 0,138\mu + 0,0402\mu^2)^{1/2} \quad \text{для (2.11)} \quad (2.13)$$

при $n = 2$

и

$$C = (3,6 + 0,096\mu + 0,003\mu^2)^{1/2} \quad \text{для (2.12)}$$

при $n = 4$

Под N в этом случае подразумевается число основных ячеек длиной t , а не nt .

Способ 3 основан на корреляционных свойствах вторых разностей многократного кулоновского рассеяния и шумов. Суть его состоит в использовании таких комбинаций вторых моментов $\langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle$, которые не подвержены шумами / 15,28,

35, 45 /. Например, \mathcal{D}_K можно найти следующим образом / 28/:

$$\mathcal{D}_K = \sqrt{\frac{8}{11}} \left(\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle + \frac{3}{2} \langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+1} \rangle \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

причем

$$C = (1,047 + 0,155 \mu + 0,090 \mu^2)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Способ 4 состоит в определении \mathcal{D}_K по среднеквадратичному значению величин / 46, 47 /

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(m) &= \frac{(y_i + y_{i+1} + \dots + y_{i+m-1}) - 2(y_{i+m} + y_{i+m+1} + \dots + y_{i+2m-1})}{m} + \quad (2.16) \\ &+ \frac{(y_{i+2m} + y_{i+2m+1} + \dots + y_{i+3m-1})}{m} = \\ &= \frac{m \mathcal{D}_i + m \mathcal{D}_{i+1} + m \mathcal{D}_{i+2} + \dots + m \mathcal{D}_{i+m-1}}{m}. \end{aligned}$$

Используя (1.71) и (1.73), при $m = 5$ получим

$$\langle \mathcal{D}_i^2(5) \rangle = 0,83008 \langle {}^5 \mathcal{D}_{iK}^2 \rangle + \frac{1}{5} \langle \mathcal{D}_{iш}^2 \rangle. \quad (2.17)$$

В отличие от предыдущих этот способ не позволяет полностью избавиться от шумов, вклад которых, однако, уменьшается как m^{-1} .

Способ 5, предложенный в работе / 36/, основывается на корреляционных свойствах перекрывающихся ячеек. В параграфе 4 (глава I) показано, что для статистически независимых координат y_i $\langle {}^n \mathcal{D}_i {}^n \mathcal{D}_{i+1} \rangle = 0$. Поэтому \mathcal{D}_K можно определять по формуле / 48 /:

$$\mathcal{D}_K = 2 \left[\frac{\langle {}^n \mathcal{D}_i {}^n \mathcal{D}_{i+1} \rangle}{n g(1)} \right]^{1/2}. \quad (2.18)$$

Статистическая ошибка величины \mathcal{D}_K в этом случае равна для $n = 2, 3$ и 4 соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_K} &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,779 + 0,141\mu + 0,094\mu^2)^{1/2}, \\ \frac{\delta \mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_K} &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,630 + 0,147\mu + 0,218\mu^2)^{1/2}, \quad (2.19) \\ \frac{\delta \mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_K} &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,589 + 0,132\mu + 0,144\mu^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где N — число измеренных вторых разностей на основной ячейке t .

Следует отметить, что с увеличением степени перекрывания n члены, содержащие μ , сначала возрастают, а при $n > 3$ уменьшаются приблизительно как $n^{-1/2}$. Это объясняется тем, что для шумов $\langle n\mathcal{D}_i n\mathcal{D}_{i+1} \rangle = 0$, причем статистическая обеспеченность этого соотношения растет с ростом n . Сравнение формул (2.10), (2.13), (2.15) и (2.19) показывает, что наибольшую точность определения величины \mathcal{D}_K дает последний способ, во-первых потому, что с ростом n несколько возрастает статистическая обеспеченность кулоновской части рассеяния и, во-вторых потому, что для шумов, определенных с помощью перекрывающихся ячеек,

$$\frac{\delta \mathcal{D}_{ш}}{\mathcal{D}_{ш}} \simeq \frac{1,1}{\sqrt{n(N-1) + 1}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

§ 2. Д и с т о р с и и

После обработки ядерной фотоэмульсии следы частиц искривляются и могут принять характерную C, S — образную или ещё более сложную форму. Такие макроскопические искажения обычно называются дисторсией.

Дисторсия зависит от температуры и свойств растворов, которыми обрабатывают эмульсию [49], а также от условий хранения эмульсии до экспонирования [50].

Пусть в необработанном слое эмульсии толщиной $BC = T$ (рис.6) имеется скрытое изображение прямого следа AB . Введем систему координат x_0, y_0, z_0 так, чтобы плоскость x_0, y_0 совпала с поверхностью стекла, на которую наклеена эмульсия. После обработки и сушки след AB искажится и перейдет в AB' . При этом толщина эмульсии уменьшится до $B'C'$. Отношение $\frac{BC}{B'C'} = S_0$ называется коэффициентом усадки. Векторный элемент трека $d\vec{R}'(x_0, y_0, z_0)$ переходит в соответствующий векторный элемент $d\vec{R}(x, y, z)$. Рассмотрим непрерывную векторную функцию $\vec{D}(x_0, y_0, z_0)$, ставящую в соответствие каждой точке следа AB определенную точку следа AB' . Очевидно, что

$$d\vec{R} = d\vec{R}' + d\vec{D}. \quad (2.20)$$

Обозначая проекции вектора \vec{D} на оси x_0, y_0, z_0 через $\alpha(x_0, y_0, z_0)$, $\beta(x_0, y_0, z_0)$ и $\gamma(x_0, y_0, z_0)$ соответственно и проектируя (2.20) на эти оси координат, получим

$$\begin{cases} dx = \left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\right) dx_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} dz_0, \\ dy = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} dx_0 + \left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial y_0}\right) dy_0 + \frac{\partial \beta}{\partial z_0} dz_0, \\ dz = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} dy_0 + \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z_0}\right) dz_0, \end{cases} \quad (2.21)$$

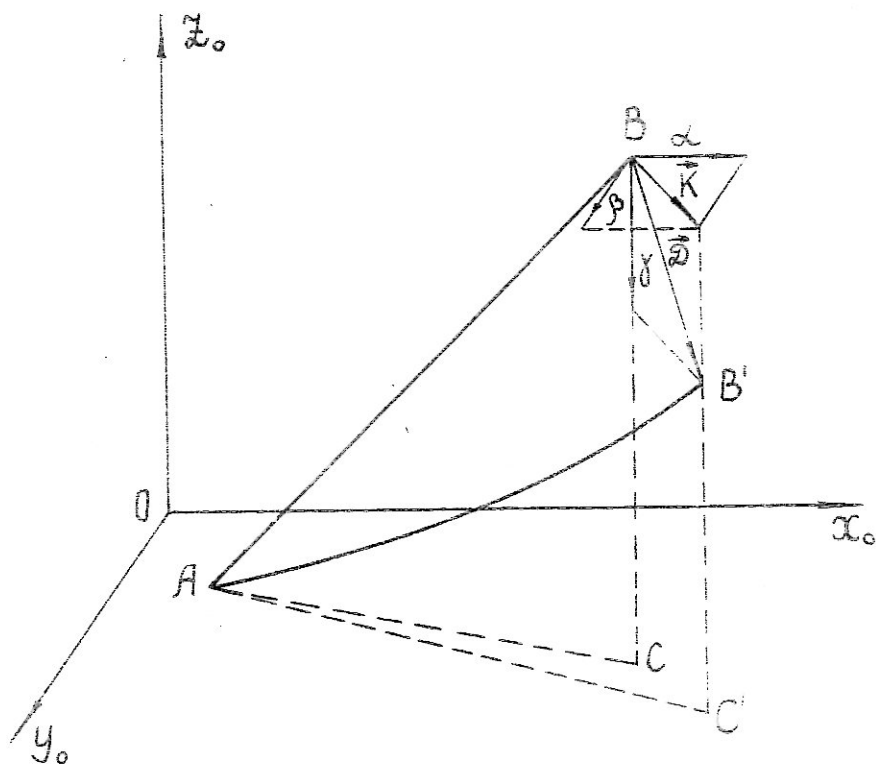


Рис.6. Искажение следа частицы за счет дисторсии.

Таким образом, дифференциальный элемент следа частицы в необработанной эмульсии переводится в соответствующий дифференциальный элемент следа в обработанной эмульсии с помощью матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_0} & \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} & \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial \beta}{\partial y_0} & \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} & \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z_0} \end{pmatrix}.$$

Определитель её равен $1/S_0$, т.е.

$$\det \vec{M} = 1/S_0, \quad (2.22)$$

где S_0 — коэффициент усадки. Дифференциальное уравнение в частных производных (2.22), удовлетворяющее определенным граничным условиям, описывает все возможные типы дисторсии, согласующиеся с постоянством коэффициента усадки.

Рассмотрим один из самых важных типов дисторсии, который обычно называют гравитационным. Эта дисторсия возникает вследствие сдвиговых напряжений, параллельных плоскости эмульсии. Предположим, что силовое поле и плотность эмульсии однородны. Тогда естественны следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = \gamma = 0 & \quad \text{при} \quad z_0 = 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} = \frac{\partial \beta}{\partial z_0} = 0 & \quad \text{при} \quad z_0 = T. \end{aligned}$$

Кроме того, будем считать, что α, β и γ зависят только от z_0 . т.е.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} = \frac{\partial \beta}{\partial y_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} = 0.$$

В этих предположениях простейшим нетривиальным решением уравнения (2.22) будет

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\mathcal{K}}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \cos \Theta, \\ \beta = \frac{\mathcal{K}}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \sin \Theta, \\ \gamma = z_0 \left(\frac{1}{S_0} - 1 \right). \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь Θ -постоянная, определяемая направлением поля, а \mathcal{K} - величина тангенциальной составляющей вектора дисторсии $\vec{\mathcal{D}}$ на поверхности эмульсия - воздух.

Обычно мерой дисторсии в ядерной фотоэмульсии называется величина

$$K_g = \frac{\mathcal{K}}{T^2}. \quad (2.24)$$

Если \mathcal{K} измерять в микронах, а толщину необработанной эмульсии в миллиметрах, то K_D будет выражена в ковансах. Таким образом, $1 \text{ ков} = 1 \frac{\text{мк}}{\text{мм}^2}$. В стандартных эмульсиях \mathcal{K} имеет величину порядка 10 мк. Тангенциальная составляющая вектора дисторсии (2.23) равна

$$\vec{\mathcal{K}} = \vec{i}\alpha + \vec{j}\beta = \vec{\mathcal{K}}_1 \left(\frac{z_0}{T} \right) + \vec{\mathcal{K}}_2 \left(\frac{z_0}{T} \right)^2, \quad (2.25)$$

где $\vec{\mathcal{K}}_1 = 2\mathcal{K} (\vec{i} \cos \Theta - \vec{j} \sin \Theta)$,

$$\vec{\mathcal{K}}_2 = -\mathcal{K} (\vec{i} \cos \Theta - \vec{j} \sin \Theta) ,$$

откуда $\vec{\mathcal{K}}_1 = -2 \vec{\mathcal{K}}_2$. (2.26)

Соотношение (2.25) показывает, что рассмотренная нами дисторсия будет квадратичной. В общем случае дисторсия может быть и более высоких порядков, т.е.

$$\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{K}}_1 \left(\frac{z_0}{T} \right) + \vec{\mathcal{K}}_2 \left(\frac{z_0}{T} \right)^2 + \vec{\mathcal{K}}_3 \left(\frac{z_0}{T} \right)^3 + \dots \quad (2.27)$$

Апостолакис и Мэдмор / 52 / экспериментально изучили вектор $\vec{\mathcal{K}}$. Для этого они наклеивали эмульсионные слои на обе стороны тонкой стеклянной пластинки. Зная точку входа и выхода следа из стекла, можно определить первоначальный угол погружения следа в необработанной эмульсии, а также найти вектор $\vec{\mathcal{K}}$, если частицы обладают достаточно высокой энергией. По их данным, $\vec{\mathcal{K}}$ может быть представлено соотношением (2.25), причем $|\vec{\mathcal{K}}_1|/|\vec{\mathcal{K}}_2| = 2,03 \pm 0,03$, а $\vec{\mathcal{K}}_1 \cong -2\vec{\mathcal{K}}_2$. Это говорит о том, что в ядерной фотоэмульсии преобладают дисторсии линейная и квадратичная.

Предположим, что измерено N значений координаты y , подверженной дисторсии. Тогда каждое значение

$$y_j = y_{j_0} + \beta_j, \quad (2.28)$$

где y_{j_0} - истинная координата, а β_j - проекция вектора $\vec{\mathcal{D}}$ на ось y .

Вычисляя вторые разности, имеем

$$D_i = D_{i_0} + (\beta_i - 2\beta_{i+1} + \beta_{i+2}) = D_{i_0} + d_i. \quad (2.29)$$

Когда имеются искажения только первого и второго порядков, то, согласно (2.25)

$$\beta_i = \frac{\mathcal{K}}{T^2} (2z_i T - z_i^2) \sin \theta. \quad (2.30)$$

Если первоначальный угол погружения трека φ , то длина ячейки $t = \frac{L}{N-1} = \frac{T}{(N-1)\operatorname{tg}\varphi}$, где L — длина проекции следа на плоскость (x_0, y_0) , а $N-1$ — число ячеек.

$$\text{Очевидно также, что } z_i = it\operatorname{tg}\varphi, \text{ а}$$

$$\beta_i = \frac{\mathcal{K}}{T^2} (2itT\operatorname{tg}\varphi - i^2 t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \theta. \quad (2.31)$$

Соответственно

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i0} - \frac{2\mathcal{K}}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \theta \quad (2.32)$$

и

$$d' = \langle |d_i| \rangle = \frac{2\mathcal{K}}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \theta. \quad (2.33)$$

Из этой формулы видно, что среднеарифметическое значение второй разности, обусловленной квадратичной дисторсией, пропорционально квадрату длины ячейки t и $\operatorname{tg}^2 \varphi$. Соотношение (2.32) показывает, что если необходимо вычислить вторые разности \mathcal{D}_{i0} , не подверженные дисторсии второго порядка, то нужно каждое значение \mathcal{D}_i исправить на некоторую постоянную величину d' .

Измеренные координаты следа, подверженного произвольной дисторсии, можно представить следующим образом:

$$y_i = y_{i0} + a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + \dots \quad (2.34)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

Здесь y_{i0} — координаты, не содержащие искажений, а bx_i , cx_i^2 , \dots — члены, описывающие дисторсию соответственно первого, второго, третьего и более высоких порядков.

Если длина ячейки, на которой измерялись координаты, равна t , то $x_i = it$. Вычисляя первые S_i , вторые \mathcal{D}_i и третьи T_i разности координат, имеем

$$\begin{cases} S_i = S_{i0} + bt + ct^2(2i+1) + dt^3(3i^2+3i+1) + \dots, \\ \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i0} + 2ct^2 + 6dt^3(i+1) + \dots, \\ T_i = T_{i0} + 6dt^3 + \dots \end{cases} \quad (2.35)$$

Из этих соотношений видно, что первые разности не содержат постоянной величины a , вторые — линейной дисторсии βx_i , третьи — дисторсии второго порядка αx_i^2 , и т.д. Используя выражения (2.35), можно получить три часто используемых способа исключения дисторсий.

Способ I. Для определения \mathcal{D}_K используются третьи разности T_i , которые не подвержены дисторсии второго порядка.

Способ 2. Вторые разности \mathcal{D}_i для следов, подверженных дисторсии второго порядка, равны сумме \mathcal{D}_{i0} и некоторой постоянной величины $2ct^2$. Поскольку среднее значение $\langle \mathcal{D}_{i0} \rangle$ равно нулю, то

$$2ct^2 = \langle d_i \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} \mathcal{D}_i}{N-2},$$

а неискаженные значения вторых разностей равны

$$\mathcal{D}_{i0} = \mathcal{D}_i - \langle d_i \rangle. \quad (2.36)$$

Сравнивая формулы (2.32) и (2.36), находим, что

$$\langle d_i \rangle = -\frac{2\mathcal{K}}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \theta. \quad (2.37)$$

Таким образом, чтобы исключить дисторсию второго порядка описываемую выражением (2.25), достаточно найти среднее алгебраическое значение \mathcal{D}_i и вычесть его из каждого значения измеренных вторых разностей / 29 /.

Способ 3 наиболее общий и может быть применен для исключения дисторсии любого порядка / 29/. Пусть a , b , c и d не равны нулю, а все остальные члены равны нулю. Так как третьи разности T_{i0} не подвержены дисторсии, то $\langle T_{i0} \rangle = 0$ и, согласно (2.35)

$$d = \frac{1}{6t^3} \langle T_i \rangle. \quad (2.38)$$

Подставляя это значение d в (2.35) и учитывая, что $\langle \mathcal{D}_{i0} \rangle = 0$, получим

$$\langle \mathcal{D}_i \rangle = 2ct^2 + \frac{N+1}{2} \langle T_i \rangle,$$

откуда

$$2ct^2 = \langle \mathcal{D}_i \rangle - \frac{N+1}{2} \langle T_i \rangle. \quad (2.39)$$

Здесь N - число измеренных координат ψ_i . Согласно (2.35), (2.38) и (2.39), вторые разности, исправленные на дисторсию второго и третьего порядков, равны

$$\mathcal{D}_{i0} = \mathcal{D}_i - \langle \mathcal{D}_i \rangle + \langle T_i \rangle \left[\frac{N+1}{2} - (i+1) \right]. \quad (2.40)$$

($i = 1, 2, 3, \dots$)

Следует заметить, что формулы (2.36) и (2.40) можно применять в том случае, когда число измеренных координат достаточно велико, иначе будет исключена и часть кулоновского рассеяния. Обычно измерения рассеяния выполняют

на малой ячейке t_0 (N велико). Поэтому, необходимо исключать дисторсию для вторых разностей, определенных на ячейке t_0 , а затем вычислять вторые разности для больших ячеек по формуле (1,85).

§ 3. Ложное рассеяние.

Помимо шумов и дисторсий, мешающих измерению многократного кулоновского рассеяния, наблюдаются ещё меньшие (локальные) искажения следов частиц в эмульсии. Влияние таких искажений проявляется в виде так называемого ложного рассеяния. Впервые на существование ложного рассеяния указали Висвас и др. / 38/.

Сразу же после открытия ложного рассеяния предпринимались попытки уменьшить его, улучшив физико-механические свойства ядерной эмульсии. Представляют интерес результаты работы / 53 / в которой указано, что при определенном режиме обработки ядерной эмульсии ложное рассеяние может быть сведено до минимума. Обработка ядерной эмульсии с помощью акустических колебаний также приводит к уменьшению величины ложного рассеяния и дисторсии / 54 /.

Величина среднего квадрата второй разности ложного

рассеяния $\langle \mathcal{D}_{i,l}^2 \rangle$ на следах частиц с известной энергией может быть определена из соотношения

$$\langle \mathcal{D}_{i,l}^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle - \langle \mathcal{D}_{i,k}^2 \rangle - \langle \mathcal{D}_{i,u}^2 \rangle - d^2, \quad (2.41)$$

где \mathcal{D}_i - измеренные вторые разности ; $\mathcal{D}_{i,u}$ - вторые разности, включающие ошибки отсчета, шумы зерен, перефокусировки, столика и т.п. ; d - вторые разности, обусловленные дисторсией ; $\mathcal{D}_{i,k}$ - вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием.

Существуют и другие методы измерения $\langle \mathcal{D}_{i,l}^2 \rangle$, основанные уже на свойствах самого ложного рассеяния. Характер распределения вторых разностей ложного рассеяния точно не установлен. Большинство экспериментальных данных указывает на то, что, по-видимому, это распределение незначительно отличается от нормального.

а) Зависимость ложного рассеяния от длины ячейки

Экспериментальное определение ложного рассеяния на следах частиц с известной энергией показало, что $\mathcal{D}'_l = \langle |\mathcal{D}_{i,l}| \rangle = at^x$, причем $x \simeq 1$. В некоторых работах указывается, что с увеличением длины ячейки показатель x уменьшается / 55 - 58 /.

На рисунке 7 показана зависимость ложного рассеяния от длины ячейки, определенная нами на следах

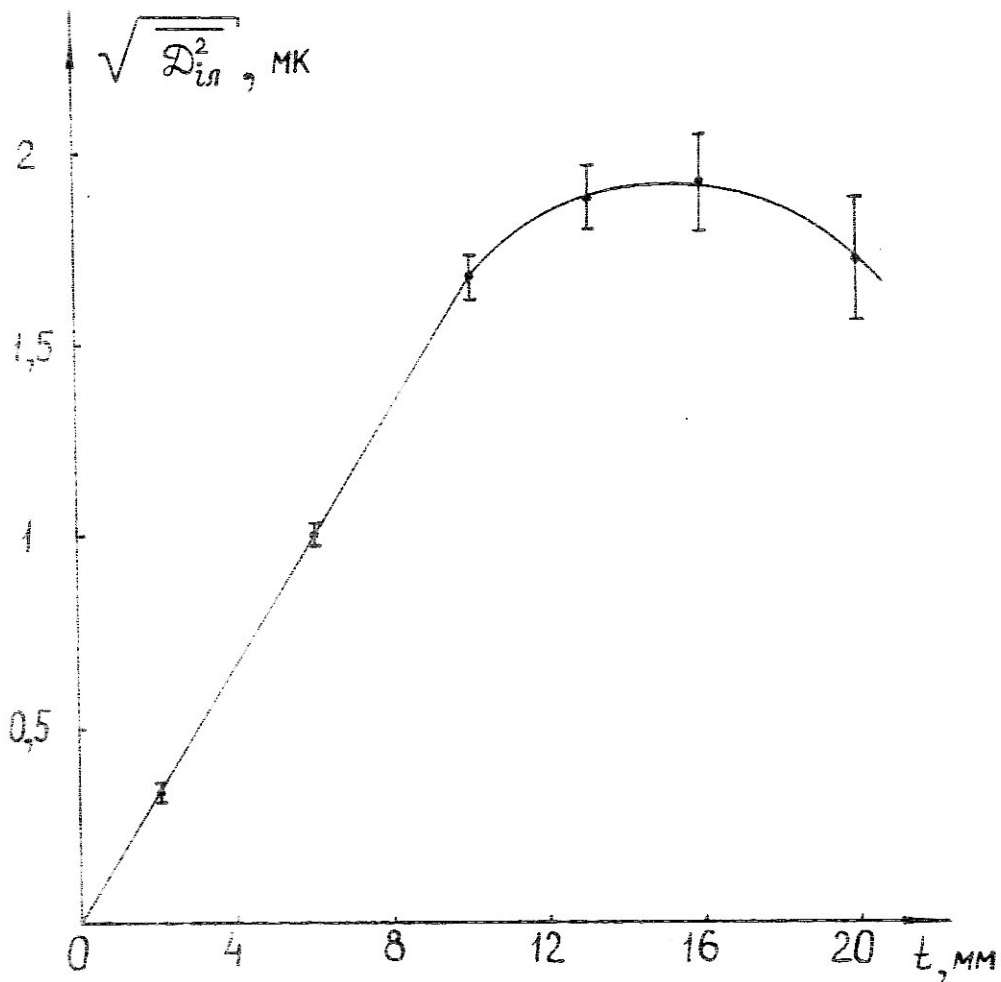


Рис. 7. Зависимость ложного рассеяния от длины ячейки для эмульсии НИИХИМФОТО БР-2.

π^- - мезонов с энергией 60 Гэв.

Как видно из рисунка, при $t > 1$ см зависимость \mathcal{D}_n от t перестает быть линейной. Аналогичный результат получен в работе / 58 /. Этот факт легко объясним, если вспомнить, что $\langle n \mathcal{D}_i^2 \rangle = f(t) \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$, где $f(t) = At^3 + Bt + C$, а $A = \frac{2}{3} \cdot (1 + 2 \sum_{j=1}^K \gamma_j)$ (1.76).

Если $\sum_{j=1}^K \gamma_j < -\frac{1}{2}$, то $A < 0$ и $f(t)$ будет иметь вид, аналогичный показанному на рис. 7. Следует однако отметить, что различные ядерные эмульсии могут иметь несколько отличное по своим свойствам ложное рассеяние, а следовательно и коэффициент A , зависящий от $\gamma_j = \frac{\langle \mathcal{D}_{i,n} \mathcal{D}_{(i+j),n} \rangle}{\langle \mathcal{D}_{i,n}^2 \rangle}$, будет различен для разных стопок эмульсии. Поэтому и зависимость \mathcal{D}_n от t , если она используется для оценки многократного кулоновского рассеяния, необходимо определять для каждой стопки эмульсии отдельно.

б) Зависимость ложного рассеяния от угла погружения следов в эмульсии.

Энергию неизвестных частиц, как правило, определяют на следах, имеющих различные углы погружения φ по отношению к плоскости эмульсионного слоя. Чтобы выяснить зависимость ложного рассеяния от угла наклона следов частиц, эмульсионные слои специально облучались под различными углами / 50, 59, 60, 61 /. В работе / 60 / эмульсия НИКФИ-Р толщиной 400 мк облучалась протонами с энергией 9 Гэв под углами 0,5 ; 1,2 ; 2,1 ; 2,9 ; 5,6 ; 10°. Для ложного рассеяния, измеренного с помощью третьих и четвертых разностей координат,

зависимости \mathcal{D}_n от углов не наблюдалось. Слабая зависимость ложного рассеяния от углов подтверждена также в работе / 61/. В работе /50 / показано, что ложное рассеяние не зависит от φ до углов порядка 2° , а затем оно увеличивается с ростом углов.

Вспоминая , что дисторсия сильно зависит от угла φ , можно предположить, что в работах, где наблюдается зависимость ложного рассеяния от угла наклона следов частиц, авторы не совсем корректно или вовсе не исключали дисторсию.

**в) Зависимость ложного рассеяния от
толщины эмульсионного слоя.**

Для выяснения природы ложного рассеяния интересно изучить зависимость его от толщины эмульсионного слоя. Эмульсионные слои типа БР-1 и БР-2 толщиной 400, 800, 1000 и 1200 мк, разработанные в радиографической лаборатории НИИХИМФОТО / 62 /, облучались протонами с энергией 9 Гэв. Измерения многократного рассеяния в этих эмульсиях показали / 63/, что наименьшее ложное рассеяние имеют эмульсионные слои толщиной 800 мк (рис. 8).

г) Корреляционные свойства ложного рассеяния.

Многократное рассеяние наиболее полно характеризуется корреляционной функцией вторых разностей координат $K(j) =$

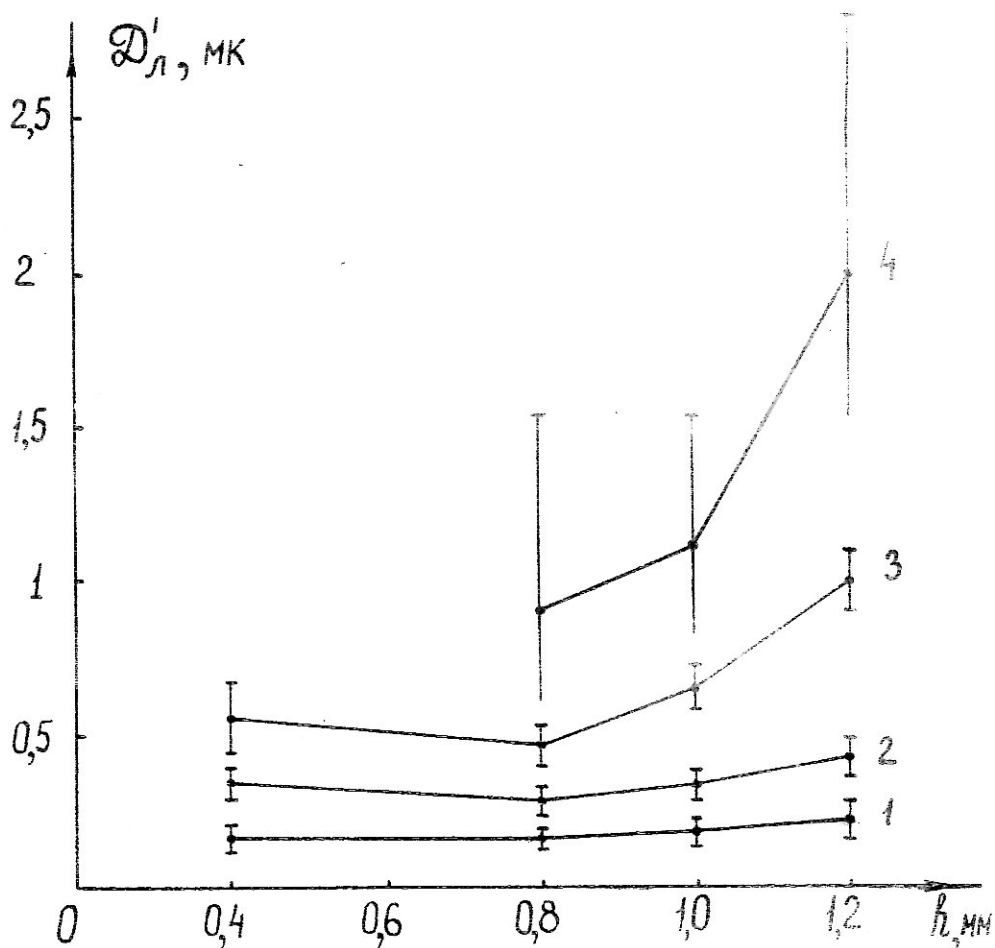
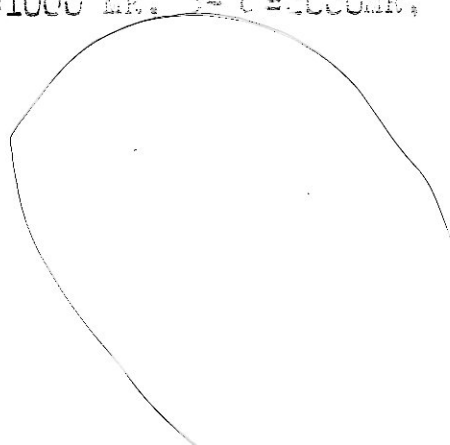


Рис. 8. Зависимость ложного рассеяния от толщины эмульсионного слоя для различных длин ячеек: 1- $t=500$ МК, 2- $t=1000$ МК, 3- $t=2000$ МК, 4- $t=4000$ МК.



$= \langle \mathcal{D}_i \mathcal{D}_{i+j} \rangle$. Эта функция однозначно определяет свойства разностей координат более высокого порядка. Например, средний квадрат третьих разностей $\langle T_i^2 \rangle$ и средний квадрат четвертых разностей координат $\langle F_i^2 \rangle$ можно выразить в виде

$$\langle T_i^2 \rangle = 2K(0) - 2K(1), \quad (2.42)$$

$$\langle F_i^2 \rangle = 6K(0) - 8K(1) + 2K(2).$$

Параметры $\rho = \frac{\langle T_i^2 \rangle^{1/2}}{\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle^{1/2}}$ и $q = \frac{\langle F_i^2 \rangle^{1/2}}{\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle^{1/2}}$, используемые в практических измерениях, могут служить простейшей мерой корреляции вторых разностей координат. Согласно (2.42)

$$\rho = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\mathcal{K}(1)}{\mathcal{K}(0)} \right)^{1/2}, \quad q = \sqrt{2} \left(3 - \frac{4\mathcal{K}(1)}{\mathcal{K}(0)} + \frac{\mathcal{K}(2)}{\mathcal{K}(0)} \right)^{1/2}. \quad (2.43)$$

Так как природа ложного рассеяния окончательно не выяснена, величины ρ_n , q_n и $\mathcal{K}_n(j)$ обычно находятся экспериментально. В работе / 64 / на следах протонов с энергией 9 ГэВ в эмульсии НИКФИ-Р оценено значение ρ_n , которое оказалось равным $1,75 \pm 0,02$ при $t = 500$ мк, $1,76 \pm 0,05$ при $t = 1000$ мк и $1,81 \pm 0,09$ при $t = 2000$ мк. В работе / 65 / показано, что ρ_n , измеренное на следах π^- -мезонов с энергией 14,5 ГэВ в эмульсии Ильфорд Ст-5, колеблется от $1,62 \pm 0,05$ до $1,75 \pm 0,09$ при $t = 1000 + 4000$ мк. Значения ρ_n , определенные на следах частиц с энергией 8,17, 24 и 60 ГэВ, практически не отличаются от приведенных выше и приблизительно равны (1,72 / 56, 66, 67). Согласно экспериментальным данным, величина ρ_n практически не зависит от длины ячейки.

Отдельные значения корреляционной функции $\mathcal{K}_n(j)$ можно найти с помощью перекрывающихся значений вторых разностей координат, измеренных на следах частиц с известной энергией, по формуле

$$\mathcal{K}_n(j) = \langle {}^n \mathcal{D}_i {}^n \mathcal{D}_{i+j} \rangle - \langle {}^n \mathcal{D}_{i\kappa} {}^n \mathcal{D}_{(i+j)\kappa} \rangle - \langle {}^n \mathcal{D}_{i\psi} {}^n \mathcal{D}_{(i+j)\psi} \rangle - d^2 \quad (2.44)$$

Усредненные по множеству следов корреляционные функции измеренных вторых разностей (без дисторсий) и вторых разностей ложного рассеяния для следов протонов с энергией 10 Гэв в эмульсионных слоях НИКФИ-БР-1 (приведены на рис. 9). Измерения выполнены на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2 на ячейке $t_0 = 100 \text{ мк}$ (с пересчетом на ячейки $t = 400, 800, 1200$ и 1600 мк).

На кривых отчетливо видны выбросы при $j = 0$ и $j = n$, вызванные шумами; затухающая периодичность за счет ложного рассеяния и рост кулоновского рассеяния (заштрихованная часть).

Форма корреляционной функции ложного рассеяния незначительно изменяется с длиной ячейки, что и приводит к независимости ρ_n от t , отмеченной выше. В общем случае корреляционную функцию ложного рассеяния можно представить в виде

$$\mathcal{K}_n(j) = \langle {}^n \mathcal{D}_{i,n}^2 \rangle \exp\left[-\alpha \left(\frac{j}{a}\right)^\gamma\right] \cos\left[\beta \left(\frac{j}{a}\right)\right], \quad (2.45)$$

где α, β и γ — постоянные величины, а $a = \frac{n}{4}$. Анализ экспериментальных значений $\mathcal{K}_n(j)$ показал, что ве-

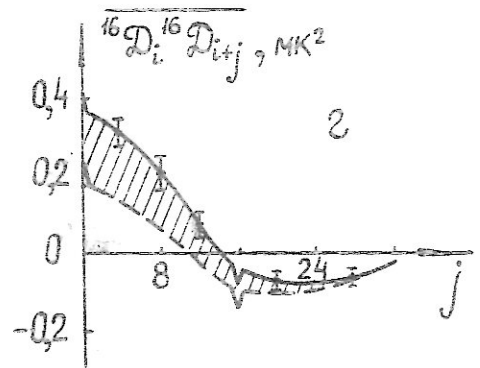
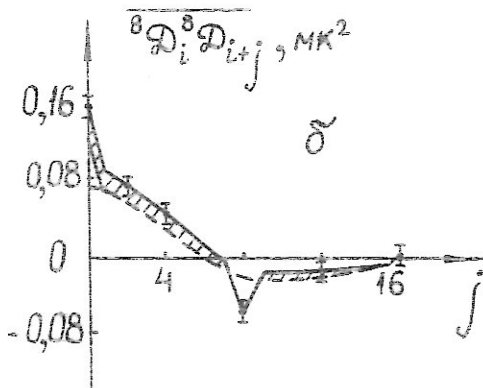
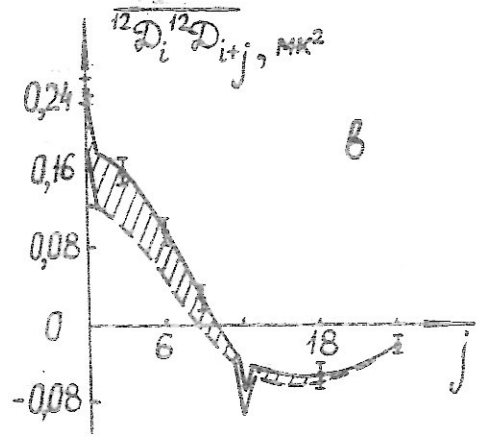
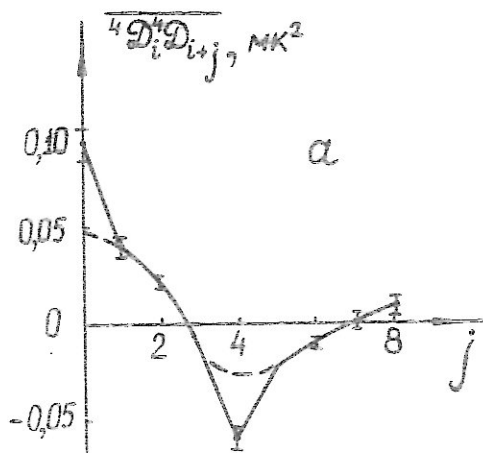


Рис. 9. Корреляционные функции измеренных вторых разностей (сплошная линия) и ложного рассеяния (штриховая): а - $t = 400$ мк; б - $t = 800$ мк ; в - $t = 1200$ мк; г - $t = 1600$ мк.

личина $\alpha \sim 0,02$, $\beta \sim 0,6$ и $\gamma \approx 2$.

Спектральная функция ложного рассеяния, согласно (1.58) будет ($\alpha = 1$)

$$S_n(\omega) = \frac{\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha j^\gamma) \cos \beta j \cos \omega j \, dj. \quad (2.46)$$

При $\gamma = 2$

$$S_n(\omega) = \frac{\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle}{4\sqrt{\pi\alpha}} \left[\exp\left(-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha}\right) \right]. \quad (2.47)$$

О природе ложного рассеяния.

Существует несколько гипотез, авторы которых пытались объяснить причины возникновения ложного рассеяния / 35, 58, 68, 69 /. Яноши предполагает / 35, 70 /, что ложное рассеяние - искажения следов, возникшие после экспонирования эмульсии. Зависимость среднего квадрата второй разности $\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle$ от длины ячейки t

$$\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle \sim t^\nu, \quad (2.48)$$

где $1 \leq \nu < 3$, объясняется суммарным влиянием двух различных типов искажения следов:

I. Эмульсия может деформироваться так, что некоторые малые участки её поворачиваются один относительно другого на некоторый случайный угол. Если эмульсия при этом не разрушается, то этот процесс даёт такой же эффект, как и многократное кулоновское рассеяние, причем $\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle \sim t^3$.

2. В некоторых местах эмульсия разрывается и возникают сдвиги в произвольных направлениях. Такие искажения относятся к типу случайных смещений, причем $\langle \mathcal{D}_{i_n}^2 \rangle_2 \sim t$. Следует отметить, что корреляционная функция $\mathcal{K}_n(j)$, рассчитанная согласно модели Яноши, существенно отличается от экспериментальной (рис. 10).

Наилучшее согласие корреляционной функции ложного рассеяния для такой модели с экспериментом будет при $(\langle \mathcal{D}_{i_n}^2 \rangle_1) = 0$. На рис. 11 представлены спектральные функции ложного рассеяния, рассчитанные по формулам (1.75) и (2.47), и спектральная функция многократного кулоновского рассеяния. Формула (1.75) соответствует модели Яноши в предположении, что $(\langle \mathcal{D}_{i_n}^2 \rangle_1) = 0$.

Из рисунка 11 видна некоторая неудовлетворительность модели ложного рассеяния, предложенной Яноши.

В работе /68/ установлена зависимость среднеарифметического значения второй разности $\langle |\mathcal{D}_{i_2}| \rangle$, измеренной в вертикальной плоскости, от среднеарифметического значения $\langle |\mathcal{D}_{i_y}| \rangle$, измеренного в плоскости эмульсионного слоя,

$$\langle |\mathcal{D}_{i_2}| \rangle \approx 1 + 3,7 \langle |\mathcal{D}_{i_y}| \rangle. \quad (2.49)$$

На основании этого высказывается предположение, что слои эмульсии при экспонировании некоторым образом искривлены (следы частиц не искажены), а при наклежке обработанных слоев на стекло они спрямляются, вызывая искажения следов частиц в вертикальной плоскости. Согласно (2.49), возни-

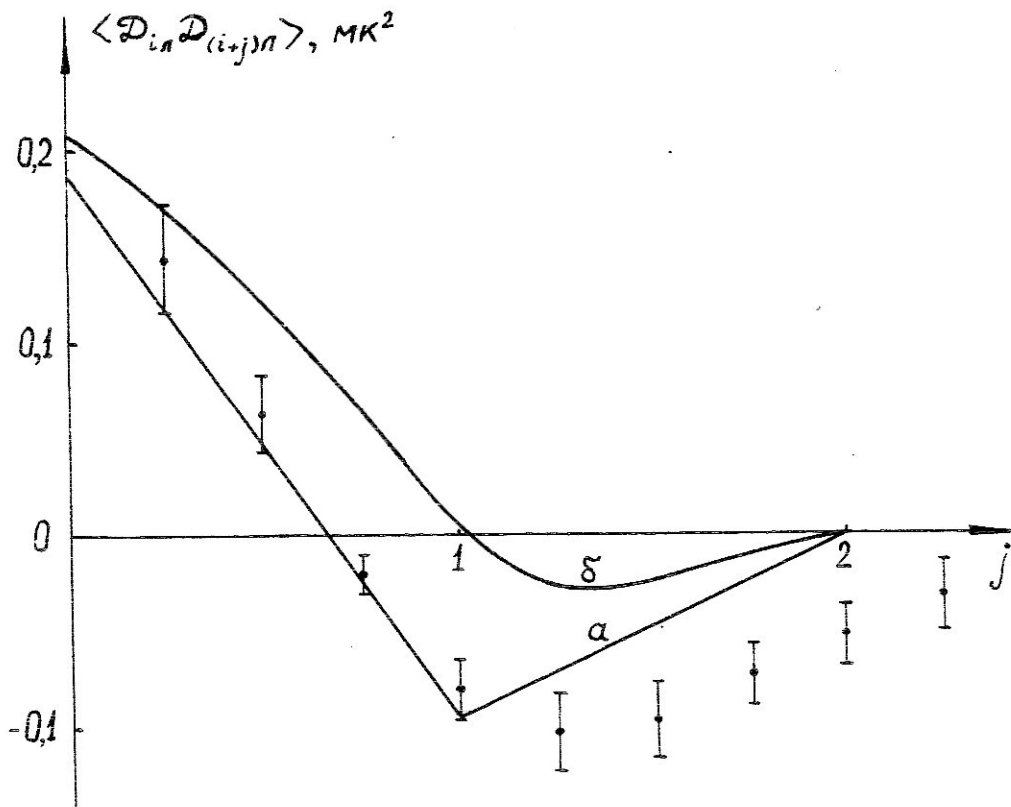


Рис. 10. Корреляционные функции ложного рассеяния:
 а - рассчитанная в предположении $\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle^{1/2} \sim t$,
 б - $\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle \sim at^2 + bt^3$ [35] . Точки - эксперимент.

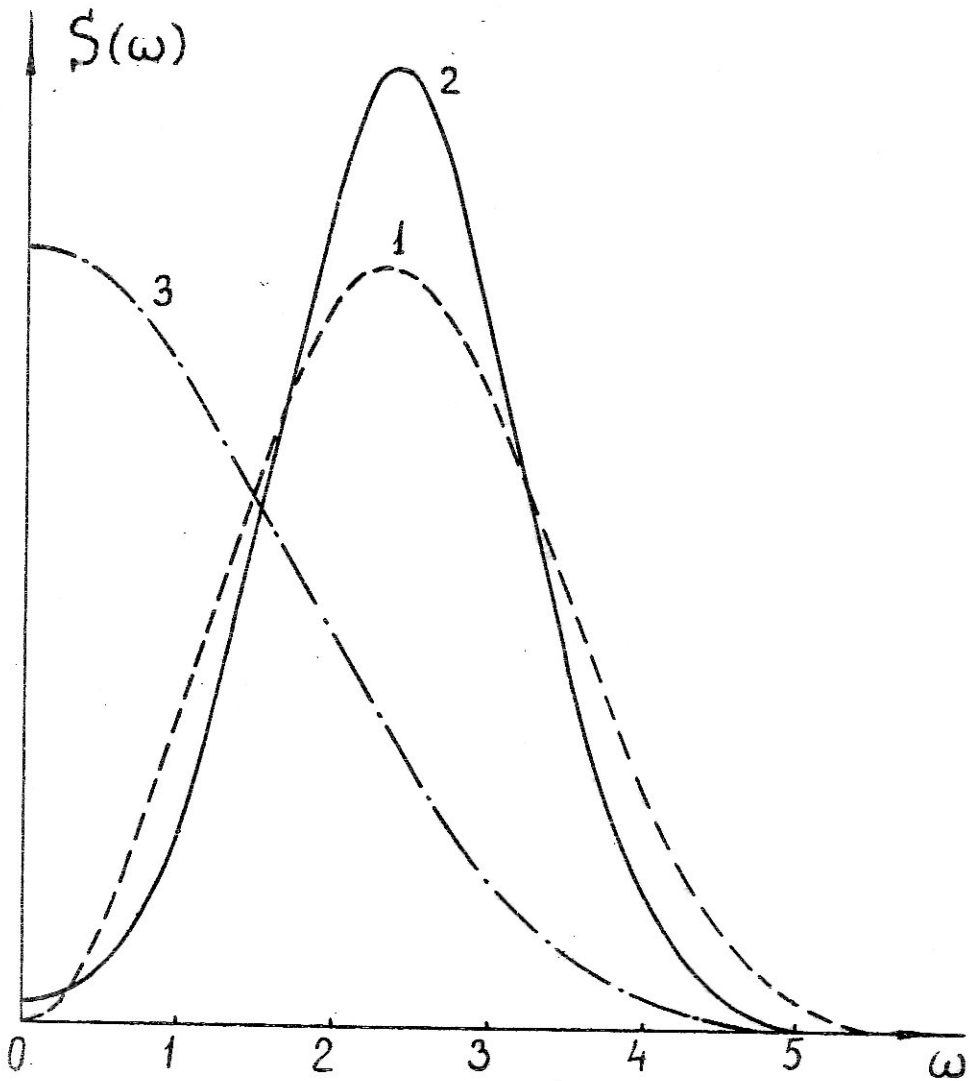


Рис. II. Спектральные функции, описывающие ложное рассеяние по модели Яноши (1), экспериментально наблюдаемое ложное рассеяние (2) и многократное кулоновское рассеяние (3).

кают искажения и в горизонтальной плоскости. Есть указания, что величина ложного рассеяния существенно зависит и от наклёйки слоев на стекло.

В работе /69/ автор пытается объяснить природу ложного рассеяния квантовомеханическими эффектами, связанными с рассеянием частиц в неоднородной среде. Однако эта гипотеза не может объяснить некоторые экспериментальные факты, в частности увеличение искажений с течением времени, прошедшего после обработки слоев / 53 /. Ни одна из этих гипотез не в состоянии полностью описать все свойства ложного рассеяния, которые известны в настоящее время.

§ 4. Экспериментальное определение многократного кулоновского рассеяния

Методы оценки кулоновского рассеяния основаны на использовании свойств ложного рассеяния. Надёжность этих методов определяется главным образом достоверностью и постоянством параметров, характеризующих ложное рассеяние.

1. Простейший способ оценки $\mathcal{D}_K^2 = \langle \mathcal{D}_{iK}^2 \rangle$ представляет собой статистическое вычитание ложного рассеяния.

Если шумы и дисторсии исключены из измеренных величин вторых разностей \mathcal{D}_i , кулоновское рассеяние можно оценить по формуле

$$\langle \mathcal{D}_{iK}^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle - \langle \mathcal{D}_{iN}^2 \rangle, \quad (2.50)$$

где $\langle \mathcal{D}_{iN}^2 \rangle$ — средний квадрат второй разности ложного рассея-

ния, измеренный на следах частиц с известной энергией. Предполагается, что это значение соответствует ложному рассеянию в той области эмульсионного слоя, где находится измеряемый след неизвестной частицы.

Формулой (2.50) можно пользоваться, если $\langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2} > 4 \langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle^{1/2}$, а число вторых разностей при этом достаточно велико. Точность оценки \bar{D}_k по формуле (2.50) мала, так как условие $\langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2} > 4 \langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle^{1/2}$ обычно выполняется при достаточно большом t , когда число измеренных вторых разностей невелико. Существенный недостаток этого способа и его низкая эффективность, вызванная значительным статистическим разбросом величин $\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle$ и $\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle$.

2. Метод кратных ячеек основан на предположении, что среднеквадратическое значение вторых разностей ложного рассеяния зависит от длины ячейки как at^x , где $x = const$. Так как

$$\langle \mathcal{D}_i^2 \rangle = b^2 t^3 + a^2 t^{2x}, \quad (2.51)$$

где $b = \frac{\mathcal{H}'_0}{573 \text{ ppc}}$, то, составив систему из трех линейно независимых уравнений, соответствующих трем различным ячейкам, можно оценить $\mathcal{D}_k = b t^{3/2}$. Для длин ячеек, относящихся как 1 : 2 : 3, величина \mathcal{D}_k в явном виде не находится / 71/. Если взять кратные ячейки, длины которых относятся как 1 : 2 : 4, то / 72/

$$\begin{cases} \langle \mathcal{D}_i^2(t) \rangle = b^2 t^3 + a^2 t^{2x}, \\ \langle \mathcal{D}_i^2(2t) \rangle = 8b^2 t^3 + a^2 \cdot 2^{2x} \cdot t^{2x}, \\ \langle \mathcal{D}_i^2(4t) \rangle = 64b^2 t^3 + a^2 \cdot 2^{4x} \cdot t^{2x}; \end{cases} \quad (2.52)$$

Решив эти уравнения, получим

$$D_K = \left[\frac{\langle \varphi_i^2(t) \rangle \cdot \langle \varphi_i^2(4t) \rangle - \langle \varphi_i^2(2t) \rangle}{64 \langle \varphi_i^2(t) \rangle + \langle \varphi_i^2(4t) \rangle - 16 \langle \varphi_i^2(2t) \rangle} \right]^{1/2} \quad (2.53)$$

С помощью этой формулы ложное рассеяние исключается индивидуально на каждом следе. Недостаток метода в том, что показатель κ в зависимости $\varphi_n = at^\kappa$ может изменяться с длиной ячейки (§ 4 этой главы). Как и предыдущий этот метод имеет низкую эффективность.

3. Наиболее широкое применение получил достаточно эффективный и простой способ оценки D_K , основанный на постоянстве величины β_n /64, 74/. После исключения дисторсий и шумов для вторых и третьих разностей можно записать:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^2 \rangle &= \langle \varphi_{i\kappa}^2 \rangle + \langle \varphi_{in}^2 \rangle, \\ \langle T_i^2 \rangle &= \beta^2 \langle \varphi_i^2 \rangle = \beta_\kappa^2 \langle \varphi_{i\kappa}^2 \rangle + \beta_n^2 \langle \varphi_{in}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.54)$$

откуда

$$\varphi_\kappa = \langle \varphi_i^2 \rangle^{1/2} \sqrt{\frac{\beta_n^2 - \beta^2}{\beta_n^2 - \beta_\kappa^2}}.$$

Оценка D_K по формуле (2.54) отличается от оценки по формуле (2.50) тем, что в первом случае используется среднее значение $\langle \varphi_{in}^2 \rangle$, которое изменяется в широких пределах в зависимости от t , типа эмульсии и геометрического положения следов; а в другом — значение β_n , которое, как показала экспериментальная проверка, имеет узкое распределение и в области используемых длин ячеек практически не зависит от t . При использовании формулы (2.54) необходимо обращать особое внимание на исключение дисторсий, которые приводят к уменьшению β . Значение этой величины может быть

близким к значению β_K , соответствующему кулоновскому рассеянию, хотя вклад последнего в измеренную вторую разность может быть незначителен.

4. Метод корреляционных моментов.

Исследование корреляционных и спектральных функций многократного кулоновского рассеяния, ложного рассеяния и шумов показало, что их свойства существенно различны (рис II). Это позволяет по измеренным вторым разностям построить выражение, которое не содержит вклада, обусловленного шумами, а доля ложного рассеяния уменьшена приблизительно в 50 раз. Таким выражением является спектральная составляющая при $\omega = 0$. В самом деле: $S_{ш}(0) = 0$, $S_K(0) = \frac{3}{4\pi\epsilon} \langle \mathcal{D}_K^2 \rangle$ (см. (1.63)), а $S_n(0) = \frac{\langle \mathcal{D}_n^2 \rangle}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$ (см. (2.47)). Если $\langle \mathcal{D}_K^2 \rangle = \langle \mathcal{D}_n^2 \rangle$, то для экспериментальных значений α и β $S_K(0) / S_n(0) \approx 50$. Спектральную составляющую $S(0)$ можно оценить по формуле

$$S^*(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_0} \mathcal{K}^*(\tau) d\tau,$$

где $\mathcal{K}^*(\tau)$ — корреляционная функция измеренных вторых разностей. Недостаток этой формулы в том, что дисперсия оценки $S^*(0)$ при любом τ_0 того же порядка, что и оцениваемая спектральная плотность / 35/. Кроме того, $S^*(0)$ можно найти таким способом только для стационарных случайных функций. Наличие же в ядерных эмульсиях дисторсий приводит к тому, что процесс многократного рас-

сеяния становится нестационарным и оценка \bar{D}_K по величине $\int^*(0)$ будет слишком неточна.

Поэтому ниже описывается другой метод оценки \bar{D}_K , основанный на том, что корреляционная функция ложного рассеяния может быть аппроксимирована выражением

$$\langle {}^n D_{in} {}^n D_{(i+j)l} \rangle = \langle {}^n D_{in}^2 \rangle \exp\left[-\alpha \left(\frac{j}{a}\right)^\gamma\right] \cos\left(\frac{\beta j}{a}\right), \quad (2.55)$$

где α, β, γ - некоторые параметры. Используя (1.71), (1.73) и (2.55), составим систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} \langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+a)u} \rangle &= \frac{235}{256} \langle {}^n D_{ik}^2 \rangle + \langle {}^n D_{in}^2 \rangle \exp(-\alpha) \cos \beta, \\ \langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+2a)u} \rangle &= \frac{184}{256} \langle {}^n D_{ik}^2 \rangle + \langle {}^n D_{in}^2 \rangle \exp(-\alpha \cdot 2^\gamma) \cos 2\beta, \\ \langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+3a)u} \rangle &= \frac{121}{256} \langle {}^n D_{ik}^2 \rangle + \langle {}^n D_{in}^2 \rangle \exp(-\alpha \cdot 3^\gamma) \cos 3\beta, \\ \langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+5a)u} \rangle &= \frac{27}{256} \langle {}^n D_{ik}^2 \rangle + \langle {}^n D_{in}^2 \rangle \exp(-\alpha \cdot 5^\gamma) \cos 5\beta, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где ${}^n D_{iu}$ - измеренные вторые разности координат, а $a = \frac{n}{4}$.

В этой системе уравнений значения j выбраны равными 1, 2, 3 и 5. Опущены значения, равные 0 и 4, так как для них $\langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+j)u} \rangle \neq 0$. При большом n в принципе можно выбирать любые четыре значения j , для которых $\langle {}^n D_{iu} {}^n D_{(i+j)u} \rangle = 0$. Однако, существует ряд аргументов, ограничивающих этот выбор. Из-за слабой определенности системы уравнений (2.56), желательно использовать такие j , для последовательных значений которых корреляционные моменты заметно различаются по величине. Необходимо, кроме того, выбирать наименьшие значения j , так как с ростом их ста-

статистическая ошибка определения корреляционных моментов растёт. Имеются ограничения и в выборе степени перекрытия n . С одной стороны, чем больше n , тем с большей точностью исключаются шумы /48/, но с другой стороны, при этом существенно увеличивается объем измерений. Наиболее удобны, по-видимому, значения $n = 4, 8, 12$ и 16 . Все эти аргументы и привели в конечном счете к тем значениям n , которые используются в системе уравнений (2.56). Система уравнений (2.56) не может быть разрешена в явном виде, однако некоторые упрощения позволяют легко решать её на электронных цифровых вычислительных машинах.

Анализ экспериментальных корреляционных функций ложного рассеяния показал, что величина α в (2.45) мала и поэтому можно приближенно положить $\exp[-2(\frac{j}{a})^\delta] \approx 1 - 2(\frac{j}{a})^\delta$. Тогда система уравнений (2.56) сводится к одному уравнению

$$\frac{a_{3I} \cos 2\beta - a_{2I} \cos 3\beta - a_{23} \cos \beta}{2^\delta a_{3I} \cos 2\beta - 3^\delta a_{2I} \cos 3\beta - a_{23} \cos \beta} - \frac{a_{5I} \cos 2\beta - a_{2I} \cos 5\beta - a_{25} \cos \beta}{2^\delta a_{5I} \cos 2\beta - 5^\delta a_{2I} \cos 5\beta - a_{25} \cos \beta} = 0, \quad (2.57)$$

где

$$a_{2I} = \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+2a)u} \rangle - \frac{184}{235} \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)u} \rangle,$$

$$a_{3I} = \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+3a)u} \rangle - \frac{121}{235} \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)u} \rangle,$$

$$a_{5I} = \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+5a)u} \rangle - \frac{27}{235} \langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)u} \rangle,$$

$$a_{23} = \frac{184}{235} \times a_{3I} - \frac{121}{235} a_{2I},$$

$$a_{25} = \frac{184}{235} \times a_{5I} - \frac{27}{235} a_{2I}$$

Определив β , являющееся корнем уравнения (2.57), получим

$$\langle {}^n \mathcal{D}_{in}^2 \rangle = \frac{a_{21}}{(1-\alpha)2^8 \cos 2\beta - \frac{184}{235}(1-\alpha) \cos \beta}, \quad (2.58)$$

где
$$\alpha = \frac{a_{31} \cos 2\beta - a_{21} \cos 3\beta - a_{23} \cos \beta}{2^8 a_{31} \cos 2\beta - 3^8 a_{21} \cos 3\beta - a_{23} \cos \beta}.$$

Зная α , β и $\langle {}^n \mathcal{D}_{in}^2 \rangle$, из первого уравнения системы (2.56) найдем средний квадрат второй разности многократного кулоновского рассеяния:

$$\langle {}^n \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle = \frac{256}{235} \left[\langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+\alpha)u} \rangle - (1-\alpha) \cos \beta \langle {}^n \mathcal{D}_{in}^2 \rangle \right]. \quad (2.59)$$

Искомый импульс будет:

$$p_{\beta c} = \frac{\mathcal{H} t^{3/2} \sqrt{g_c}}{573 \sqrt{2} \langle {}^n \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2}}. \quad (2.60)$$

Для оценки ошибки определения D_K по формуле (2.59) воспользуемся методом, предложенным Баркасом / 28/. Относительная ошибка $\delta \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K$ будет

$$\frac{\delta \mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_K} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{D}_K^2}{\mathcal{D}_K^2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\mathcal{D}_K^2}}{\langle \mathcal{D}_K^2 \rangle}, \quad (2.61)$$

где

$$\mathcal{D}_K^2 \equiv \frac{256}{235} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left[{}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+\alpha)u} - (1-\alpha) \cos \beta {}^n \mathcal{D}_{in}^2 \right]. \quad (2.62)$$

Предполагается, что число вторых разностей ${}^n \mathcal{D}_{iu}^2$ достаточно велико. Для нахождения дисперсии величины D_K нужно вычислить дисперсию правой части выражения (2.62), учитывая, что при исключении ложного рассеяния этим мето-

дом (α и β - подбираются для каждого следа),

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (1-\alpha) \cos \beta {}^n \mathcal{D}_{i\ell}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} {}^n \mathcal{D}_{i\ell} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\ell}. \quad (2.63)$$

В этом случае

$$\mathcal{D}_K^2 \approx \frac{256}{235(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \left[{}^n \mathcal{D}_{i\kappa} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\kappa} + ({}^n \mathcal{D}_{i\ell} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\kappa} + {}^n \mathcal{D}_{i\kappa} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\ell}) + \right. \\ \left. + {}^n \mathcal{D}_{i\psi} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\psi} + ({}^n \mathcal{D}_{i\ell} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\psi} + {}^n \mathcal{D}_{i\psi} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\ell}) + ({}^n \mathcal{D}_{i\kappa} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\psi} + {}^n \mathcal{D}_{i\psi} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)\kappa}) \right]. \quad (2.64)$$

Полагая $n=4$ и предполагая, что в первом приближении ложное рассеяние можно описать моделью случайных смещений участков эмульсии, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{i\ell} &= \zeta_i - \zeta_{i+1}, \\ \mathcal{D}_{i\kappa} &= \nu_i + a \nu_{i+1}, \\ \mathcal{D}_{i\psi} &= \delta_i - 2\delta_{i+1} + \delta_{i+2}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где ζ_i , ν_i и δ_i ; - статистически независимые переменные.

Используя (1.65), для вторых разностей ${}^4 \mathcal{D}_i$ получим

$${}^4 \mathcal{D}_{i\ell} = \zeta_i + \zeta_{i+1} + \zeta_{i+2} + \zeta_{i+3} - \zeta_{i+4} - \zeta_{i+5} - \zeta_{i+6} - \zeta_{i+7}, \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} {}^4 \mathcal{D}_{i\kappa} &= \nu_i + (a+2)\nu_{i+1} + (2a+3)\nu_{i+2} + (3a+4)\nu_{i+3} + (4a+3)\nu_{i+4} + \\ &+ (3a+2)\nu_{i+5} + (2a+1)\nu_{i+6} + a\nu_{i+7}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$${}^4 \mathcal{D}_{i\psi} = \delta_i - 2\delta_{i+4} + \delta_{i+8}. \quad (2.68)$$

Подставляя (2.66), (2.67) и (2.68) в (2.64), найдем

$$\mathcal{D}_K^2 \approx \left(\frac{256}{235} \right)^2 \left[37167(\nu^2)^2 + 3497\nu^2 s^2 + 428\nu^2 \delta^2 + 160s^2 \delta^2 + 70(\delta^2)^2 \right], \quad (2.69)$$

$$\langle \mathcal{D}_K^2 \rangle = \frac{256}{235} \cdot 62,973 \nu^2,$$

$$\text{где } \nu^2 = \langle \nu_i^2 \rangle, \quad s^2 = \langle \zeta_i^2 \rangle \quad \text{и} \quad \delta^2 = \langle \delta_i^2 \rangle$$

Так как $\nu^2 = \frac{\langle {}^4 \mathcal{D}_{i\kappa}^2 \rangle}{64(1+a^2)}$, $s^2 = \frac{1}{8} \langle {}^4 \mathcal{D}_{i\ell}^2 \rangle$ и $\delta^2 = \frac{1}{6} \langle {}^4 \mathcal{D}_{i\psi}^2 \rangle$, из соотношений (2.61) и (2.69) получаем

$$\frac{\delta D_K}{D_K} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} (0,58 + 0,47 \mu + 0,08 \nu + 0,14 \nu^2 + 0,25 \mu \nu)^{1/2}, \quad (2.70)$$

где $\mu = \frac{\langle n_{D_{in}}^2 \rangle}{\langle n_{D_{ik}}^2 \rangle}$, $\nu = \frac{\langle n_{D_{iu}}^2 \rangle}{\langle n_{D_{ik}}^2 \rangle}$, а N — число вторых разностей ${}^4 D_i$, рассчитанных для ячейки t без перекрывания.

Поскольку основной вклад в ошибку дают первый и второй члены выражения (2.70), практически независимые от степени перекрывания n , соотношением (2.70) можно пользоваться и для оценки $\delta D_K / D_K$ при $n > 4$.

На рисунке 12 приведена зависимость относительной ошибки определения D_K от длины ячейки t для следов частиц длиной 6 см с энергиями 17 и 60 Гэв, рассчитанная по формуле (2.70). Как видно из рисунка относительная ошибка величины D_K достигает минимума на некоторой ячейке $t = t_{opt}$ и затем незначительно возрастает с ростом t . Это позволяет приблизительно определить величины D_K и D_L на большой ячейке t_1 , найти μ и ν , а затем, по формуле (2.70) рассчитать t_{opt} . Хорошим критерием для нахождения t_1 является параметр $\rho_{изм}$, достигающий минимального значения на ячейках $t_2 > t_{opt}$. Если длина следа частицы мала ($L \leq 5$ см), то величина $t_{opt} \approx t_2$. Таким образом, критерий определения t_{opt} по минимальной величине $\rho_{изм}$, предложенный в работе /73/, вполне приемлем для измерения $\rho_{\beta c}$ на следах высокоэнергетических частиц с длиной $L \leq 5$ см. Величина t_{opt} , определенная по ρ_{min} на достаточно длинных следах частиц с энергией $E < 20$ Гэв, будет превышать t_{opt} , вычисленную

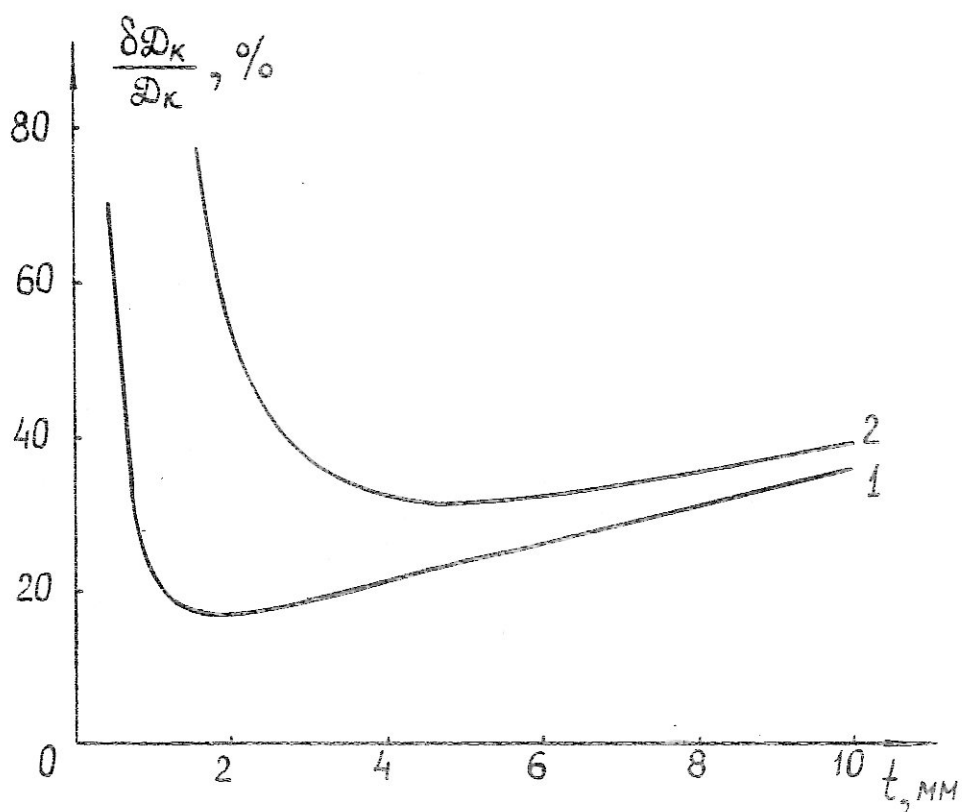


Рис. 12. Зависимость $\frac{\delta D_k}{D_k}$ от t для следов частиц длиной 6 см с энергиями: 1 - 17 Гэв, 2 - 60 Гэв.

по формуле (2.70). Поэтому, для таких следов необходимо оценивать D_K и D_L на ячейке t , соответствующей f_{min} , а затем, вычислив t_{opt} , согласно (2.70), уточнить полученное значение D_K .

В работе / 29/ для нахождения t_{opt} был предложен эмпирический критерий — оптимальной считалась ячейка t , на которой выполняется условие

$$\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle < 2 \langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle. \quad (2.71)$$

Для проверки выполнения этого соотношения использовалась величина

$$S = \frac{\langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+3a)u} \rangle}{\langle {}^n \mathcal{D}_{iu} {}^n \mathcal{D}_{(i+a)u} \rangle},$$

которая должна быть больше

$$S_0 = \frac{121 + 512 \exp(-\alpha \cdot 3^\gamma) \cos 3\beta}{235 + 512 \exp(-\alpha) \cos \beta},$$

где α , β , γ — параметры, характеризующие корреляционную функцию ложного рассеяния.

Следует заметить, что величины t_{opt} , определенные согласно (2.71) и (2.70), приблизительно равны. Поскольку нахождение оптимальной ячейки по минимальной ошибке $\delta D_K / D_K$ наиболее корректно, при определении ρ_{pc} методом корреляционных моментов рекомендуется вычислять t_{opt} по формуле (2.70).

Описанный метод определения импульсов проверялся на первичных следах π^- -мезонов с энергиями 17 Гэв (в эмульсии *Hford* Ct-5) и 60 Гэв (в эмульсии НИКФИ-БР).

Измерение рассеяния выполнено на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2, что позволило проводить все расчеты на ЭЦВМ. Импульсы вычислялись по формулам (2.57 - 2.60) и для сравнения - по методу "ρ". Особенность программы определения импульсов по формулам (2.57- 2.60) - нахождение корней уравнения (2.57). Для экспериментальных значений корреляционных моментов из-за статистических ошибок может не быть таких β, которые удовлетворяли бы этому уравнению. Поэтому, в качестве решения уравнения (2.57) выбирается значение β, дающее минимум левой части (2.57). Это значение отыскивается в области $\beta^* \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$, β* определяется на основе предварительного изучения корреляционной функции ложного рассеяния. Для эмульсий *Ilford* Ст-5 и НИКОИ-БР - $\beta^* \approx \frac{\pi}{12}$.

Эффективность метода оценки $\rho\beta^c$ находилась по формуле

$$q = \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} \cdot \frac{\min(\langle \rho\beta^c \rangle, \rho\beta^c_{ист})}{\max(\langle \rho\beta^c \rangle, \rho\beta^c_{ист})}, \quad (2.72)$$

где γ_0 - полное число следов; γ - число следов, для которых $\rho\beta^c$ либо мнимое, либо выходящее за пределы трех стандартных отклонений относительно среднего значения $\langle \rho\beta^c \rangle$; $\rho\beta^c_{ист}$ - истинное значение импульса.

На рис. 13 и 14 изображены распределения по $\rho\beta^c$, вычисленным методами корреляционных моментов (кМ) и "ρ" для энергий 17 и 60 Гэв. Средние значения $\rho\beta^c$ при $E_0=17$ Гэв, для методов КМ и "ρ" равны $16,5 \pm 0,5$ Гэв и $17,7 \pm 0,7$ Гэв, а

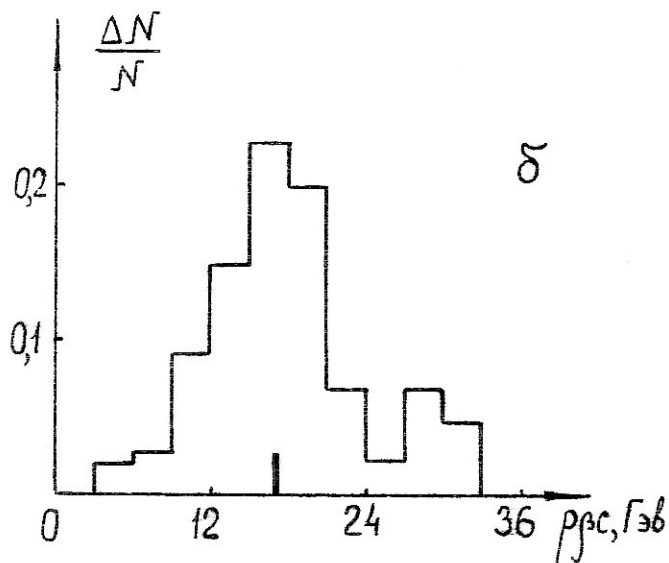
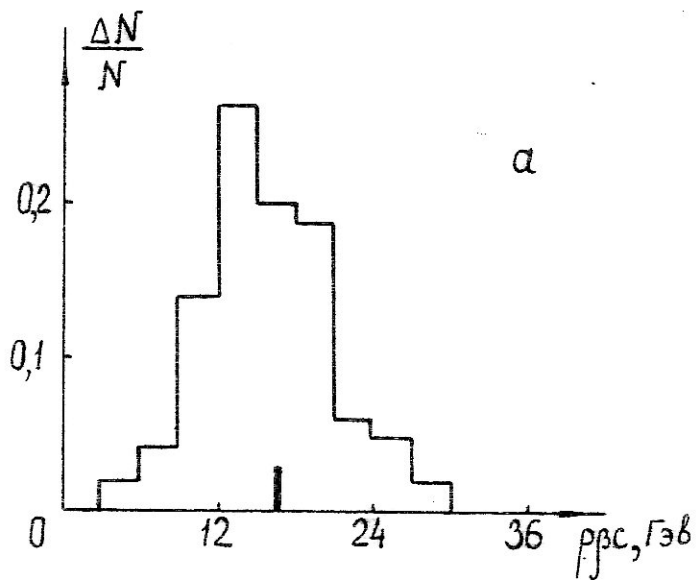


Рис. 13. Распределения по p_{TCS} первичных пионов с энергией 17 ГэВ, вычисленных методом корреляционных моментов (а) и методом "р" (б).

Вращение от 100°

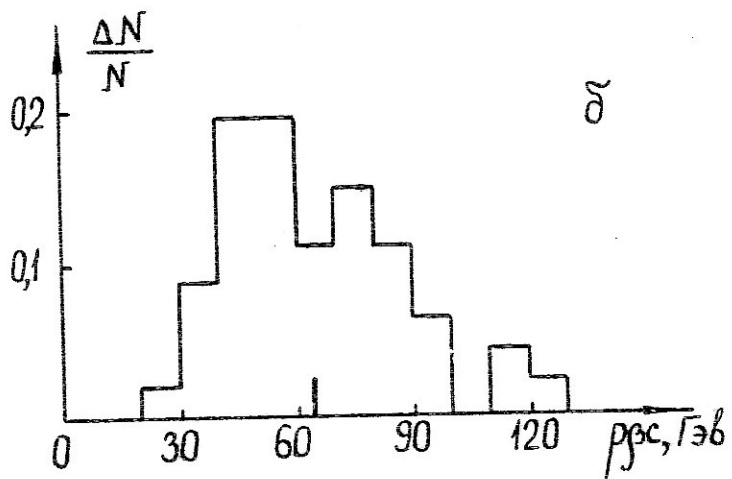
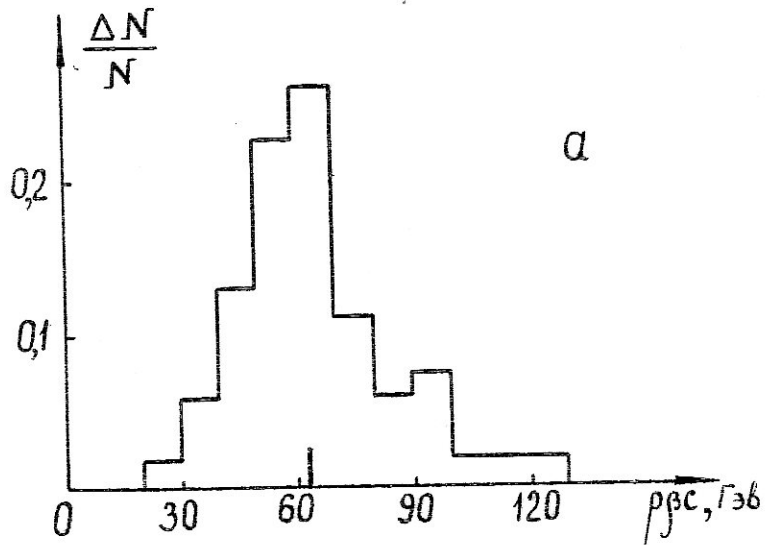


Рис. I4. Распределения по $p_{\pi c}$ первичных пионов с энергией 60 ГэВ, вычисленных методом корреляционных моментов (а) и методом "rho" (б).

их эффективности 94,5 и 82 % соответственно. При $E_0=60$ Гэв те же методы дают $64,4 \pm 2,8$ Гэв и $64,6 \pm 3,4$ Гэв с эффективностями 92 и 83%. Приведенные ошибки средних значений получены экспериментально. Расчет ошибок по формуле (2.70) дает значения, хорошо согласующиеся с экспериментальными величинами. Заметим, что среднее значение $\rho\beta^c$, полученное методом КМ, несколько больше его истинной величины (см. § 5 этой главы).

Согласно приведенным данным, метод КМ позволяет определять $\rho\beta^c$ с несколько большей точностью и значительно большей эффективностью по сравнению с методом "р". Вспоминая, что метод КМ сводится к аппроксимации корреляционной функции измеренных вторых разностей координат функцией, имеющей четыре параметра: $\langle n\mathcal{D}_{iK}^2 \rangle$, $\langle n\mathcal{D}_{iN}^2 \rangle$, α и β ($\gamma = const$), а метод "р" фактически аппроксимирует измеренную кривую только двумя параметрами: $\langle n\mathcal{D}_{iK}^2 \rangle$ и $\langle n\mathcal{D}_{iN}^2 \rangle$ ($\rho_n = const$), нетрудно видеть, что большая точность и эффективность (значительно меньше число мнимых $\rho\beta^c$ ($\langle n\mathcal{D}_{iK}^2 \rangle < 0$)) достигается в первом случае.

Незначительное же уменьшение ошибки в определении импульса методом КМ по сравнению с методом "р" объясняется тем, что основной вклад в эту ошибку дает ограниченность объема измерений, которая не зависит от применяемой методики.

Чтобы точнее определить импульсы вторичных частиц, приходится сшивать отрезки следов этих частиц в нескольких слоях эмульсии. В методе КМ эта процедура сводится к усреднению корреляционных моментов по отрезкам. Так как многократное

кулоновское рассеяние, ложное рассеяние и шумы эргодичны (§4 глава I), усреднение по отрезкам эквивалентно усреднению по следу с длиной, равной сумме длин отрезков.

Недостаток метода КМ — громоздкость расчетов и необходимость применения специальных полуавтоматических микроскопов и электронных вычислительных машин.

§ 5. Оценка многократного кулоновского рассеяния при выборках малого объема.

Пусть многократное кулоновское рассеяние определяется по среднеквадратическому или среднеарифметическому значениям вторых разностей по формулам

$$\mathcal{D}_{K1} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N {}^n \mathcal{D}_i^2} \quad (2.73)$$

и

$$\mathcal{D}_{K2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |{}^n \mathcal{D}_i|, \quad (2.74)$$

где ${}^n \mathcal{D}_i$ — обусловлены только кулоновским рассеянием.

Представляет интерес определить смещения оценок (2.73) и (2.74) по отношению к их математическим ожиданиям, равным σ и $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$ соответственно ($\sigma = \langle {}^n \mathcal{D}_i^2 \rangle^{1/2}$). Величину смещения будем определять по формулам

$$\zeta_1 = \frac{\sigma}{\langle \mathcal{D}_{K1} \rangle} \quad \text{и} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{2} \sigma}{\sqrt{\pi} \langle \mathcal{D}_{K2} \rangle}, \quad (2.75)$$

где $\langle \mathcal{D}_{K1} \rangle$ и $\langle \mathcal{D}_{K2} \rangle$ — средние значения оценок (2.73) и (2.74)

Для вычисления этих средних необходимо знать функции распределения случайных величин \bar{D}_{k1} и \bar{D}_{k2} . Найдем аналитические выражение для функции распределения оценки (2.73). Известно / 75 /, что совместная функция распределения \bar{D}_i достаточно точно описывается выражением

$$f(\vec{D}) = (2\pi\sigma)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} (\det \vec{M})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \vec{D}' \vec{M}^{-1} \vec{D}\right), \quad (2.76)$$

где $\sigma^2 = \langle D_i^2 \rangle$, \vec{D} - одностолбцовая матрица $\begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}$, \vec{D}' - матрица $(\bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_N)$, а \vec{M} - матрица с элементами $M_{ij} = \frac{\langle D_i D_{i+j} \rangle}{\sigma^2}$. Функцию распределения случайной величины \bar{D}_{k1} можно найти следующим образом. Согласно / 34/, плотность распределения величины $y = \frac{1}{N} \sum_i D_i^2$ будет

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}+1} \sigma^N (\det \vec{M})^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dx \int \exp\left(\frac{ix \sum_{i=1}^N D_i^2}{N} - \frac{1}{2\sigma^2} \vec{D}' \vec{M}^{-1} \vec{D}\right) d\vec{D}. \quad (2.77)$$

Приводя квадратичную форму $\vec{D}' \vec{M}^{-1} \vec{D}$ к диагональному виду и вычисляя интегралы по \bar{D}_i , получим

$$f(y) = \frac{N}{\pi\sigma} \int_0^{\infty} \frac{\cos(xyN - \sum_i \arctg \frac{2x\sigma^2}{\sqrt{\lambda_i^2 + 4x^2\sigma^4} + \lambda_i})}{\prod_i \sqrt{1 + 4\frac{x^2\sigma^4}{\lambda_i^2}}} dx, \quad (2.78)$$

где λ_i - собственные значения матрицы \vec{M}^{-1} . Очевидно, что $\lambda_i = 1/\lambda'_i$, где λ'_i - собственные значения \vec{M} с элементами (см. (1.71))

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(4 - 6 \frac{|i-j|^2}{n^2} + 3 \frac{|i-j|^3}{n^3} \right), & 0 \leq |i-j| \leq n; \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{|i-j|}{n} \right)^3, & n < |i-j| \leq 2n; \\ 0, & |i-j| > 2n. \end{cases} \quad (2.79)$$

Так как собственные значения матрицы \vec{M} различны, интегрирование в (2.78) можно провести только численно. Зная $f(y)$, можно найти и $f(\bar{D}_{KI})$, так как $f(\bar{D}_{KI}) = f(y(\bar{D}_{KI})) \cdot 2\bar{D}_{KI}$, и вычислить τ_1 при различном числе вторых разностей N .

При $N = 1$ из (2.78) и (2.73) получим $\tau_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а при $N \rightarrow \infty$ $\tau_1 = 1$. Иными словами, если длина следов очень велика, оценка \bar{D}_{KI} совпадает с её математическим ожиданием. Если же на каждом следе измерена всего одна вторая разность, то, оценивая \bar{D}_K по формуле (2.73), мы занижим её величину на 25,3%. Таким образом, оценка по формуле (2.73) смещена по отношению к её математическому ожиданию. Это смещение тем больше, чем меньше N (рис. 15).

Аналогичным образом можно исследовать и зависимость смещения оценки (2.74) по отношению к её математическому ожиданию. Расчет показывает, что эта оценка не смещена, т.е. $\tau_2 = 1$ при любом N .

Существует другой более простой способ исследования смещения различных оценок, связанных со вторыми разностями, который позволяет полностью избежать необходимости вывода аналитических выражений функции распределения этих оценок. Суть метода состоит в математическом моделировании большого числа последовательностей вторых разностей \mathcal{D}_i с заданной плотностью распределения, вычислений для каждой последовательности соответствующих оценок и нахождении их средних значений. Описанный метод был применен для изучения смещения оценок (2.73), (2.74), оценок параметра ρ и величины \bar{D}_K по формулам

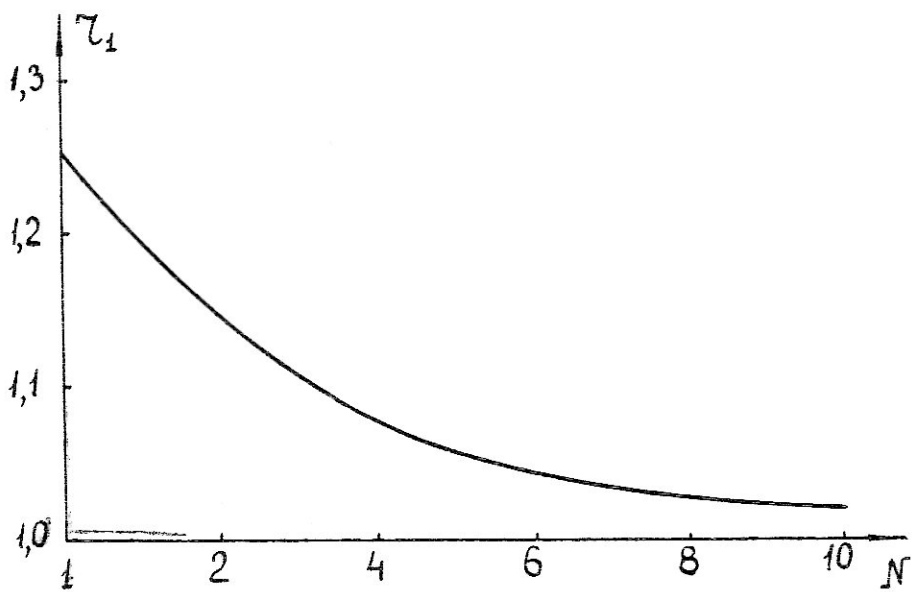


Рис.15. Зависимость τ_1 от числа измеренных вторых разностей N .

$$\rho = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |T_i|}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |D_i|} \quad (2.80)$$

и

$$D_K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |D_i| \sqrt{\frac{\rho_n^2 - \rho^2}{\rho_n^2 - \rho_K^2}}, \quad (2.81)$$

где D_i и T_i - вторые и третьи разности, обусловленные только многократным кулоновским рассеянием, а $\rho_n = 1,72$. Формула (2.81) в этом случае соответствует оценке D_K методом " ρ " для идеализированных следов ($D_K \gg D_L$ и $D_K \gg D_{III}$). Математические ожидания оценок (2.80) и (2.81) очевидно равны $\sqrt{3/2}$ и $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$, а их смещения

$$\tau_3 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\langle \rho \rangle} \quad \text{и} \quad \tau_4 = \frac{\sqrt{2} \sigma}{\sqrt{\pi} \langle D_K \rangle} \quad (2.82)$$

соответственно. Приведенный алгоритм определения средних значений $\langle D_{K1} \rangle$, $\langle D_{K2} \rangle$, $\langle \rho \rangle$ и $\langle D_K \rangle$ был реализован на ЭЦВМ БЭСМ-4. Число моделируемых последовательностей вторых разностей при каждом N превышало 10^5 . Это дает возможность найти τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 с точностью $\sim 0,2\%$. Величина смещения оценки (2.74) $\tau_2 \approx 1$. Значения τ_1 , τ_3 и τ_4 в зависимости от N приведены в таблице I.

Таблица I.

N	τ_1	τ_3	τ_4
2	1,1323	0,9221	0,7472
3	1,0897	0,9385	0,9060
4	1,0679	0,9499	0,9532

Продолжение таблицы

5	1,0545	0,9616	0,9718
6	1,0458	0,9617	0,9938
8	1,0355	0,9702	1,0139
10	1,0287	0,9748	1,0245
12	1,0242	0,9764	1,0272
14	1,0209	0,9785	1,0299
16	1,0188	0,9819	1,0275
20	1,0149	0,9827	1,0266
30	1,0102	0,9865	1,0184
40	1,0080	0,9896	1,0112
60	1,0053	0,9904	1,0079

Следует заметить, что величины ζ_1 , ζ_3 , и ζ_4 , приведенные в таблице, рассчитаны для неперекрывающихся значений вторых разностей D_i , а на рис. 15 приведена зависимость ζ_I от N для полностью перекрывающихся вторых разностей. Однако отличие величин ζ_i в том и другом случаях незначительно.

Как видно из рисунка 16 оценки параметра ρ и D_K по формулам (2.80) и (2.81) смещены по отношению к их математическим ожиданиям.

В работе / 76 / отмечалось несоответствие теоретической величины $\rho_K = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и её экспериментальных оценок в области больших длин ячеек, когда $D_K \gg D_d$ и $D_K \gg D_{ш}$. При больших t , т.е. когда число вторых разностей N было

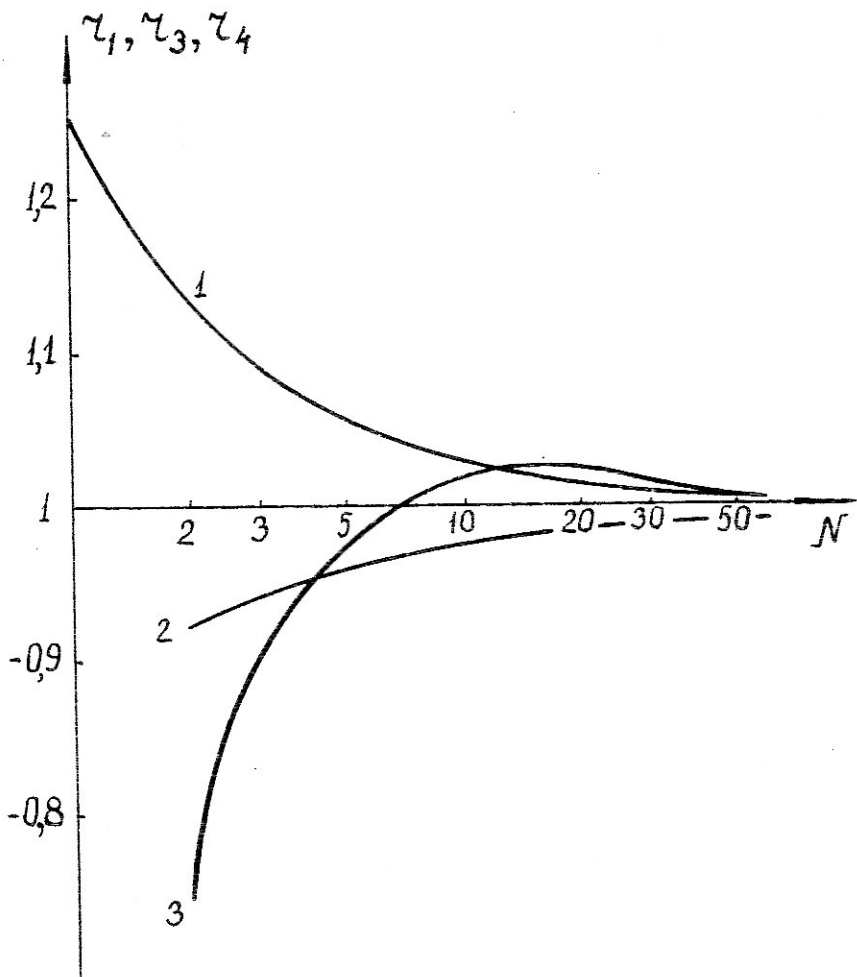


Рис.16. Зависимость τ_1 , τ_3 и τ_4 от N :
 1 - τ_1 , 2 - τ_3 , 3 - τ_4 .

малым, наблюдался рост величин ρ_k , оцениваемых по формуле (2.80). Этот факт объясняется систематическим смещением оценки (2.80) по отношению к её математическому ожиданию. Согласно рис. 16 с увеличением t , т.е. с уменьшением N , оценки ρ_k должны систематически увеличиваться и тем больше, чем меньше N .

Поскольку оценка \bar{D}_k по формуле (2.71) систематически занижена, она должна быть занижена и при оценке \bar{D}_k методом корреляционных моментов. Это вполне согласуется с отмеченным в § 5 этой главы фактом некоторого превышения $\langle \rho_{\beta c} \rangle$ над её истинным значением, так как $\rho_{\beta c} \sim 1/D_k$. Согласно рис. 15 это превышение при $t = 4 \div 6$ мм ($N \approx 10$) должно быть порядка 3%. Экспериментальное же значение превышения $\sim 7 \pm 5\%$, что в пределах ошибок согласуется с расчетной величиной.

Г Л А В А Ш

СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО
РАССЕЯНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ§ 1.0 расхождении теоретических и
экспериментальных значений посто-
янной многократного кулоновского
рассеяния

Во многих работах / 33, 76-84 / авторы которых использо-
вали самые различные методы определения постоянной рассеяния
 K , указывалось на расхождение экспериментальных и теоретичес-
ких значений величины K при длинах ячеек $t > 1$ см.

Наблюдалось систематическое занижение оценок K по отно-
шению к расчётным, которое увеличивалось с ростом t и
доходило до $15 + 50$ %. Впервые такое расхождение было от-
мечено в работе / 77 /.

Для экспериментаторов очень важно знать правильные
значения постоянной рассеяния, чтобы исключить системати-
ческие ошибки в определении импульсов заряженных частиц.
Вопрос о расхождении теоретических и экспериментальных
значений K исследуется уже на протяжении 10 лет, но до
сих пор не был решён в полной мере.

Величину K обычно оценивают, измеряя многократное рас-
сеяние на следах заряженных частиц с известной энергией
по формуле

$$\tilde{K} = \frac{573 \rho_{\text{вс}} \cdot D_K}{t^{3/2}} \quad (3.1)$$

При оценке D_K необходимо правильно исключить шумы, дисторсии и ложное рассеяние. В работе / 55 / показано, что следы частиц, расположенные друг от друга на расстоянии не более 50 мк в плоскости эмульсии и не более 20 мк по глубине, испытывают практически одинаковые искажения как за счет дисторсии, так и за счет ложного рассеяния. Поэтому, для экспериментального определения K , как правило, используется метод относительного рассеяния, поскольку относительная вторая разность $D_{12i} = D_{1i} - D_{2i}$ складывается в этом случае практически только из вторых разностей кулоновского рассеяния каждой частицы и шумов, которые могут быть легко исключены. Иногда используются и измерения, выполненные на отдельных следах, но значения K можно достоверно оценить при этом лишь на больших ячейках t , когда кулоновское рассеяние превышает все искажения.

Так как в большинстве работ для определения K использовались разные по составу эмульсии, облученные на пучках частиц различной природы и энергии, сопоставить результаты и сделать выводы о причине расхождений было затруднительно. Поэтому, в работе / 78 / используется стопка эмульсии *Ilford G-5*, облученная протонами с энергиями 5,8, 12 и 24 ГэВ, и стопка эмульсии *Kodak NTB-4*, облученная π -мезонами с энергией 5 ГэВ. Протонный пучок с

энергией 5 Гэв содержал примесь μ -мезонов. Величина D_K оценивалась методом относительного рассеяния. Максимальное расхождение пар следов частиц в плоскости эмульсии не превышало 150 мк, а по глубине 50 мк. Несмотря на то, что такие расстояния между следами не позволяли полностью исключить дисторсии и ложное рассеяние, в этой работе отмечено систематическое занижение оценок K в области больших длин ячеек, которое не зависит ни от энергии ни от природы частиц (рисунок 17).

В работе / 79 / высказывалось предположение о некоторой неточности теории многократного кулоновского рассеяния. В связи с этим предпринималась попытка исправления теории. В работе / 80/ был использован несколько видоизмененный по сравнению с / 32/ способ учета конечных размеров ядер для расчета K . Однако, эту попытку исправления теории нельзя считать удачной, так как, получив удовлетворительное согласие величин K при $t \approx 1$ см, авторы не дают объяснение получающемуся расхождению в области малых длин ячеек, т.е. в области, в которой практически все известные оценки K хорошо согласуются с расчетами Воиновика и Пикапа /32 /. Кроме того, величина K , рассчитанная в этой работе, систематически растет с ростом t , в то время как эксперимент дает систематическое уменьшение K при $t > 1$ см.

Высказывались предположения и о возможных методических ошибках определения K при больших t . Наибольшую ценность представляет работа / 81/, в которой показано,

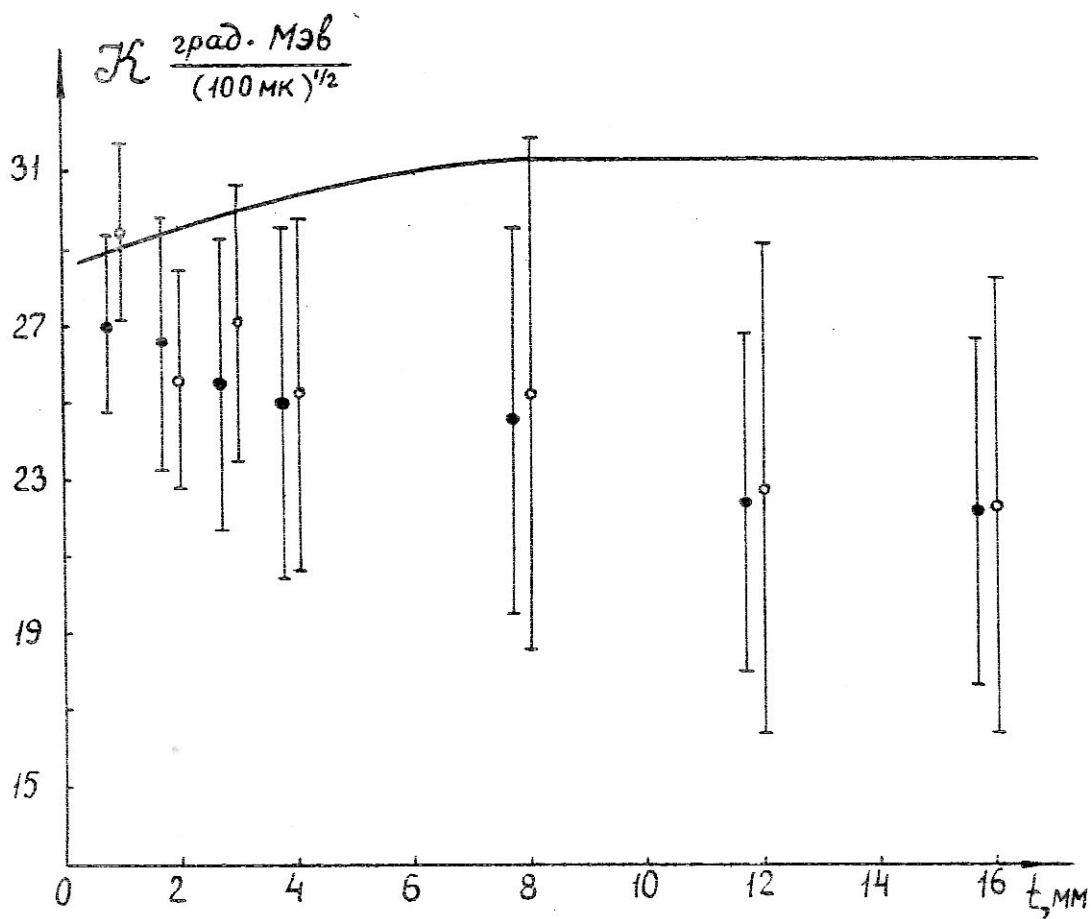


Рис. I7. Зависимость K от t : линия - расчет по формуле (I.52), точки - эксперимент [78] .

что ограничения на поперечное рассеяние частиц в плоскости эмульсии, связанные с конечным размером поля зрения микроскопа, приводят к занижению оценок \mathcal{K} при больших t . В этой работе приводится приближенный способ учета таких ограничений. Однако, несмотря на то, что авторы работ / 30, 33 / учитывали этот эффект, они получали расхождение при больших t порядка $15 \pm 25 \%$.

Фихтель и Фридендер / 85 / рассчитали изменение величины \mathcal{K} , которое возникает, если относительная влажность (ОВ) стопки эмульсии во время экспозиции отклоняется от стандартной величины $ОВ = 61\%$, принятой для расчета \mathcal{K} . Они нашли, что $\delta\mathcal{K} = \pm 4\%$, если относительная влажность меняется в пределах $5 \pm 87 \%$.

Поскольку расхождение экспериментальных и теоретически вычисленных значений постоянной рассеяния \mathcal{K} не зависит от природы и энергии частиц, слабо зависит от относительной влажности эмульсии во время экспозиции и почти не зависит от других факторов (например, влияния рассеяния на атомных электронах), а угловые распределения рассеянных частиц хорошо согласуются с теорией / 86, 87/, естественно все же искать причины этого расхождения в методике определения \mathcal{K} при больших t .

§ 2. Причины занижения экспериментальных оценок постоянной многократного кулоновского рассеяния

Представляет интерес проанализировать две причины, которые могут привести к занижению оценок постоянной \mathcal{K} при

больших t : малый объем выборки, дающий смещенные значения некоторых величин, используемых при вычислении \mathcal{K} ; и ограничения на поперечное рассеяние частиц, накладываемые конечным размером поля зрения микроскопа и фиксированной толщиной эмульсионного слоя.

Как показано в § 5 гл. II, оценка среднеквадратического значения вторых разностей по формуле

$$\mathcal{D}_{K1} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^2 \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

систематически смещена по отношению к её математическому ожиданию $\sigma = \langle \mathcal{D}_i^2 \rangle^{1/2}$.

Поскольку при экспериментальном определении постоянной рассеяния на больших ячейках t число вторых разностей N мало, то использование формулы (3.2) приведет в этом случае к занижению \mathcal{D}_K , а следовательно и \mathcal{K} . При $N = 1$ это занижение составляет $\sim 25,3\%$. Правильное значение \mathcal{D}_K в этом случае можно получить по формуле

$$\mathcal{D}_K = \alpha_1 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^2 \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

где α_1 — величина, характеризующая смещение оценки (3.2) (см. таблицу I). Этот эффект проявился, например, в работах / 83, 84 /, авторы которых оценивали \mathcal{D}_K по формуле (3.2), а не (3.3).

Можно избежать смещения оценок \mathcal{K} за счет малого объема выборки, если для вычисления \mathcal{D}_K пользоваться не среднеквадратическими, а среднеарифметически-

ми значениями вторых разностей

$$D_{K2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |D_i|, \quad (3.4)$$

которые не смещены по отношению к их математическому ожиданию, равному $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$. В этом случае, однако, так же как и при использовании (3.2), оценки \mathcal{H} будут занижены из-за ограничений на поперечное рассеяние частиц.

В работе / 8I/, в предположении нормального распределения ординат y_i рассеянных частиц, вычислены вероятности P того, что частица заданной энергии, пройдя слой эмульсии толщиной x , будет иметь поперечное смещение $y_i(x) < d/2$, где d - диаметр поля зрения микроскопа. Если из всех возможных реализаций рассеяния выбрать только такие следы, для которых $y_i(x) < d/2$, и если энергия частиц и d таковы, что $P < 1$, то очевидно, что оценивая многократное рассеяние на этих следах, мы занижим величину D_K , а следовательно и \mathcal{H} . В работе / 8I/ приводится эмпирическая формула, устанавливающая связь занижения величины \mathcal{H} , определенной на заданной длине следа $L = 5\text{см}$, с вероятностью P .

Величину занижения \mathcal{H} при известном d можно оценить точнее, не накладывая ограничений на функцию распределения ординат y_i . Естественно, что для решения этой задачи, необходимо исходить из совместной

плотности распределения рассеянных частиц, прошедших слой вещества толщиной t , по поперечным смещениям y и углам θ , которая в первом приближении может быть представлена в виде (1.23).

$$f(t, y, \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi \Theta_s^2 t^2} \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2} \left(\frac{\theta^2}{t} - \frac{3y\theta}{t^2} + \frac{3y^2}{t^3} \right) \right], \quad (3.5)$$

где $\Theta_s^2 = 2\langle \theta^2 \rangle$ — средний квадрат пространственного угла при однократном рассеянии. Плотность распределения рассеянных частиц по углам θ , когда на величину поперечного смещения наложено ограничение $-d/2 \leq y \leq d/2$, будет

$$f(t, \theta, d) = \int_{-d/2}^{d/2} f(t, y, \theta) dy. \quad (3.6)$$

Подставляя в это выражение плотность распределения (3.4) и интегрируя по y , получим

$$f(t, \theta, d) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \Theta_s \sqrt{t}} \exp \left(-\frac{\theta^2}{\Theta_s^2 t} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}\theta}{\Theta_s \sqrt{t}} + \frac{d\sqrt{3}}{\Theta_s t^{3/2}} \right) + \operatorname{erf} \left(-\frac{\sqrt{3}\theta}{\Theta_s \sqrt{t}} + \frac{d\sqrt{3}}{\Theta_s t^{3/2}} \right) \right]. \quad (3.7)$$

При $d \rightarrow \infty$, выражение (3.7) переходит в гауссово распределение $Q(t, \theta)$, представляющее угловое распределение безотносительно к боковому смещению (см. (1.22)). Если же величина d ограничена, то распределение (3.7) может существенно отличаться от нормального, используемого в работе / 81 /.

Среднеарифметическая величина и средний квадрат угла θ при условии $-d/2 \leq y \leq d/2$, очевидно будут

$$\langle |\theta| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| f(\theta, t, d) d\theta \quad \text{и} \quad (3.8)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 f(t, \theta, d) d\theta.$$

(3.9)

Подставляя в (3.8) и (3.9) функцию распределения (3.7) и интегрируя, получим

$$\langle |\theta| \rangle = \frac{\Theta_s \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3} d}{\Theta_s t^{3/2}} \right) - \frac{\sqrt{3} \Theta_s \sqrt{t}}{2 \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{3d^2}{4\Theta_s^2 t^3} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{3d}{2\Theta_s t^{3/2}} \right), \quad (3.10)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} \Theta_s^2 t \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3} d}{2\Theta_s t^{3/2}} \right) - \frac{3\sqrt{3} \Theta_s d}{8\sqrt{\pi} t^{1/2}} \exp \left(-\frac{3d^2}{4\Theta_s^2 t^3} \right). \quad (3.11)$$

Средний квадрат второй разности для многократного кулоновского рассеяния связан со средним квадратом угла θ соотношением (1.35).

Используя (1.35), (3.10) и (3.11), получим

$$R_1 = \frac{D_{K2}}{\langle |D_{K0}| \rangle} = \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2} d}{\sqrt{\pi} \langle |D_{K0}| \rangle} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \exp \left(-\frac{d^2}{2\pi \langle |D_{K0}| \rangle^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3} d}{\sqrt{2\pi} \langle |D_{K0}| \rangle} \right), \quad (3.12)$$

$$R_2 = \frac{D_{K1}}{\langle D_{K0}^2 \rangle^{1/2}} = \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d}{2 \langle D_{K0}^2 \rangle^{1/2}} \right) - \frac{3d}{4\sqrt{\pi} \langle D_{K0}^2 \rangle^{1/2}} \exp \left(-\frac{d^2}{4 \langle D_{K0}^2 \rangle} \right) \right]^{1/2}, \quad (3.13)$$

где $\langle |D_{K0}| \rangle$ — среднее арифметическое, а $\langle D_{K0}^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратическое значения D_{Ki} при $d = \infty$. Согласно (3.12) и (3.13) при $d \rightarrow \infty$ $R_1 = R_2 = 1$, а оценки D_K по формулам (3.2) и (3.3), если конечно число вторых разностей N велико, не смещены. При малых d отношения R_1 и R_2 становятся меньше единицы, что ведет к занижению величин D_{K1} и D_{K2} , а следовательно и

постоянной рассеяния \mathcal{K} (рис. 13). Следует заметить, что под величиной d в формулах (3.12) и (3.13) подразумеваются ограничения на поперечное рассеяние частиц, прошедших слой вещества толщиной t . Эти формулы позволяют, таким образом, в отличие от работы / 81/, оценивать R_1 и R_2 для любой длины ячейки t .

Все сказанное выше в равной мере относится и к ограничениям на рассеяние, накладываемым фиксированной толщиной эмульсионного слоя, т.к. распределение рассеянных частиц в плоскости, перпендикулярной движению потока, изотропно.

§ 3. Экспериментальное определение постоянной рассеяния \mathcal{K} на следах π^- -мезонов с энергией 60 Гэв.

Для оценки постоянной рассеяния \mathcal{K} использовались слои эмульсии типа НИИХИМФОТО БР-2, толщиной 600 мк, облученные π^- -мезонами с энергией 60 ± 1 Гэв на ускорителе в г. Серпухове / 88/. На 100 парах и 14 тройках близлежащих следов первичных частиц было измерено многократное относительное рассеяние. Длина каждого следа $L = 5$ см. Измерения рассеяния проводились на ос-

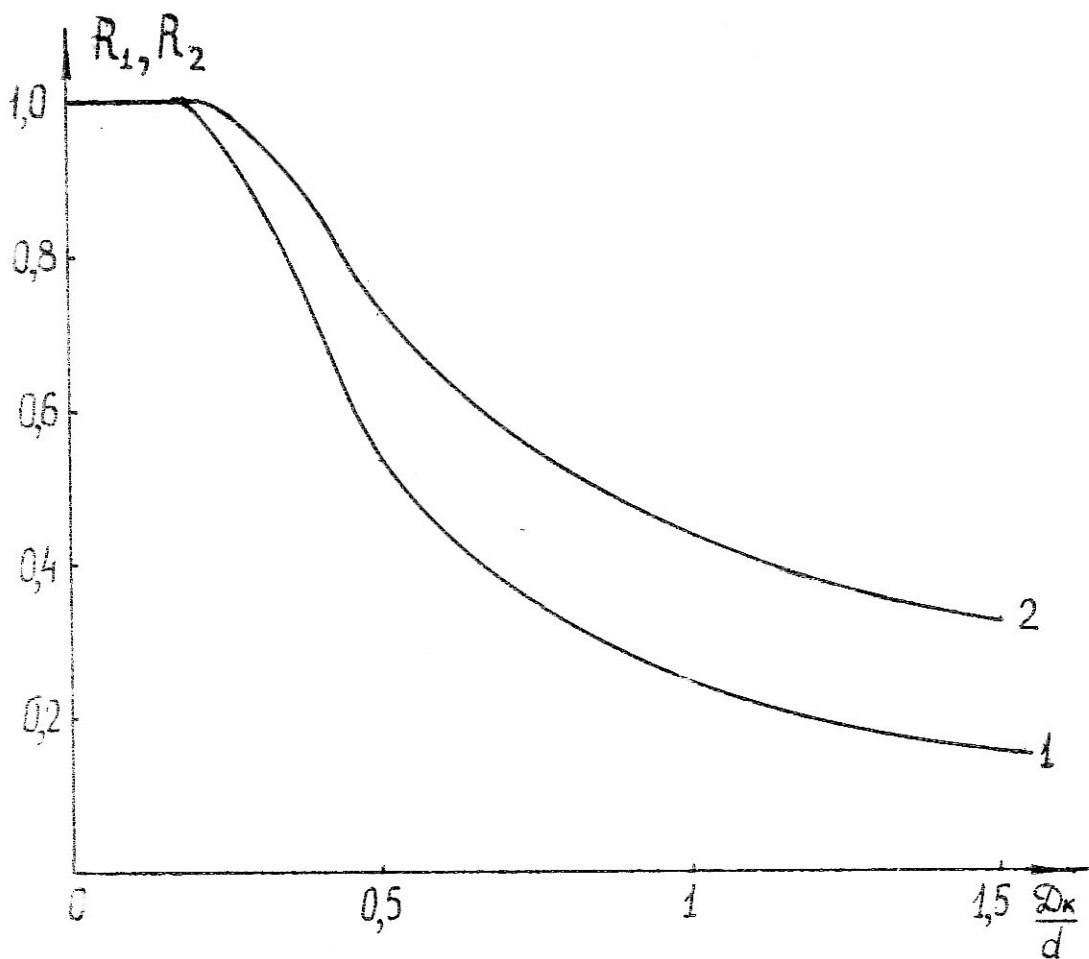


Рис. 18. Зависимость коэффициентов смещения R_1 и R_2 от отношения $\frac{D_k}{t}$: 1 - R_1 , 2 - R_2 .

новной ячейке $t_0 = 500$ мк на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2. Вторые разности рассчитывались затем для ячеек $t = 2, 4, 6, 8, 10, 13, 16$ и 20 мм с использованием полного перекрывания. Максимальное расхождение пар и троек следов в плоскости эмульсии не превышало 80 мк, а по глубине 35 мк. Такое расстояние между парами следов при энергии 60 Гэв практически не накладывает ограничений на поперечное рассеяние вплоть до ячеек $t \approx 50$ см. Величина D_K для каждой пары следов на ячейках $t = 2 + 20$ мм оценивалась методом относительного рассеяния по формуле (см. (2.18))

$$D_{Kj} = \left(\langle {}^n D_{Ki}^2 \rangle \right)^{1/2} = \left[\frac{2 \langle {}^n D_{12i} {}^n D_{12(i+1)} \rangle}{{}^n g(t)} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

где ${}^n D_{12i} = {}^n D_{1i} - {}^n D_{2i}$ - измеренные относительные вторые разности, ${}^n g(t) = 4 - 6/n^2 + 3/n^3$, а n - степень перекрывания (при $t = 2$ мм $n = 4$, при $t = 4$ мм $n = 8$ и т.д.). Формула (3.14) имеет преимущество перед всеми другими способами оценки D_K , т.к. она автоматически исключает шумы, для которых $\langle {}^n D_{12i} {}^n D_{12(i+1)} \rangle = 0$ (см. (1.73)). При малом числе вторых разностей N оценки D_{Kj} систематически смещены по отношению к их математическим ожиданиям. Этот эффект можно учесть умножая каждое значение D_{Kj} на коэффициент α_1 (§ 5 главы II) и после этого вычисляя среднее значение $D_K = \frac{\alpha_1}{m} \sum_{j=1}^m D_{Kj}$, где m - число пар следов, или же вычислить D_K по формуле

$$D_K = \sqrt{\frac{1}{mN} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^N {}^n D_{Ki}^2 \right)_j}. \quad) 3.15)$$

Эта формула, разумеется, справедлива лишь в том случае, если все следы одинаковой длины, число вторых разностей $Nm \gg 100$ (соответственно $\alpha_1 \approx 0,996$), а D_{kj} -выборки из одной и той же генеральной совокупности. Последнее условие для наших экспериментальных данных проверялось по G - критерию Коचना равенства выборочных дисперсий / 89 /. Согласно экспериментальным данным, гипотезу равенства величин $(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N D_{kj}^2)$, ($j = 1, 2 \dots 100$) можно принять с уровнем значимости $Q \approx 1\%$. Этот результат естественен, так как многократное рассеяние измерено на следах частиц одной и той же энергии.

Поскольку формула (3.14) не позволяет оценить многократное рассеяние для следов длиной 5 см на ячейках $t > 2,5$ см (в этом случае невозможно вычислить вторые разности) и так как на этих ячейках $D_K \gg D_{ш}$, то при $t = 3,2$ и $4,8$ см и для сравнения с другими способами при $t = 1,6$ см величина D_K находилась по формуле

$$D_K = \sqrt{\frac{1}{mN} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N y_{12ij}^2}, \quad (3.16)$$

где y_{12ij} - относительная величина непосредственно измеренных ординат. При вычислении y_{12ij} учитывался начальный угол θ_0 расхождения пар следов, который определялся по 5 начальным измерениям y_i (на длине $l = 2$ мм) проведением прямых линий методом наименьших квадратов. Несмотря на то, что ошибка, вносимая в величины y_{12ij} неточностью определения θ_0 , обусловленной

вкладом многократного кулоновского рассеяния и шумами, сравнительно велика (при $t = 1,6$ мм $\sigma_{y_{12ij}} \approx 0,42 \langle y_K^2 \rangle^{1/2}$, при $t = 3,2$ см $\sigma_{y_{12ij}} \approx 0,32 \langle y_K^2 \rangle^{1/2}$ и при $t = 4,8$ см $\sigma_{y_{12ij}} \approx 0,26 \langle y_K^2 \rangle^{1/2}$), все же имеет смысл оценить величины \bar{D}_K на этих ячейках по непосредственно измеренным ординатам.

Для троек близлежащих следов величину \bar{D}_K можно найти отдельно для каждого трека, измеряя относительное рассеяние для всех пар следов из этой тройки, по формулам - / 90 /.

$$\begin{aligned} D_{1K} &= 2^{-1/2} (\langle D_{12K}^2 \rangle + \langle D_{13K}^2 \rangle - \langle D_{23K}^2 \rangle)^{1/2}, \\ D_{2K} &= 2^{-1/2} (\langle D_{12K}^2 \rangle + \langle D_{23K}^2 \rangle - \langle D_{13K}^2 \rangle)^{1/2}, \\ D_{3K} &= 2^{-1/2} (\langle D_{23K}^2 \rangle + \langle D_{13K}^2 \rangle - \langle D_{12K}^2 \rangle)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где D_{12K} , D_{13K} и D_{23K} - относительные вторые разности 1 и 2 следа, 1 и 3 следа и 2 и 3 следа соответственно. Величины D_{ijk} в этих соотношениях оценивались согласно (3.14) для ячеек $t = 2, 4, 8, 13$ и 20 мм.

Экспериментальные оценки D_K , полученные по формулам (3.15 - 3.17), приведены на рис. 19.

Как видно из этого рисунка, значения \bar{D}_K , оцененные описанными выше способами, в пределах экспериментальных ошибок совпадают с величинами, вычисленными по формуле

$$D_K = \langle D_K^2 \rangle^{1/2} = \frac{\mathcal{K} t^{3/2} \sqrt{\pi}}{573 \sqrt{2} \rho v c} \quad (3.18)$$

Постоянная рассеяния \mathcal{K} в (3.18) находилась из

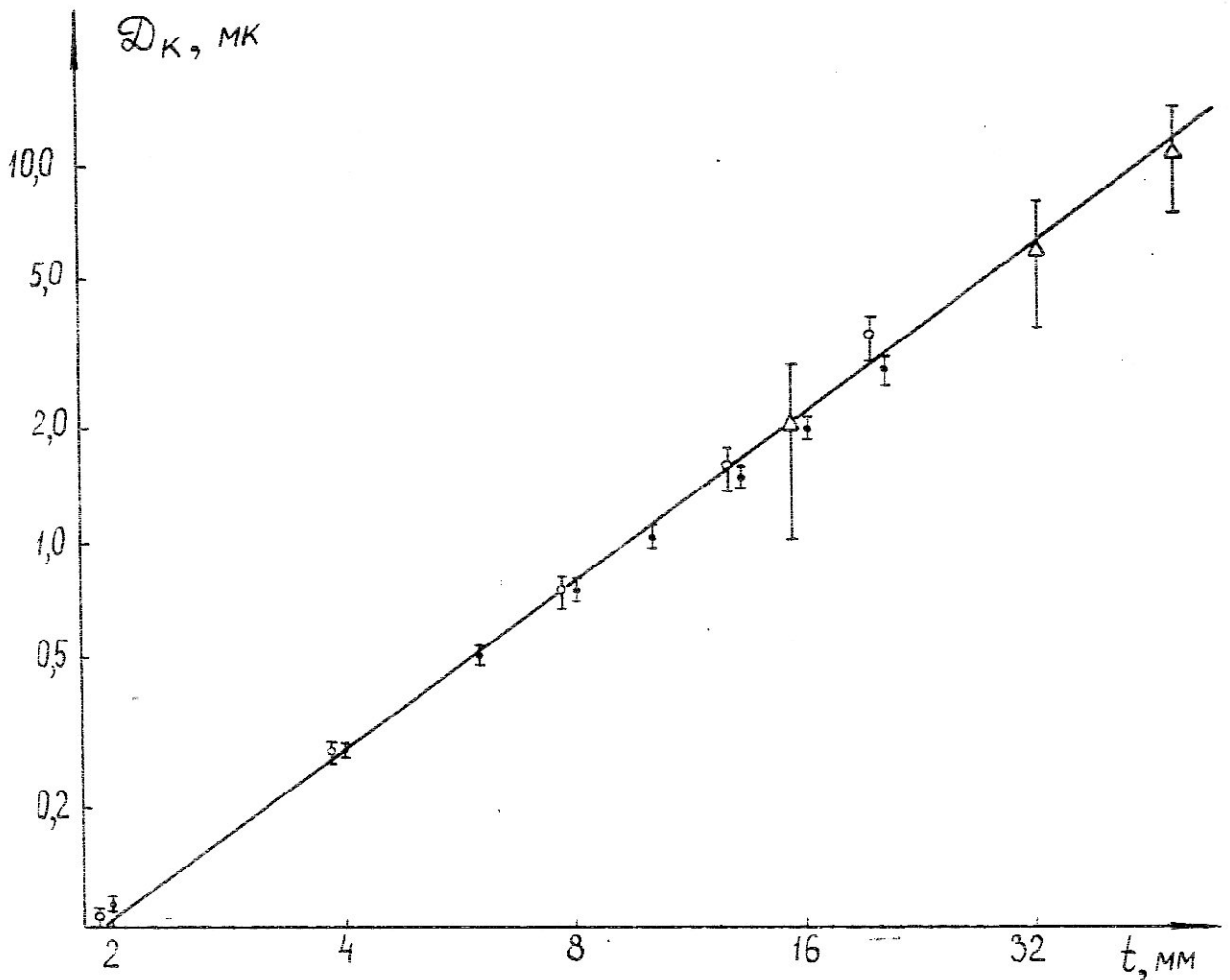


Рис.19. Зависимость D_K от t для π^- -мезонов с энергией 60 Гэв. Линия - расчет с использованием (1.52); точки - экспериментальные значения D_K , найденные по формулам: • - (3.14), Δ - (3.16) и \circ - (3.17).

выражения (1.52), полученного Воиводиком и Пикап / 32/.

Поскольку расхождения теоретически вычисленных и экспериментальных значений \mathcal{D}_K не наблюдается, представляет интерес искусственно наложить ограничения на поперечное рассеяние следов и об"ем выборки с целью проверки расчетов, приведенных в §§ 2 и 5 этой главы.

Для исследования влияния об"ема выборки на величины \mathcal{D}_K , для каждой пары следов находились

$$\mathcal{D}_{Kj} = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{12i}^2\right)_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, 100), \quad (3.19)$$

которые затем усреднялись по формуле

$$\mathcal{D}_{K1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathcal{D}_{Kj} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{12i}^2\right)_j}. \quad (3.20)$$

Очевидно, что эта оценка должна быть смещена по отношению к

$$\mathcal{D}_K = \sqrt{\frac{1}{mN} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{12i}^2\right)_j}, \quad (3.21)$$

причем,

$$\frac{\mathcal{D}_K}{\mathcal{D}_{K1}} \approx \chi_1. \quad (3.22)$$

На рисунке 20 в зависимости от длины ячейки t приведены величины χ_1 , оцененные по формуле (3.22) и вычисленные согласно (2.75) с учетом функции распределения (2.78). Из рисунка видно, что экспериментальные и рассчитанные значения χ_1 хорошо согласуются между собой.

Изучение влияния ограничений на поперечное смещение проводилось так. Все пары следов были разбиты на пять групп,

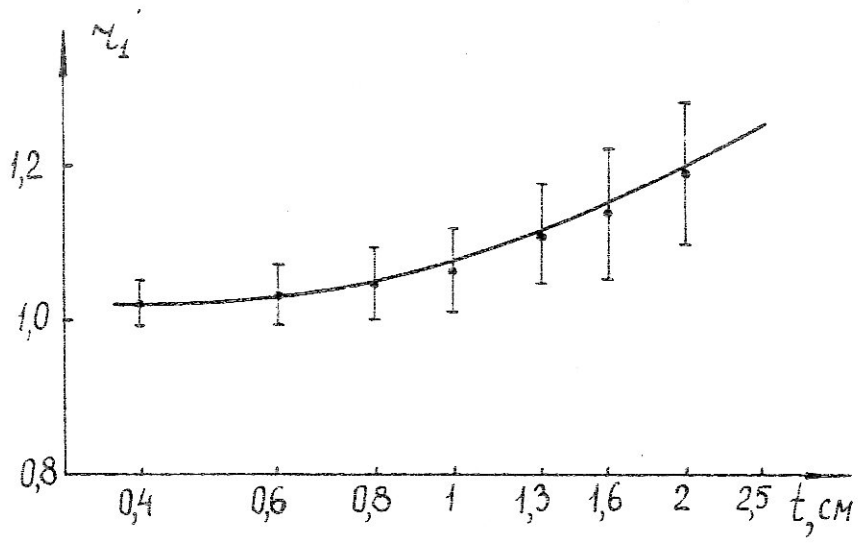


Рис.20. Зависимость ν_1 от t : линия - расчет, точки - эксперимент.

в которых максимальное расхождение следов в плоскости эмульсии Δy_{max} не превышало 10, 20, 30, 40 и 80 мк. Для каждой группы оценивались величины \mathcal{D}_{K1} по формуле (3.20) и определялись параметры ограничения d , которые очевидно не равны Δy_{max} , так как $\Delta y_{max} = \Delta y_0 + \theta_0 t + \Delta y$, где Δy_0 - начальное расстояние между следами, входящими в слой эмульсии толщиной t , θ_0 - начальный угол между ними, а $\Delta y = y_{12ij}$ - относительная величина измеренных ординат, обусловленная многократным рассеянием. Величина d равна максимальному значению Δy , определенному для всех отрезков следа длиной t и всех пар следов данной группы. На рисунке 2I в зависимости от Δy_{max} приведены \mathcal{D}_{K1} , полученные из эксперимента, и значения \mathcal{D}_{K1} , вычисленные по формуле (3.13). Как видно из рисунка, в пределах экспериментальных ошибок эти величины совпадают, что подтверждает справедливость формулы (3.13).

Заметим, что отношение d/\mathcal{D}_K увеличивается с уменьшением длины ячейки t , в силу чего оценки смещений \mathcal{D}_K (3.12) и (3.13) при $t \rightarrow 0$ стремятся к единице. Измерения многократного рассеяния на следах вторичных частиц, как правило, производятся на таких ячейках, где d/\mathcal{D}_K очень велико и поэтому при оценке \mathcal{D}_K можно пренебречь смещениями R_1 и R_2 . Иными словами, ограничения на поперечное рассеяние частиц сказываются лишь при экспериментальном определении постоянной рассеяния \mathcal{K} на очень больших ячейках t и практически не влияют на измерения ρ/ρ^c вторичных частиц.

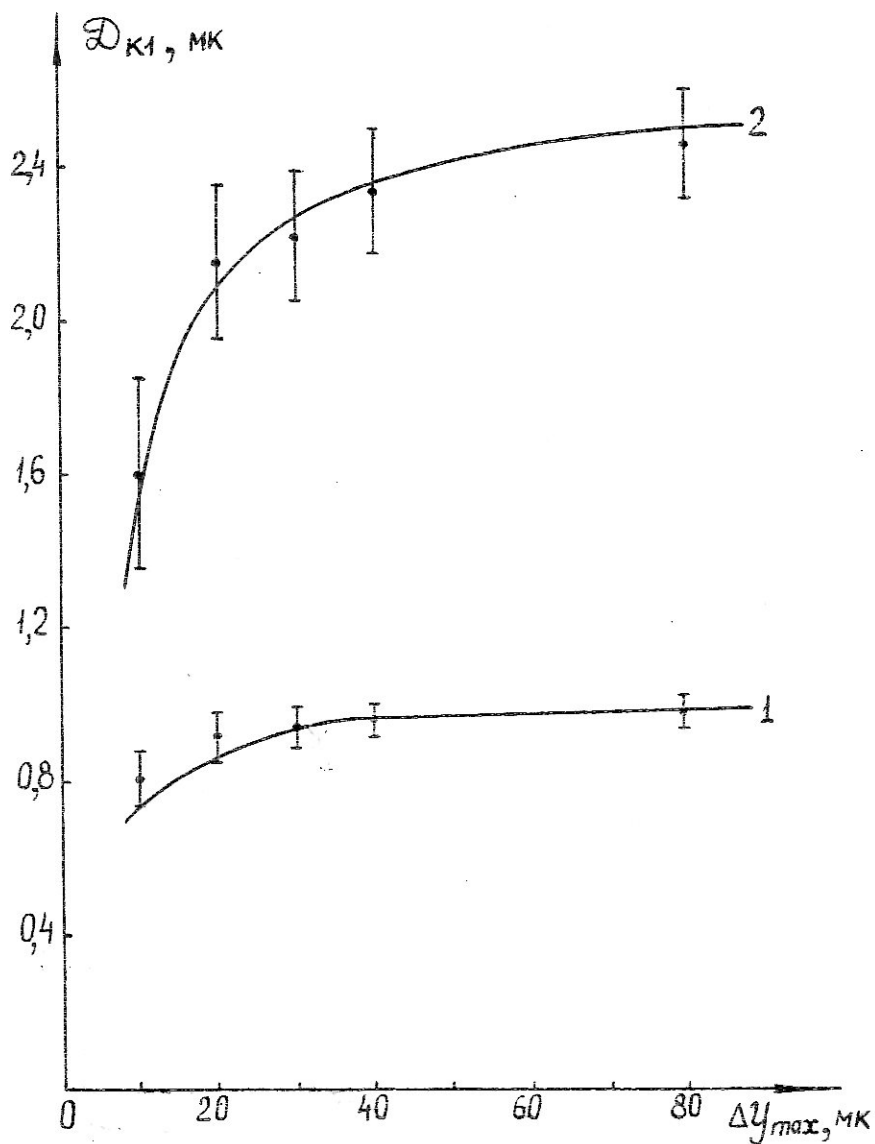


Рис.21. Зависимость D_{K1} от Δy_{max} : 1 - $t = 8$ мм, 2 - $t = 16$ мм.

§ 4. Сравнение полученных экспериментальных результатов с данными других работ.

Согласно приведенным в предыдущем параграфе данным, полученным при энергии 60 Гэв, расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями постоянной рассеяния \mathcal{K} не наблюдается вплоть до ячеек $l = 4,8$ см. В связи с этим представляет интерес выяснить, не накладывались ли ограничения на объем выборки и поперечное рассеяние в работах / 33, 76, 77, 79, 82-84/, авторы которых указывали на наличие расхождений теории и эксперимента при больших l .

В работе / 77 / на следах π^- -мезонов с импульсом 16,2 Гэв/с и протонов с импульсом 24 Гэв/с измерялось индивидуальное многократное рассеяние. Длина следов составляла 10 см. Как указывают сами авторы, треки прослеживались так, чтобы они не выходили за пределы измерительной шкалы (50 мк) на всей длине следа. Поскольку в этой работе используются среднеарифметические величины вторых разностей, то значения \mathcal{D}_K могут быть занижены только за счет ограничений на поперечное рассеяние. На ячейке 2,4 см. величины \mathcal{D}_K для частиц с импульсом 16,2 и 24 Гэв/с занижены приблизительно на 30 и 40% соответственно. Поскольку рассеяние следов было ограничено измерительной шкалой (50 мк) то, в предположении, что треки имеют С-образную форму, для $l = 5$ см величина $d \approx 50$ мк. На этой ячейке для частиц с импульсом 16,2 и 24 Гэв/с $\mathcal{D}_K/d \approx 0,75$ и $0,51$, что согласно рисунка

18 приведет к занижению \mathcal{D}_K на 66 и 48 % соответственно. Эти величины не находятся в противоречии с данными при $t = 2,4$ см, так как на этой ячейке отношения $\frac{\mathcal{D}_K}{d}$, а так же расхождения величин \mathcal{D}_K уменьшается. Провести более детальный расчет этого расхождения на ячейках, использованных в работе /77/, невозможно из-за отсутствия первичного материала. Однако, даже такая грубая прикидка показывает, что в этой работе расхождение экспериментальных и теоретических значений может быть объяснено ограничениями, наложенными на поперечное рассеяние. То же самое можно сказать и о работах / 76,79,82 /, в которых для измерения многократного рассеяния использовалась такая же методика, как и в работе / 77 /. Первичный материал, полученный И.Я.Часниковым и др./76/, который был любезно предоставлен нам для анализа, позволил определить величины d для всех ячеек t , вычислить смещения оценок \mathcal{D}_K из-за ограниченного размера поля зрения микроскопа и сравнить их с экспериментальными данными. В работе / 76 / измерение многократного рассеяния выполнено на следах протонов с импульсами 1,04 и 2,6 Гэв/с. Значения \mathcal{D}_K определялись по формуле (3.4). Прослеженные следы на всей длине хода столика не выходили за пределы поля зрения микроскопа, диаметр которого был ~ 70 мк. Если поперечное рассеяние следов частиц ограничено полем зрения микроскопа на полной измеренной длине, то очевидно, что будут соответствующие ограничения и на меньших длинах t . По непосредственно измеренным орди-

натам y_i , с учетом начальных углов θ_0 вхождения частиц в слой эмульсии толщиной t , нами оценивались величины $y_{ik}(t) = y_i(2t) - y_i(t) - \theta_0 t$, обусловленные только многократным рассеянием. Величина ограничения для любой ячейки t очевидно равна $d(t) = \max\{y_{ik}(t)\}$.

На рис.22 приведены экспериментальные значения D_k , полученные в работе /76/, и значения D_k , исправленные по формуле (3.12) с учетом найденных нами $d(t)$. Из рисунка видно, что исправленные значения D_k и значения, рассчитанные теоретически, практически совпадают. Таким образом, занижения D_k , которые согласно рис.22 равны $\sim 50\%$ для частиц с $p_{\text{вс}} = 1,04$ Гэв на ячейке 4 мм и $\sim 27\%$ для частиц с $p_{\text{вс}} = 2,6$ Гэв на ячейке 1 см, объясняются ограничениями на поперечное рассеяние частиц.

В работе /33/ на парах следов π^- - мезонов с импульсом 17,2 Гэв/с было измерено многократное относительное рассеяние. Длина треков составляла 8 см. На максимальное расхождение следов в плоскости эмульсии ограничения не накладывались, но по глубине это расхождение не превышало 100 мк. Постоянная рассеяния \mathcal{K} оценивалась по среднеарифметическим значениям вторых разностей для ячеек $t \leq 4$ см и по среднеарифметическим величинам непосредственно измеренных ординат для $t = 4, 6, 8$ см. Экспериментальная величина \mathcal{K} при $t = 8$ см приблизительно на 25% меньше ее значения, рассчитанного согласно /32/. Если распределение по углам для отобранных пар следов частиц в плоскости, перпендикулярной направлению движения первичного потока, было бы изотропным, то наличие ограничений на рас-

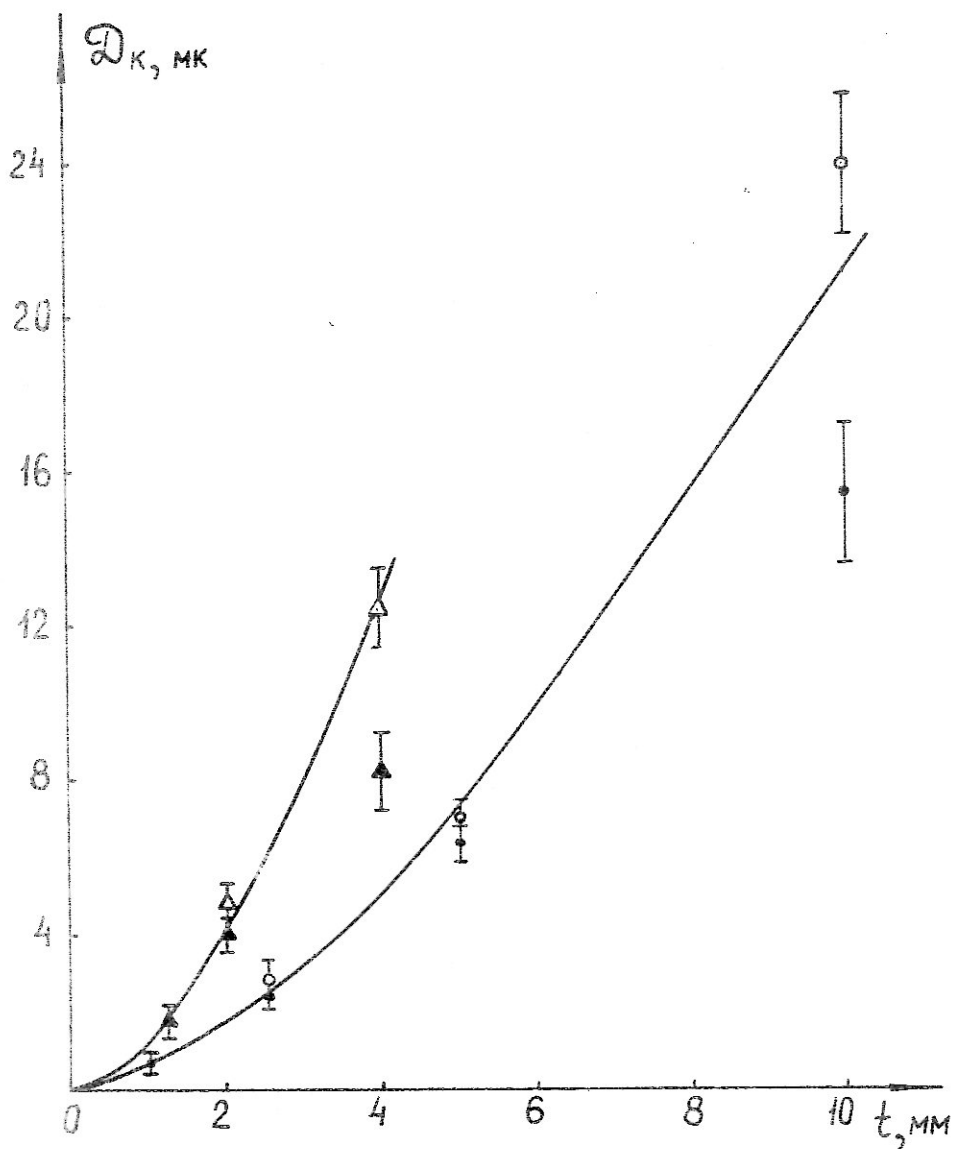


Рис.22. Зависимость D_K от t для следов частиц с $p\beta c = 1,04$ и $2,6$ Гэв: Δ и \circ - значения D_K , исправленные согласно формуле (3.12).

сеяние по глубине (100 мк) привело бы к занижению постоянной рассеяния для $t = 8\text{ см}$ на 40%. Можно предположить, что это распределение для материала, использованного в работе / 33 /, было более широким в горизонтальной плоскости, т.к. авторы не накладывали ограничений на рассеяние в этой плоскости. Наличие существенной выборки по глубине не могло не отразиться на рассеянии следов в плоскости эмульсии, но величина d в этом случае должна быть больше максимального ограничения по глубине, а расхождение теории и эксперимента соответственно меньше. Учитывая вышесказанное и то, что выбранные расстояния между парами следов ^{видимому} не позволяли полностью исключить ложное рассеяние и дисторсии можно заключить, что расхождение величин K , полученное в работе / 33 /, объясняется не вполне корректным учетом ограничений на поперечное смещение и неполным исключением некулоновской части рассеяния.

В работах / 83,84 /, в отличие от рассмотренных выше, на экспериментальные оценки D_K оказало существенное влияние наличие ограничений на объем выборки, т.к. авторы этих работ оценивали D_K не по среднеарифметическим, а по среднеквадратическим величинам вторых разностей. В работе / 83/ было выполнено измерение многократного относительного рассеяния на следах π^- - мезонов с энергией 60 Гэв. Выбирались пары следов, длиной $4 + 6\text{ см.}$, расходящиеся в плоскости эмульсии не более чем на 20 мк, а по глубине - не более чем на 10 мк. Величины D_K оценивались по формуле

$$D_K^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^{N-1} n D_{12ij} n D_{12(i+1)j}}{(N-1)^n g(1)}},$$

(3.23)

где m - число измеренных пар следов. Поскольку степень перекрывания n для больших ячеек велика (при $t = 20\text{мм}$ $n = 20$), то при $t \geq 8\text{мм}$ ${}^n g(1) = 4 - 6/n^2 + 3/n^3 \approx 4$, оценка D_K по формуле (3.23) приблизительно эквивалентна оценке

$$D_K' = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n D_{12ij}^2}. \quad (3.24)$$

В связи с этим величины D_K^* из-за малого объема выборки будут смещаться так же, как и D_K' . Используя значения коэффициента смещения τ_1 , рассчитанного в § 5 гл. II для величин $\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n D_{ik}^2\right)^{1/2}$, получим оценки D_K^{**} , не подверженные влиянию объема выборки,

$$D_K^{**} \approx \frac{\tau_1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^{N-1} n D_{12ij} n D_{12(i+1)j}}{(N-1)^n g(1)}}. \quad (3.25)$$

Расхождения между парами следов, выбранные в работе / 83/, привели к существенным ограничениям и на рассеяние в плоскости эмульсии. Поэтому оценки D_K^{**} были занижены и за счет этого эффекта. Несмещенные величины можно вычислять по формуле

$$D_K^{***} \approx \frac{\tau_1}{R_2} D_K^{**}, \quad (3.26)$$

где R_2 - коэффициент смещения из-за ограничений на поперечное рассеяние (3.13). Используя первичный материал работы / 83 /, нами были найдены величины $d = \max\{y(2t) - y(t) - \theta_0 t\}$, соответствующие им значения R_2 и оценены \mathcal{D}_k^{***} (рис. 23). Из рисунка видно, что оценки \mathcal{D}_k^{***} (если учесть, что $d(t)$) найдены весьма грубо из-за неточного определения θ_0) в пределах экспериментальных ошибок совпадают со значениями \mathcal{D}_k , вычисленными теоретически. На рисунке 23 приведены статистические ошибки. Полная ошибка в оценке величины \mathcal{D}_k^{***} в 2-3 раза превышает статистическую. Полученный результат не является неожиданным, так как корректная оценка величин \mathcal{D}_k на следах частиц с энергией 60 Гэв (§ 3 этой главы) дает хорошее согласие теории и эксперимента. Он лишь подтверждает справедливость высказанных во втором параграфе этой главы предположениях о причинах так называемого расхождения экспериментальных и теоретических величин \mathcal{H} при больших t .

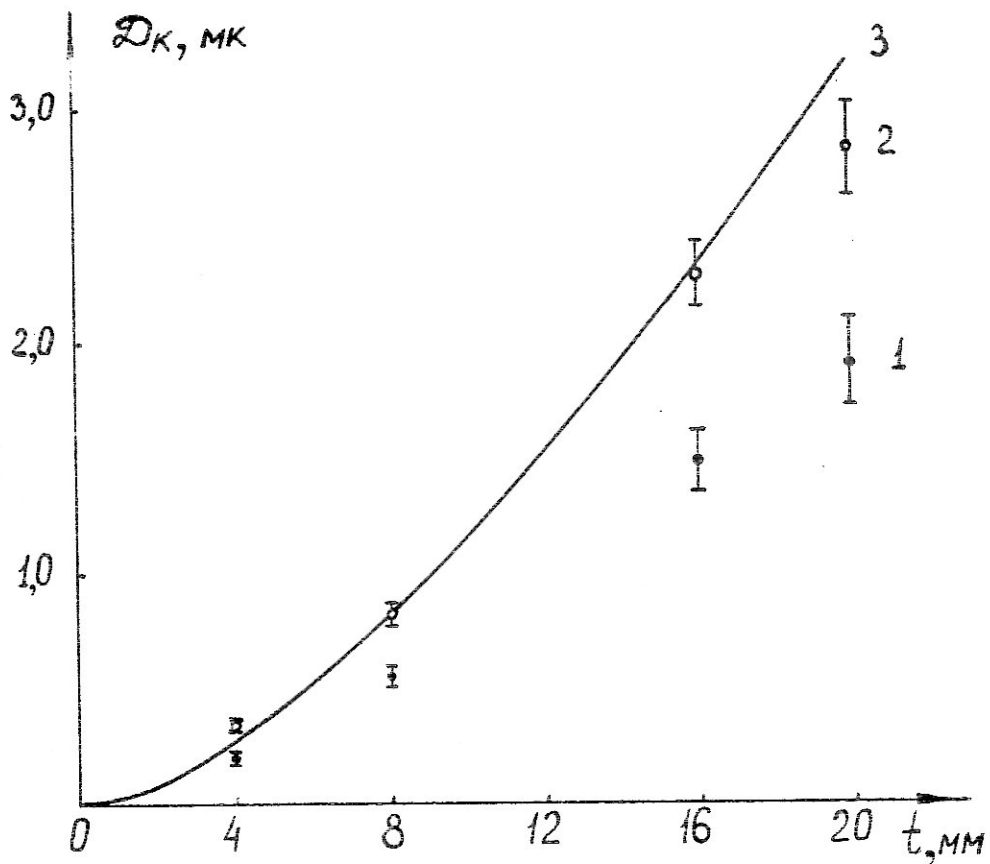


Рис.23. Зависимость D_K от t для π^- -мезонов с энергией 60 Гэв: 1 - данные работы [83], 2 - значения D_K^{***} , полученные по формуле (3.26), 3-расчет.

Г Л А В А IY

ИЗМЕРЕНИЕ И АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
ВТОРИЧНЫХ ПИОНОВ ИЗ π^-N ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ
ЭНЕРГИИ 60 Гэв И ПЕРСПЕКТИВЫ ФОТОМЕТОДА ПРИ
БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ§I. Методика эксперимента.

Для изучения импульсных распределений использовались слои ядерной фотоэмульсии НИИХИМФОТО БР-2 размером 10 x 20 x 0,06 см³, облученные пучком π^- -мезонов с энергией 60 Гэв на ускорителе ИФВЭ (г.Серпухов) и проявленные в ОИЯИ (г.Дубна). Поток первичных частиц в эмульсии составлял $(1 - 5) \cdot 10^4$ част/см², а их угловой разброс не превышал 4,4 мрад. Первый этап работы выполнен в составе коллаборации: Алма-Ата, Дубна, Будапешт, Краков, Москва, София, Ташкент, Улан-Батор /91/.

Поиск ядерных взаимодействий в слоях эмульсии, полученных ИФВЭ АН КазССР, осуществлялся просмотром вдоль следов первичных частиц на микроскопе МБИ-9 при увеличении 900^x. Всего было просмотрено около 900 м таких следов и найдено свыше 2000 взаимодействий. По критериям, описанным в работах /92,93,94/, отобрано около 300 взаимодействий π^- -мезонов со свободными и квазисвободными нуклонами. Общие характеристики этих событий (распределение по множественности, угловые распределения и т.п. и методи-

ка эксперимента описаны в работах / 88, 94, 95 /.

Импульсы вторичных частиц определялись по измерениям их многократного рассеяния. Измерения рассеяния в лаборатории мезон-ядерных реакций ИФВЭ АН Каз.ССР, проводились коллективно на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2 / 43/ на основных ячейках $t_0 = 100$ мк и $t_0 = 250$ мк, а в некоторых случаях (короткие следы с большой величиной $\langle \varphi_i^2 \rangle^{1/2}$, соответствующие малоэнергичным частицам) и на меньших ячейках. Следы частиц, идущих под большим углом относительно плоскости эмульсионного слоя, сшивались в нескольких пластинках до длины $4 \div 6$ см. Многократное рассеяние измерено практически для всех вторичных частиц с углом погружения $\varphi \leq 3^\circ$ и частично для частиц с $\varphi \leq 8^\circ$. Определение $\rho_{\text{вс}}$ по результатам измерений осуществлялось методом корреляционных моментов, описанным в § 4 гл. 2, и для сравнения методом "р" / 74/. Оптимальной в большинстве случаев считалась ячейка, на которой ρ изм достигало своего минимального значения. Для коротких следов, когда число измеренных вторых разностей N не превышало 10, на величину $\rho_{\text{вс}}$ вводилась поправка, обусловленная статистическим смещением оценки (2.59) (см. § 5 гл. 2). Использование установки БЛП-1, осуществляющей перезапись информации с перфоленты (на которую выводятся результаты измерений с микроскопа МИРЭ-2) на перфокарты, позволило проводить все расчеты на ЭЦВМ БЭСМ-4 ИФВЭ АН Каз.ССР.

Для этого в логическую схему микроскопов МИРЭ-2 был введен счетчик на 12 чисел, выдающий служебные пробивки на перфоленте для БЛП -1 / 73/.

Среднеквадратические значения вторых разностей для многократного кулоновского рассеяния $\langle n^2 \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2}$ рассчитывались на ЭЦВМ БЭСМ-4 по программам, позволяющим контролировать форму следов; вычислять вторые разности для полностью перекрывающихся ичеек $n^2 \mathcal{D}_i = y_i - 2y_{i+n} + y_{i+2n}$, $n = 1, 2, 4, 8, 12, 16, 20$; исключать дисторсии второго порядка (методом Фаулера / 31/); рассчитывать корреляционные моменты $\mathcal{K}(j) = \langle n^2 \mathcal{D}_i n^2 \mathcal{D}_{i+j} \rangle$ (с усреднением по всем отрезкам сшиваемого следа); вычислять $\langle n^2 \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle^{1/2}$ и их ошибки методом корреляционных моментов и для сравнения методом "р" /73/.

Методика определения импульсов апробировалась на следах первичных π^- -мезонов с энергиями 17 и 60 Гэв. Средние значения $\rho\beta c$, полученные методом корреляционных моментов, хорошо согласуются с истинными, а форма распределений по $\rho\beta c$ соответствует расчетам, сделанным в § 5 гл.2. Экспериментальные распределения по $\rho\beta c$ первичных пионов приведены во второй главе.

С помощью описанной методики были найдены импульсы для 920 вторичных частиц. Частицы, у которых не было измерено многократное рассеяние, учитывались введением статистических весов. Идентификация вторичных частиц проводилась методом ионизация-рассеяние. Ионизация определялась

Путем счета ступок зёрен. Для идентификации использовалась кривая зависимости относительной ионизации от γ ($\gamma = E_0/mc^2$), рассчитанная из уравнения Штернхаймера / 76 /. Поскольку протоны с энергией до 0,8 Гэв легко идентифицируются визуально, а доля высокоэнергичных протонов мала, измерение ионизации проводилось только на следах частиц с энергией от 0,8 до 5,0 Гэв. Частицы с энергией больше 5 Гэв считались π -мезонами.

Распределение по импульсам вторичных π -мезонов из всех πN взаимодействий в лабораторной системе координат (ЛСК) показано на рис. 24.

На рис. 25 представлены импульсные спектры π -мезонов из πp и πn взаимодействий в системе центра масс для двух групп множественностей: $N_s = 2 + 8$ и $N_s = 9 + 20$. Из рисунка видно, что при $N_s = 2 + 8$ некоторая доля частиц имеет $p^* \gtrsim 16$ Гэв/с. В основном это так называемые лидирующие или энергетически выделенные частицы (в Л.С.К. они имеют энергию $E \gtrsim 0,3E_0$, где $E_0 = 60$ Гэв/с.) В то же время при $N_s = 9 + 20$ таких частиц практически нет и импульсный спектр значительно мягче. Максимум в распределениях также как и при меньших энергиях находится в области $0,3 \div 0,6$ Гэв/с/94/. Средние значения импульсов для $N_s = 2 + 8$ и $N_s = 9 + 20$ соответственно равны $0,87 \pm 0,10$ и $0,59 \pm 0,07$ Гэв/с.

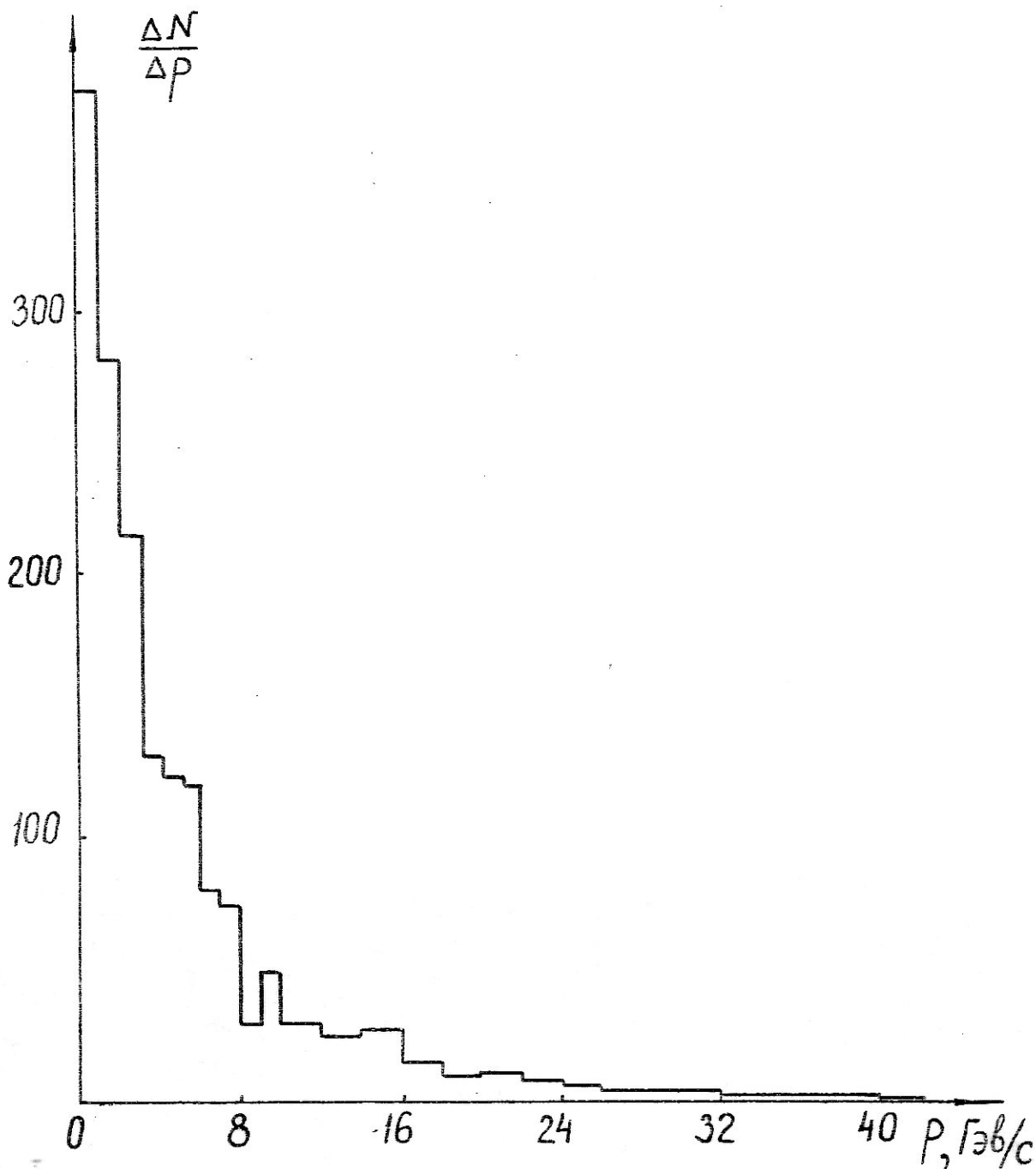


Рис.24. Импульсный спектр пионов из π^-N взаимодействий при энергии 60 Гэв в Л.С.К.

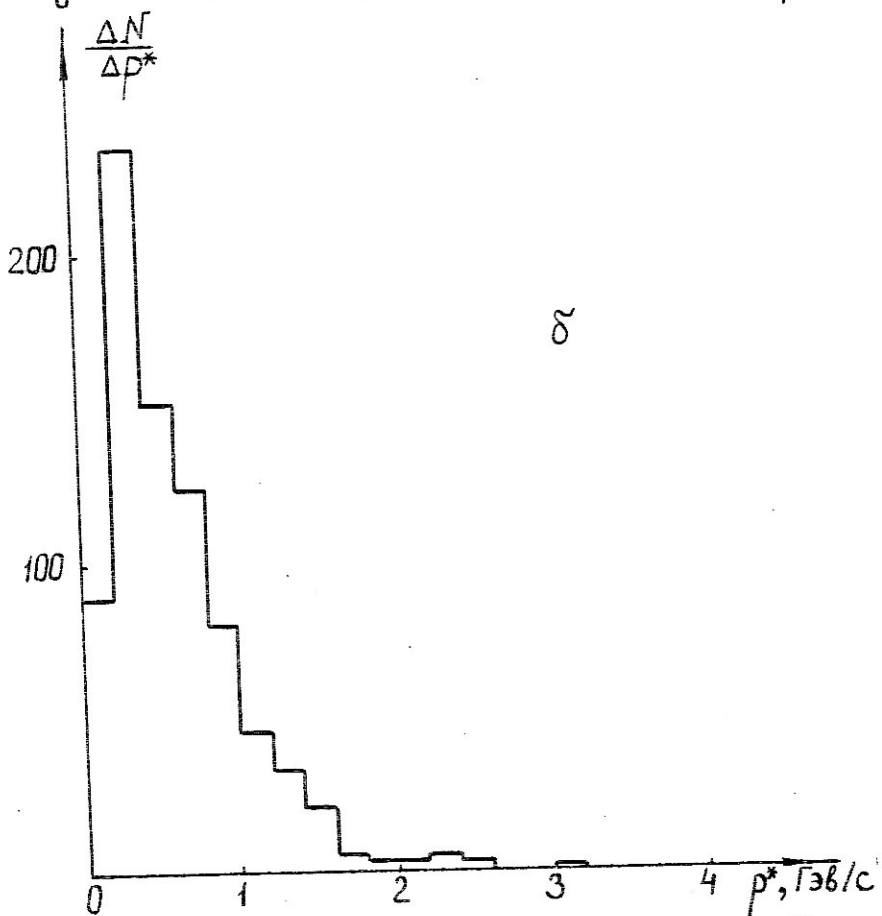
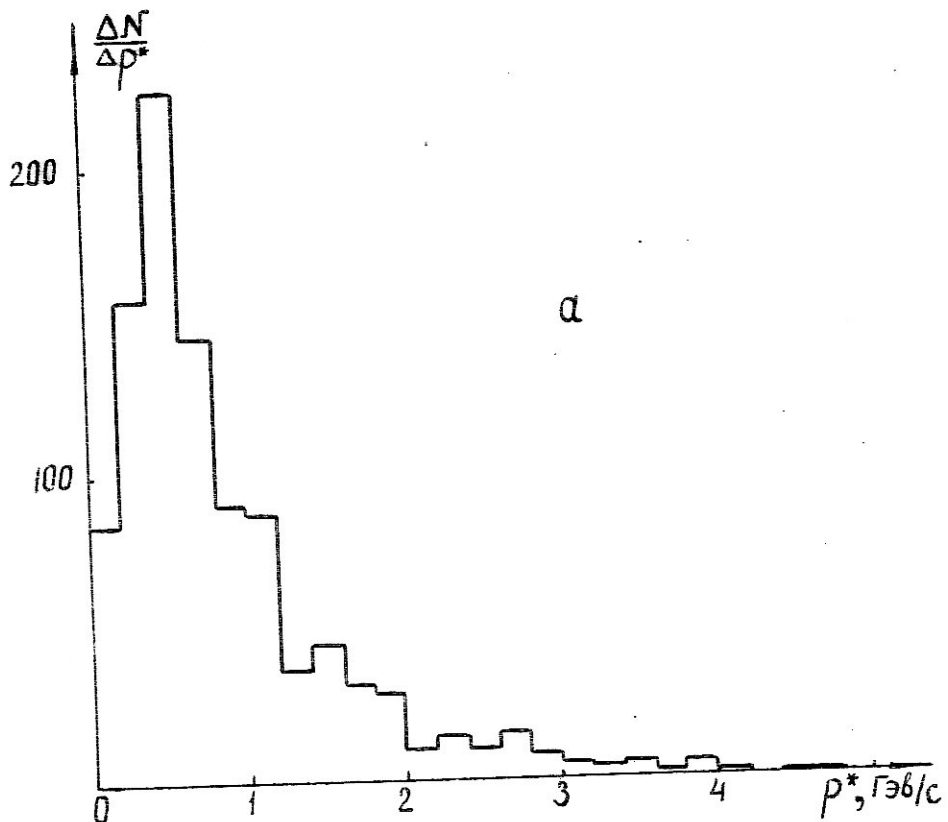


Рис. 25. Импульсные спектры пионов из πN взаимодействий при энергии 60 Гэв в С.Ц.М.: а- $n_s = 2 \div 8$, б- $n_s = 9 \div 20$.

§ 2. Сравнение импульсных распределений при энергии 60 Гэв с некоторыми теоретическими представлениями.

В работе Де Тара /96/ с помощью мультинериферической модели изучаются импульсные спектры вторичных адронов в Л.С.К. Эта модель основана на том, что распределение поперечных импульсов ограничено, а рождение частиц описывается диаграммой, представляющей линейную цепочку повторяющихся звеньев (первичные частицы располагаются на концах цепочки), причём предполагается, что коррелированы только импульсы "соседних" по цепочке частиц. Дифференциальный импульсный спектр $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p_{\perp} \partial y}$, где p_{\perp} - поперечный импульс, а $y = \text{arcsinh} \left[\frac{p_{\perp}}{(p_{\perp}^2 + m^2)^{1/2}} \right]$, исследуется для инклюзивных реакций, $a+b \rightarrow x + \text{anything}$.

В работе /96/ показано, что при достаточно большой полной энергии в С.Ц.М. дифференциальный импульсный спектр частиц X должен принять вид

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\sigma^{\text{tot}} \partial p_{\perp} \partial y} = \begin{cases} A_x(p_{\perp}, y) & , \quad y < \Delta ; \\ f_x(p_{\perp}) & , \quad \Delta < y < Y - \Delta ; \\ B_x(p_{\perp}, Y - y) & , \quad y > Y - \Delta , \end{cases} \quad (4.1)$$

где σ^{tot} - полное поперечное сечение взаимодействия,

Δ - некоторая постоянная, а $Y = \text{arcsinh} \chi$ ($\chi = E_a/m_0$)

Согласно (4.1) в области $\Delta < y < Y - \Delta$ сечение $d\sigma/dy$ не зависит от y , а определяется только природой частицы X.

Для реакции



сечение $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ имеет плато при $\Delta < y < Y - \Delta$ и плавно спадает до нуля при $y < \Delta$ и $y > Y - \Delta$.

На рис.26 представлен спектр $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ для заряженных π^- - мезонов из всех $\pi^- N$ взаимодействий типа (4.2) при энергии 60 Гэв. Из рисунка видно, что это сечение не имеет плато в области промежуточных значений y .

На рис.27 изображены распределения $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ из $\pi^- N$ взаимодействий (4.2), разбитых по множественности на две группы: $n_s = 2 + 8$ и $n_s = 9 + 20$. При малых множественностях $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ не имеет плато, а при $n_s = 9 + 20$ это сечение согласуется с моделью Де Тара. Таким образом, при энергии 60 Гэв только группа взаимодействий с большой множественностью может быть качественно описана мультипериферической моделью Де Тара.

Сравним импульсные спектры, полученные при энергии 60 Гэв, со статистическими термодинамическими моделями. Для этого, как показано в работе /97/, необходимо правильно выбрать объект исследования. Здесь мы не ставим себе цель найти какой-либо физический критерий применимости статистических теорий и будем исходить лишь из того, что для этих теорий угловое распределение частиц в С.Ц.М. симметрично. При энергии 60 Гэв угловое распределение вторичных π^- - мезонов приблизительно симметрично лишь при $n_s \geq 9$.

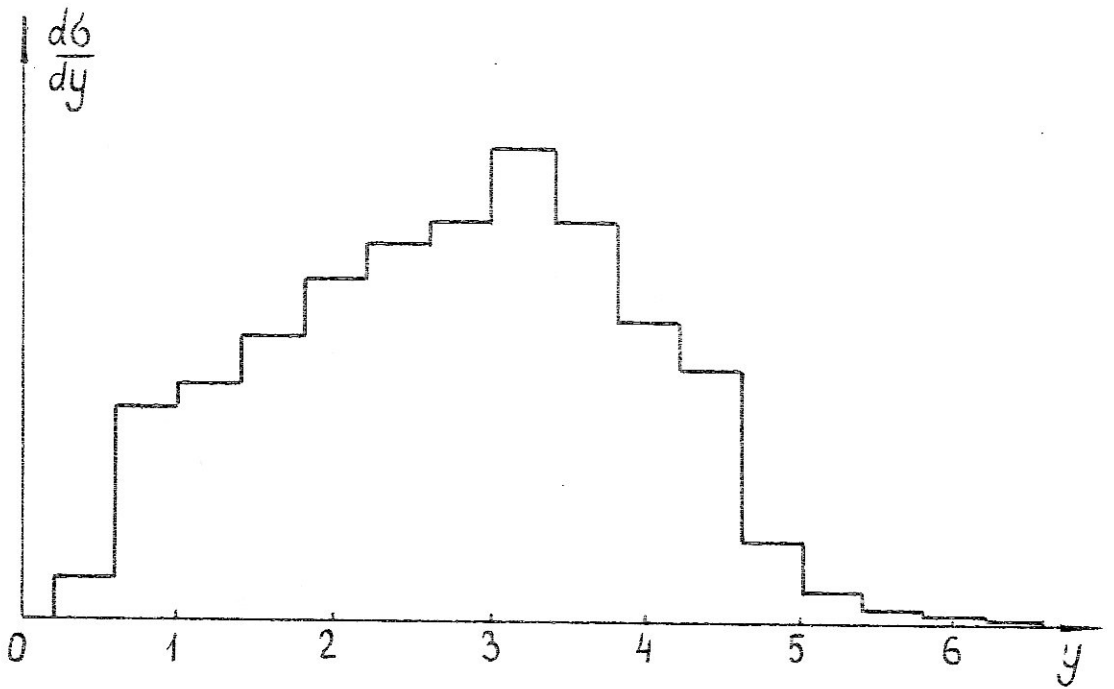


Рис.26. Спектр $\frac{d6}{dy}$ для заряженных π -мезонов из всех πN взаимодействий при энергии 60 Гэв.

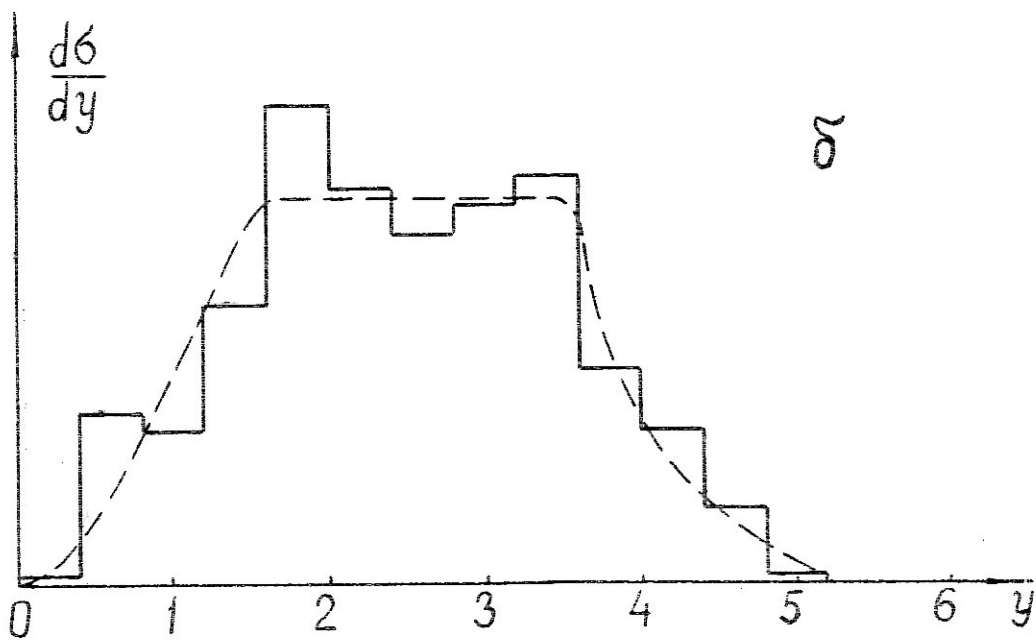
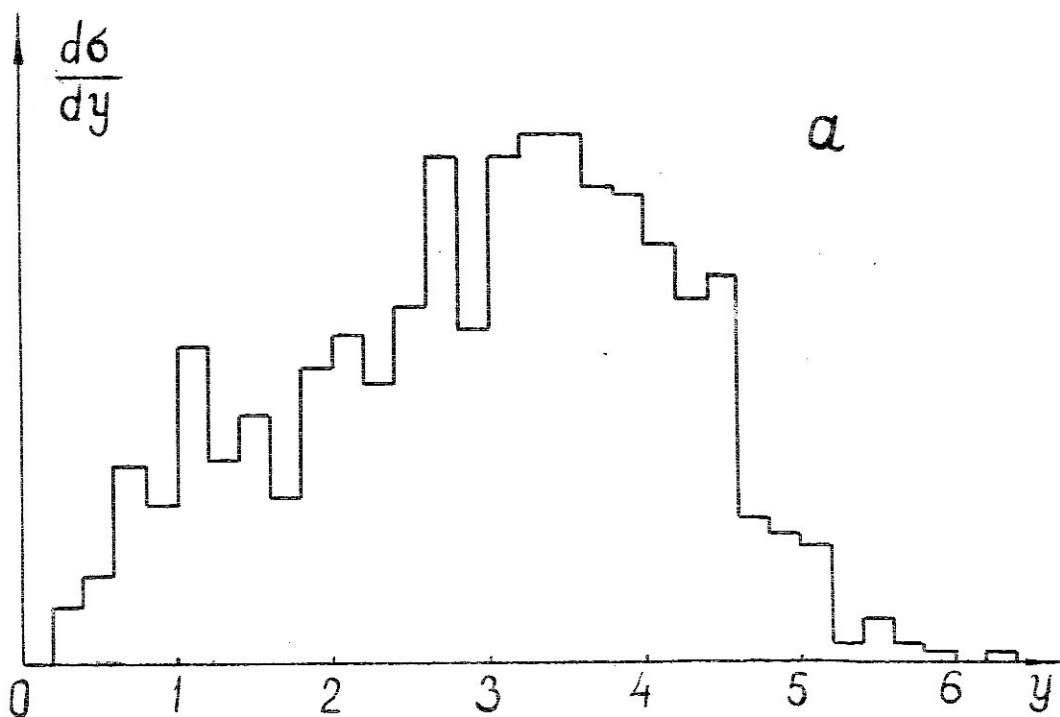


Рис.27. Дифференциальное сечение $\frac{d\sigma}{dy}$ для пионов из πN взаимодействий при $E_0 = 60$ Гэв: а- $n_s = 2 \div 8$, б- $n_s = 9 \div 20$

Большое число частиц в конечном состоянии для таких взаимодействий также оправдывает применение статистических моделей. В качестве такой модели возьмём двухтемпературную статистическую термодинамическую модель Вэйланда и Боуэна /98/. Этот выбор можно оправдать тем, что однотемпературные термодинамические модели множественного рождения частиц / 99- 103 / не описывают угловое распределение и распределение продольных импульсов. Угловое распределение в этих моделях изотропно (эксперимент же даёт анизотропию), а распределение продольных импульсов значительно уже экспериментального. Поскольку двухтемпературная статистическая модель пока не имеет строгого теоретического обоснования, мы не будем анализировать физическую суть её, а ограничимся лишь сравнением с экспериментальным материалом.

Для этой цели используются данные, полученные методом ядерных фотоэмульсий ($E_0 = 60$ Гэв), а также статистически хорошо обеспеченный материал, полученный методом водородной пузырьковой камеры ($E_0 = 8, 10$ и 19 Гэв) и с помощью счётчиков ($E_0 = 18,8$ Гэв).

Основой этой модели является термодинамический подход, развитый Хагедорном /102/. Согласно /102/, среднее число частиц данного сорта на единицу фазового объёма равно

$$\bar{y} = \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{T}\sqrt{\rho^2 + m^2}\right] + 1}, \quad (4.3)$$

где ρ - импульс частицы в С.Ц.М., m - её масса, а T - температура объёма взаимодействия, при которой про-

исходит разлет частиц. Знак минус в (4.3) соответствует бозонам, а плюс - фермионам. Дифференциальный элемент вечения, согласно (4.3) будет

$$d\mathcal{B} = \bar{v} \cdot V_0 \cdot dp_x dp_y dp_z, \quad (4.4)$$

где V_0 - об"ем взаимодействия.

Переходя в (4.4) к продольным и поперечным импульсам, получим

$$d\mathcal{B} = \frac{A p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}}{\exp\left(\frac{1}{T} \sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m^2}\right) \mp 1} \quad (4.5)$$

Здесь A - нормировочная постоянная. Интегрируя (4.5) по p_{\perp} или p_{\parallel} , можно получить распределения продольных или поперечных импульсов соответственно. Основная идея работы / 98/ состоит в том, что эти распределения описываются различными температурами. Так, распределение продольных импульсов π - мезонов будет

$$f(p_{\parallel}) = A \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2T}{\kappa T}} (p_{\parallel}^2 + m^2)^{3/4} \mathcal{K}_{3/2}\left(\frac{\kappa}{T} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}\right), \quad (4.6)$$

где $\mathcal{K}_{3/2}(x)$ - модифицированная функция Бесселя. Нормируя это распределение по $-\infty < p_{\parallel} < \infty$ к единичной площади, имеем

$$f(p_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} m^2} \frac{(p_{\parallel}^2 + m^2)^{3/4} \mathcal{K}_{3/2}\left(\frac{\kappa}{T} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}\right)}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \mathcal{K}_2\left(\frac{\kappa m}{T}\right)}. \quad (4.7)$$

Интегрируя (4.5) по p_{\perp} , получим распределение поперечных импульсов, которое описывается температурой T_0 :

$$f(p_{\perp}) = A \sum_{K=1}^{\infty} p_{\perp} \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \mathcal{H}_1 \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \right). \quad (4.8)$$

После нормирования на единичную площадь, получим

$$f(p_{\perp}) = \frac{p_{\perp} \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \mathcal{H}_1 \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \right)}{T_0 m^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2 \left(\frac{Km}{T_0} \right)}. \quad (4.9)$$

В формулах (4.7) и (4.9) используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Переходя от $f(p_{\parallel})$ и $f(p_{\perp})$ к совместной функции распределения $f(p_{\parallel}, p_{\perp})$, авторы работы /98/ считают, что поперечные и продольные импульсы статистически независимы, т.е.

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = f(p_{\parallel}) \cdot f(p_{\perp}). \quad (4.10)$$

Подставляя в это выражение (4.7) и (4.9) и переходя к переменным ρ и Ω (Ω - телесный угол), получим /98 /.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \rho \partial \Omega} = \frac{2V_0 T^4}{T_0 m^2} \left(\frac{\rho}{T} \right)^2 \frac{\sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \mathcal{H}_1 \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2} \right) \sum_{K=1, K^2}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{-\frac{K}{T} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}} \left(1 + \frac{K}{T} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2} \right)}{\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2 \left(\frac{Km}{T_0} \right)}. \quad (4.11)$$

Интегрирование (4.11) по углам или импульсам дает импульсное или угловое распределение вторичных частиц соответственно.

Необходимо отметить, что предположение о статистической независимости p_{\parallel} и p_{\perp} в работе /98/ обосновывается тем, что коэффициент корреляции между p_{\perp} и p_{\parallel}

$$\rho = \frac{\langle (p_{\perp} - \langle p_{\perp} \rangle) (p_{\parallel} - \langle p_{\parallel} \rangle) \rangle}{\langle (p_{\perp} - \langle p_{\perp} \rangle)^2 \rangle^{1/2} \langle (p_{\parallel} - \langle p_{\parallel} \rangle)^2 \rangle^{1/2}} \quad (4.12)$$

при больших энергиях, когда $\frac{m}{T} \rightarrow \infty$ равен 0,109 .

Малая величина ρ тем не менее не доказывает независимости ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} . Из теории вероятностей известно, что, если две величины статистически независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю, однако обратное предположение недействительно. Иными словами, даже нулевое значение ρ для ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} не может быть критерием их независимости.

Статистическую связь продольных и поперечных импульсов можно учесть, не нарушая общего характера построения двухтемпературной статистической термодинамической модели. Известно / 34/, что совместная функция распределения любых двух коррелированных величин, например, ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} может быть записана в виде

$$f(\rho_{\perp}, \rho_{\parallel}) = f(\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}) \cdot f(\rho_{\parallel}), \quad (4.13)$$

где $f(\rho_{\perp}/\rho_{\parallel})$ - распределение поперечных импульсов при условии $\rho_{\parallel} = const$. Предполагая, что $f(\rho_{\parallel})$ описывается температурой T , а $f(\rho_{\perp}/\rho_{\parallel})$ температурой T_0 , получим

$$f(\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}) = \frac{A\rho_{\perp}}{\exp\left(\frac{1}{T_0}\sqrt{\rho_{\perp}^2 + \rho_{\parallel}^2 + m^2}\right) - 1}, \quad \rho_{\parallel} = const. \quad (4.14)$$

Нормируя (4.14) к единичной площади, имеем

$$f(\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}) = \frac{\rho_{\perp} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2T_0} \left[\exp\left(\frac{1}{T_0}\sqrt{\rho_{\perp}^2 + m^2}\right) - 1 \right] (\rho_{\parallel}^2 + m^2)^{3/4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathcal{H}_{3/2}\left(\frac{k}{T_0}\sqrt{\rho_{\parallel}^2 + m^2}\right)} \quad (4.15)$$

Поскольку $f(\rho_{||})$ попрежнему описывается выражением (4.7), совместная функция распределения $f(\rho_{\perp}, \rho_{||})$ будет

$$f(\rho_{\perp}, \rho_{||}) = \frac{\rho_{\perp} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T} \sqrt{\rho_{||}^2 + m^2} \right)}{2\sqrt{TT_0} m^2 \left[\exp\left(\frac{1}{T_0} \sqrt{\rho^2 + m^2}\right) - 1 \right] \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{\rho_{||}^2 + m^2} \right) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2 \left(\frac{Km}{T} \right)}. \quad (4.16)$$

Интегрируя (4.16) по $\rho_{||}$, найдем распределение поперечных импульсов, которое в отличие от (4.9) зависит и от T и от T_0 :

$$f(\rho_{\perp}) = \frac{\rho_{\perp}}{\sqrt{TT_0} m^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2 \left(\frac{Km}{T} \right)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T} \sqrt{\rho_{||}^2 + m^2} \right) d\rho_{||}}{\left[\exp\left(\frac{1}{T_0} \sqrt{\rho^2 + m^2}\right) - 1 \right] \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{\rho_{||}^2 + m^2} \right)}. \quad (4.17)$$

Заменив в выражении (4.16) переменные ρ_{\perp} и $\rho_{||}$ на ρ и Ω , получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho \partial \Omega} = \frac{A \rho^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + m^2} \right)}{\left(e^{\frac{1}{T_0} \sqrt{\rho^2 + m^2}} - 1 \right) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathcal{H}_{3/2} \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + m^2} \right)}. \quad (4.18)$$

На рис. 28а и б представлены экспериментальные распределения по ρ_{\perp} и $\rho_{||}$ в С.Ц.М. для заряженных π -мезонов из πN взаимодействий при энергии 60 Гэв ($n_s \geq 9$) и кривые, рассчитанные согласно (4.7) и (4.17).

Температуры $T = 0,272$ Гэв и $T_0 = 0,120$ Гэв определены по средним значениям $\langle \rho_{||} \rangle$ и $\langle \rho_{\perp} \rangle$. На рисунке 28б нанесено также распределение $f(\rho_{||})$, соответствующее однотемпературной статистической модели [103] со значением $T \approx m = 0,14$ Гэв. Как видно из рисунка, двухтемпературная модель, учитывающая корреляцию ρ_{\perp} и $\rho_{||}$, хорошо согласуется с экспериментальными распределениями поперечных и продольных импульсов из многолучевых πN

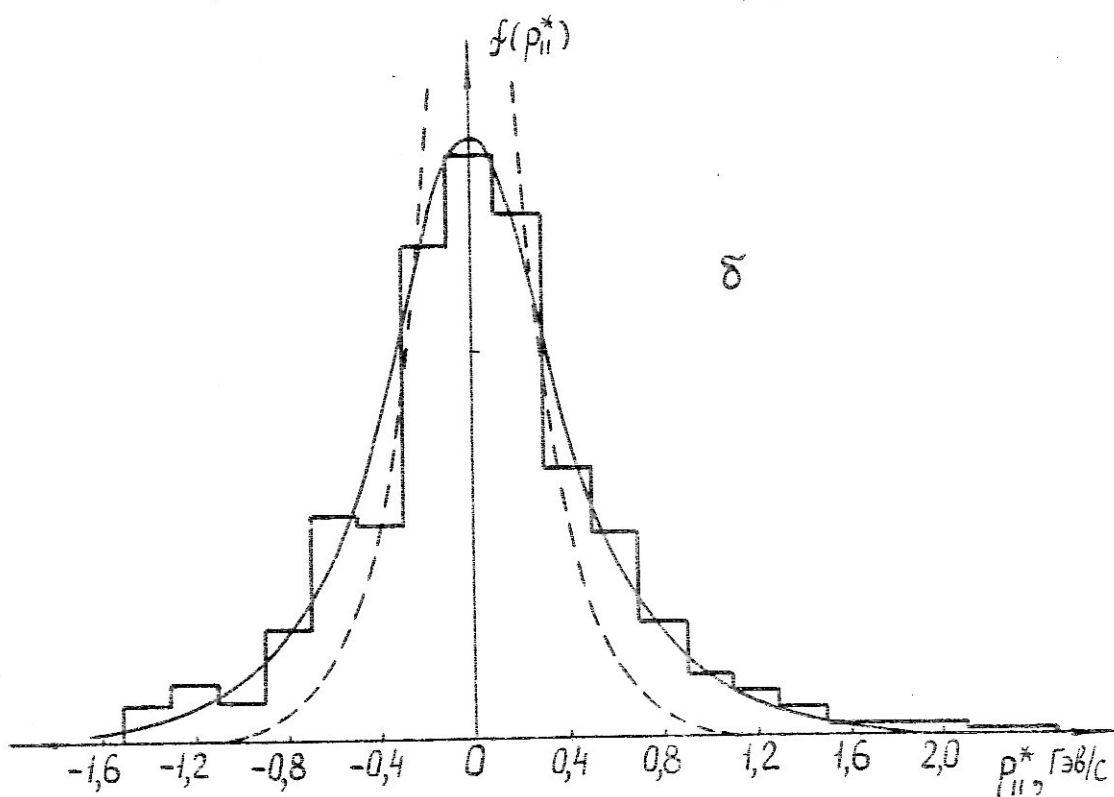
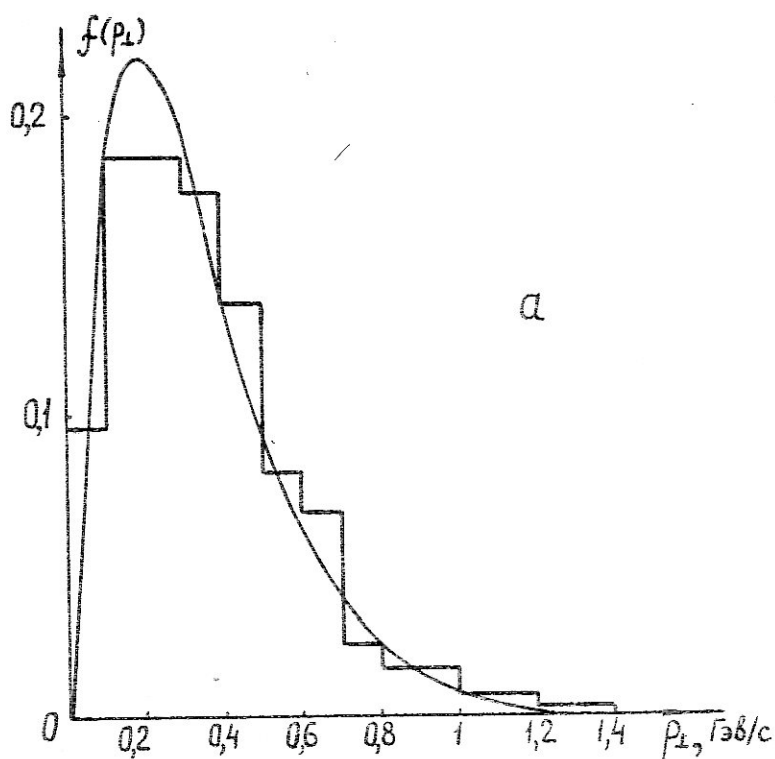


Рис.28. Распределения по ρ_{\perp} (а) и ρ_{\parallel}^* (б). Сплошные кривые - расчет по формулам (4.7) и (4.17), пунктир-расчет по однотемпературной модели ($T_0 = 0,14$ ГэВ).

взаимодействий при $E_0 = 60$ Гэв. Термодинамическая же модель с одной температурой распределение продольных импульсов не описывает.

На рис. 29 представлено экспериментальное угловое распределение π - мезонов для тех же взаимодействий и кривая, рассчитанная согласно (4.18). Теоретическая кривая, как видно из этого рисунка, согласуется с экспериментом.

§ 3. О статистической зависимости поперечных и продольных импульсов.

Статистическую связь p_{\perp} и p_{\parallel} обычно иллюстрируют зависимостью среднего поперечного импульса от продольного. Очевидно, что в модели Вэйланда и Боуэна $\langle p_{\perp} \rangle_{p_{\parallel}} = \text{const}$. В варианте двухтемпературной статистической модели с учетом корреляции p_{\perp} и p_{\parallel} , предложенном нами в предыдущем параграфе, зависимость $\langle p_{\perp} \rangle$ от p_{\parallel} можно найти следующим образом

$$\langle p_{\perp} \rangle_{p_{\parallel}} = \frac{\int_0^{\sqrt{p_{\max}^2 - p_{\parallel}^2}} \frac{p_{\perp}^2 dp_{\perp}}{\exp(\frac{1}{T_0} \sqrt{p^2 + m^2}) - 1}}{\int_0^{\sqrt{p_{\max}^2 - p_{\parallel}^2}} \frac{p_{\perp} dp_{\perp}}{\exp(\frac{1}{T_0} \sqrt{p^2 + m^2}) - 1}}, \quad (4.19)$$

где p_{\max} - предельное значение импульса, допускаемое кинематикой взаимодействия. При малых значениях p_{\parallel} ,

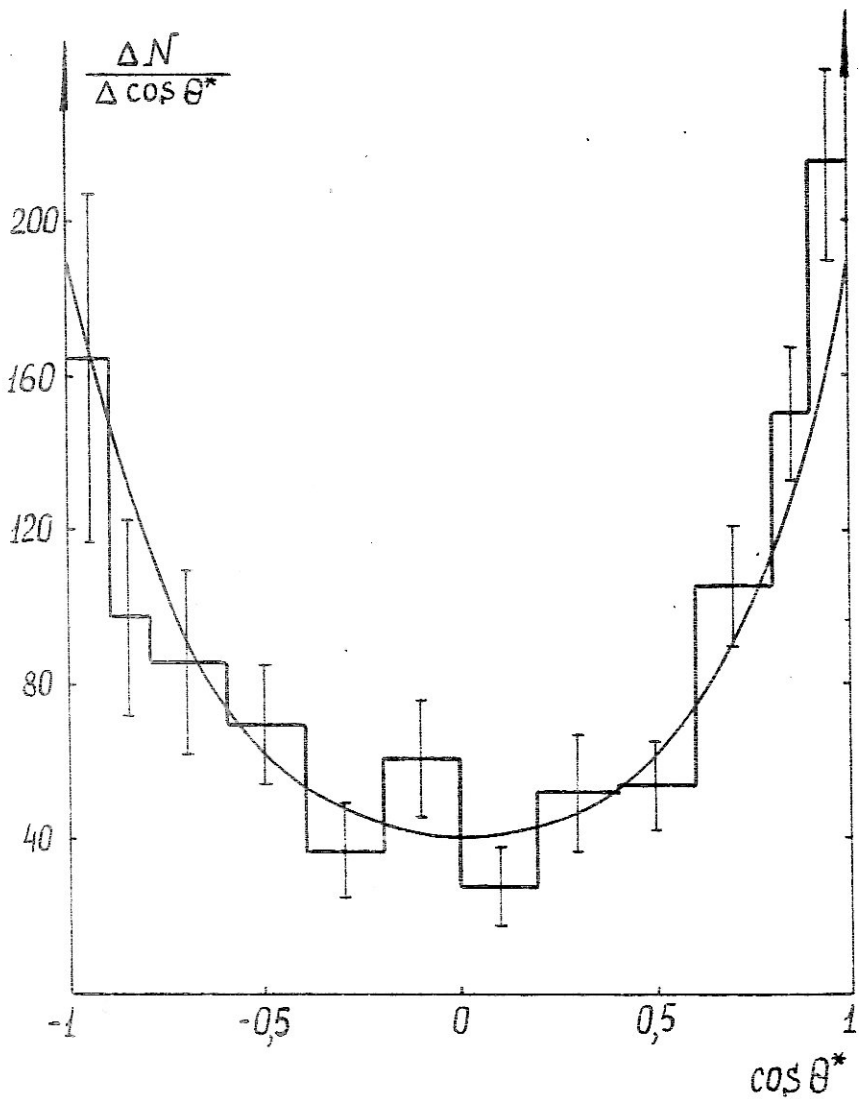


Рис.29. Угловое распределение пионов при энергии 60 Гэв ($n_s = 9 \div 20$). Кривая - расчет по двухтемпературной модели с учетом корреляции ρ_1 и ρ_{11} .

Верхний предел интегрирования в (4.19) можно заменить на ∞ и тогда $\langle p_{\perp} \rangle_{p_{\parallel}}$ выражается в конечном виде

$$\langle p_{\perp} \rangle_{p_{\parallel}} = \frac{(p_{\parallel}^2 + m^2) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2 \left(\frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2} \right)}{T_0 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \exp \left(-\frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2} \right) \left(1 + \frac{K}{T_0} \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2} \right)}. \quad (4.20)$$

Экспериментальные значения $\langle p_{\perp} \rangle_{p_{\parallel}}$ при энергии 60 ГэВ соответствующие $\pi^- N$ взаимодействиям с $n_s = 9 + 20$, и значения, рассчитанные по формуле (4.20), приведены на рис. 30. Как видно из рисунка, эксперимент хорошо согласуется с расчетом.

Представляет интерес сравнить с экспериментом двойное дифференциальное сечение $\frac{\partial^2 \delta}{\partial p \partial \Omega}$, рассчитанное с учетом и без учета корреляции p_{\perp} и p_{\parallel} . На рис. 31 приведен спектр $\frac{\partial^2 \delta}{\partial p \partial \Omega}$ для π^- -мезонов из pp взаимодействий при энергии 18,8 ГэВ / 104/. Сечение $\frac{\partial^2 \delta}{\partial p \partial \Omega}$ измерено для частиц, вылетающих под углом $\theta = 0^\circ$ по отношению к направлению движения первичной частицы. Кривые 1 и 2 рассчитаны по формулам (4.11) и (4.18) для одних и тех же экспериментальных значений $\langle p_{\perp} \rangle$ и $\langle p_{\parallel} \rangle$. Из рисунка видно, что учёт корреляции продольных и поперечных импульсов существенно улучшает согласие экспериментальных данных с двухтемпературной моделью.

Учет статистической связи p_{\parallel} и p_{\perp} изменяет не только вид двойного дифференциального сечения $\frac{\partial^2 \delta}{\partial p \partial \Omega}$, но и угловое распределение $\frac{\partial \delta}{\partial \cos \theta}$. На рис. 32 изображены - угловое распределение π^- -мезонов из 4-х, 6-ти и

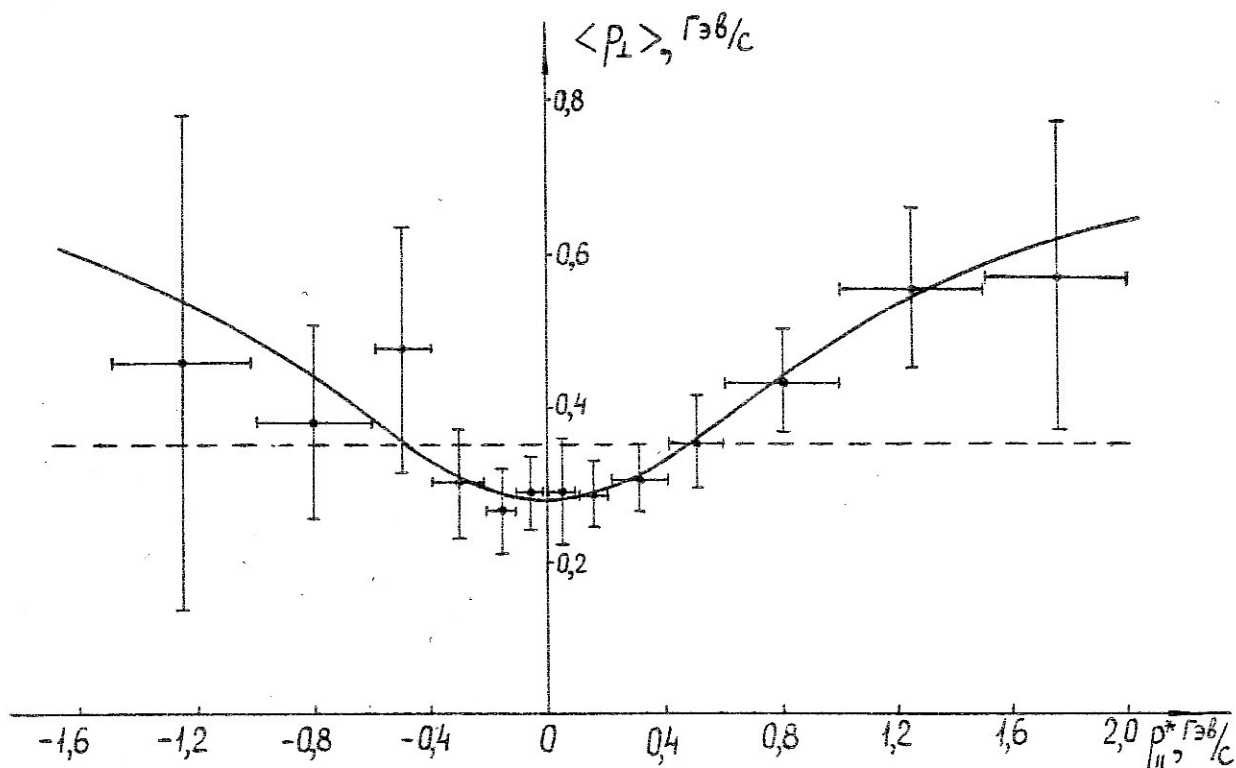


Рис.30. Зависимость $\langle p_{\perp} \rangle$ от p_{\parallel}^* при $E_0 = 60$ Гэв: сплошная линия - расчет по формуле (4.20), пунктир - модель Вейланда и Боуэна [98], точки - эксперимент ($n_s = 9 \div 20$).

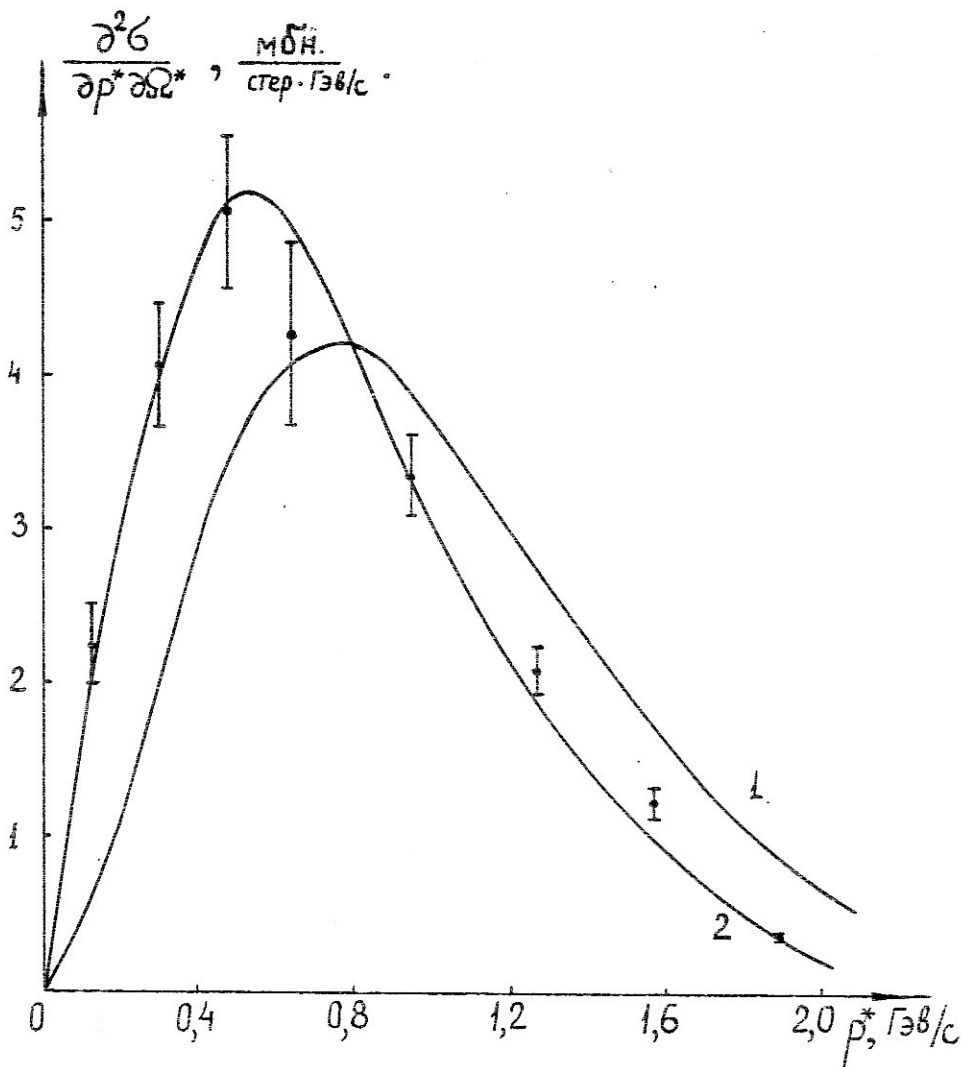


Рис. 31. Дифференциальное сечение $\frac{d^2\sigma}{dp^* d\Omega^*}$ ($\theta = 0^\circ$) для π^- -мезонов из pp взаимодействий при $E_0 = 18,8$ Гэв [104]. Кривые 1 и 2 рассчитаны по формулам (4.11) и (4.18) соответственно.

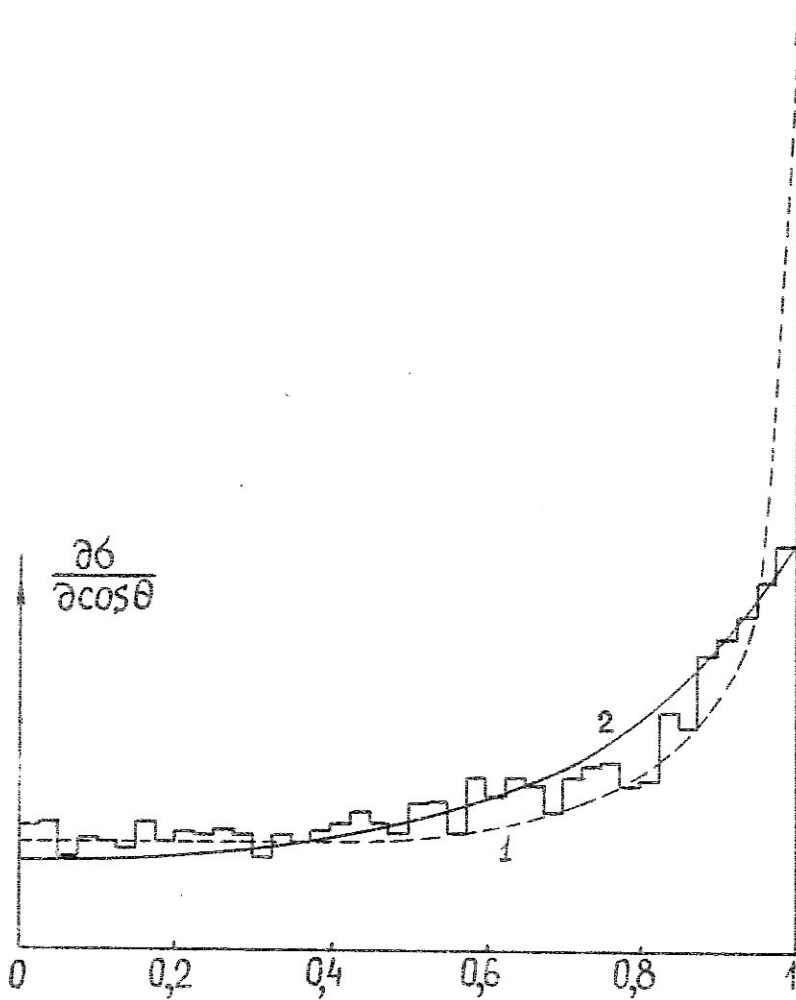


Рис.32. Угловое распределение π^- -мезонов для 4-х, 6-и и 8-и лучевых pp взаимодействий при $E_0 = 19$ Гэв [105]. Кривые 1 и 2 рассчитаны согласно (4.11) и (4.18) соответственно.

8-и лучевых pp взаимодействий при энергии 19 Гэв /105/ и кривые $\frac{\partial \sigma}{\partial \cos \theta}$, рассчитанные согласно (4.11) и (4.18). Угловое распределение, вычисленное с учетом корреляции ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} (кривая 2) значительно лучше согласуется с экспериментом, чем распределение, найденное в предположении независимости ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} . На рис. 33 представлены угловые распределения π -мезонов из pp взаимодействий при энергии 10 Гэв /106/ для реакций: $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^-$ (а) и $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^+\pi^-$ и $pp\pi^+\pi^+\pi^-$ (б). Эти распределения хорошо описываются двухтемпературной моделью, учитывающей зависимость ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} и не описываются моделью Вэйланда и Боуэна. Распределения продольных и поперечных импульсов для pp взаимодействий при энергиях 10 и 19 Гэв /105, 106/ мы не приводим, так как они хорошо описываются формулами (4.7) и (4.17).

Таким образом, двухтемпературная статистическая термодинамическая модель с некоррелированными ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} , удовлетворительно фитируя распределения поперечных и продольных импульсов, практически не описывает зависимость $\langle \rho_{\perp} \rangle$ от ρ_{\parallel} , двойное дифференциальное сечение $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho \partial \cos \theta}$ и угловое распределение $\frac{\partial \sigma}{\partial \cos \theta}$. Учет же этой корреляции приводит к хорошему согласию с экспериментом.

Упомянем еще об одном способе учета корреляции ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} в двухтемпературной модели. Суть его состоит в замене выражения (4.3) для плотности энергетических уровней эмпирической формулой /107/

$$\bar{v} = \frac{1}{\exp\left(\sqrt{\frac{\rho_{\perp}^2}{T_0^2} + \frac{\rho_{\parallel}^2}{T^2} + \frac{m^2}{T T_0}}\right) + 1} \quad (4.21)$$

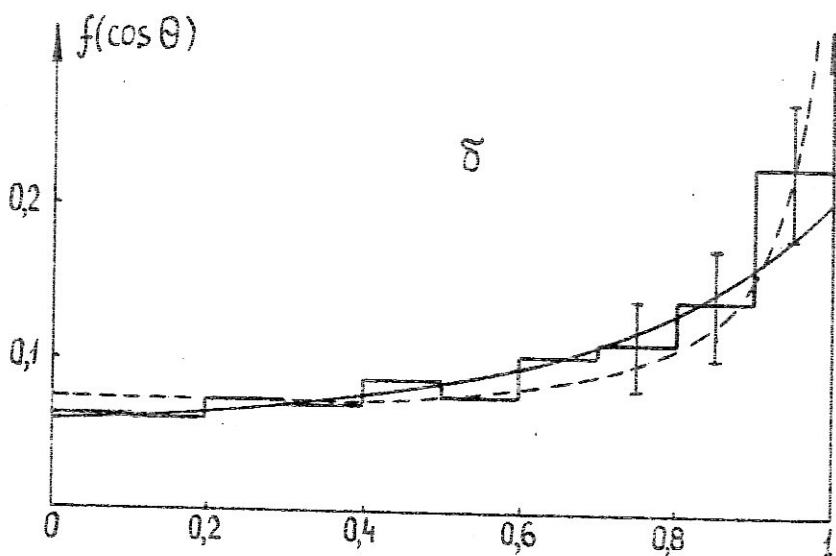
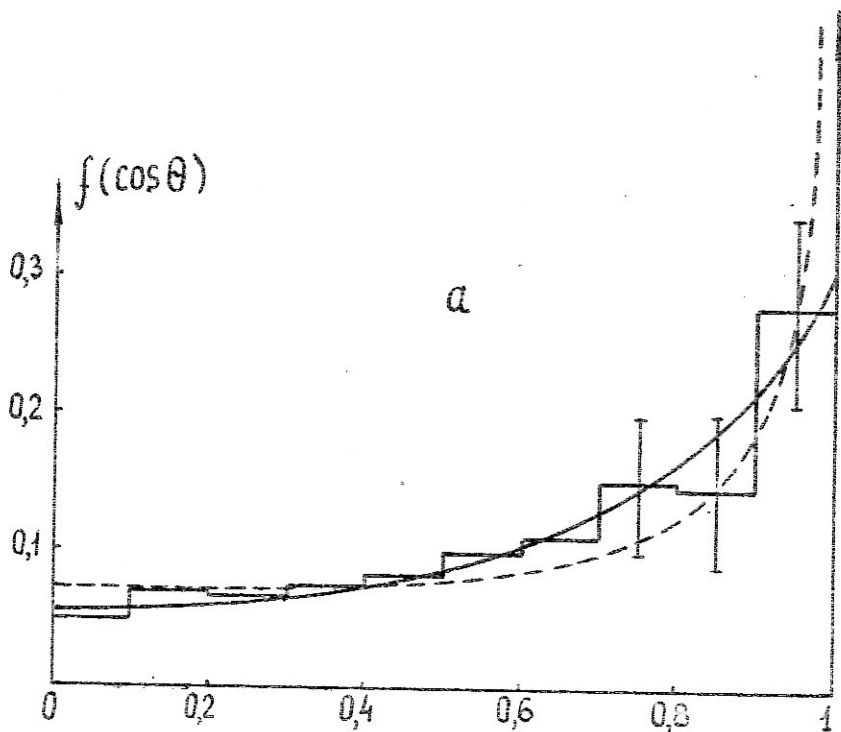


Рис.33. Угловые распределения π -мезонов из pp взаимодействий при энергии 10 Гэв [106] для реакций: а - $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^-$, б - $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^-\pi^0$ и $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^+\pi^-$. Сплошная линия - расчет согласно формуле (4.18), пунктирная - согласно (4.11).

С помощью этого выражения легко получить распределения поперечных и продольных импульсов, угловое распределение и зависимость $\langle \rho_{\perp} \rangle$ от ρ_{\parallel} для π -мезонов в конечном виде

$$f(\rho_{\perp}) = \frac{T}{m^2 T_0 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2\left(\frac{Km}{\sqrt{TT_0}}\right)} \cdot \rho_{\perp} \sqrt{\rho_{\perp}^2 + \frac{T_0}{T} m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \mathcal{H}_1\left(\frac{K}{T_0} \sqrt{\rho_{\perp}^2 + \frac{T_0}{T} m^2}\right); \quad (4.22)$$

$$f(\rho_{\parallel}) = \frac{T_0 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{-\frac{K}{T} \sqrt{\rho_{\parallel}^2 + \frac{T_0}{T} m^2}} \cdot \left(1 + \frac{K}{T} \sqrt{\rho_{\parallel}^2 + m^2}\right)}{2m^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2\left(\frac{Km}{\sqrt{TT_0}}\right)}; \quad (4.23)$$

$$f(\cos\theta) = \frac{m^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2\left(\frac{Km}{\sqrt{TT_0}}\right)}{TT_0 \left(\frac{\sin^2\theta}{T_0^2} + \frac{\cos^2\theta}{T^2}\right)^{3/2}}; \quad (4.24)$$

$$\langle \rho_{\perp} \rangle_{\rho_{\parallel}} = \frac{T_0 (\rho_{\parallel}^2 + \frac{T_0}{T} m^2) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \mathcal{H}_2\left(\frac{K}{T} \sqrt{\rho_{\parallel}^2 + \frac{T_0}{T} m^2}\right)}{T^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \exp\left[-\frac{K}{T} (\rho_{\parallel}^2 + \frac{T_0}{T} m^2)^{1/2}\right] \left(1 + \frac{K}{T} \sqrt{\rho_{\parallel}^2 + \frac{T_0}{T} m^2}\right)}. \quad (4.25)$$

Формулы (4.22-4.25) описывают экспериментальные данные несколько хуже, чем формулы (4.7), (4.17), (4.18) и (4.20).

На примерах, приведенных выше, нетрудно убедиться в том, какую значительную информацию мы теряем, пренебрегая корреляционной связью ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} . Учет же последней приводит к хорошему согласию расчета с экспериментом как в нуклон-нуклонных, так и в π -мезон-нуклонных взаимодействиях с большим числом частиц ($n_s \gtrsim 1,5 \langle n_s \rangle$), где n_s - множественность. Возможно, что двухтемпературная статистическая термодинамическая модель может дать согласие с экспериментом и при меньших n_s , однако этот вопрос, как и физическое обоснование наличия двух, а может и большего количества температур в объеме взаимодействия, требует специального исследования.

§4. Перспективы использования фотометода при энергии 200 Гэв.

В настоящее время в США разработан и запущен ускоритель элементарных частиц с энергией 200 Гэв. В связи с этим интересно исследовать возможность измерения импульсов вторичных частиц во взаимодействиях, образованных в ядерной фотоэмульсии при такой энергии.

Во второй главе (§4) показано, что если $\rho_{\text{вс}}$ вторичных частиц находить по их многократному рассеянию методом корреляционных моментов, то относительная ошибка $\rho_{\text{вс}}$ определяется формулой (2.70). Величина ошибки существенно зависит от числа измеренных вторых разностей, т.е. от длины следа L , и отношения величин ложного и кулоновского рассеяний $\mu = \frac{\langle \mathcal{D}_{in}^2 \rangle}{\langle \mathcal{D}_{ik}^2 \rangle}$. Задавись максимально возможной ошибкой $\delta\rho_{\text{вс}}/\rho_{\text{вс}}$, длиной следа L и зависимостью ложного рассеяния от длины ячейки t , легко найти верхнюю границу для $\rho_{\text{вс}}$, которое можно измерить с такой ошибкой. Заметим, что при $E_0 = 200$ Гэв приблизительно 80% вторичных частиц будут иметь энергию меньше 30 Гэв. Величину $\rho_{\text{вс}}$ таких частиц можно найти со средней относительной ошибкой $\langle \delta\rho_{\text{вс}}/\rho_{\text{вс}} \rangle \sim 12\%$, измеряя их многократное рассеяние на длине $L = 6$ см и используя метод корреляционных моментов. Максимальная ошибка для $L = 6$ см при энергии 30 Гэв составляет $\sim 22\%$. Если для ошибки $\delta\rho_{\text{вс}}/\rho_{\text{вс}}$ взять значение 30%, а многократное рассеяние измерять на длине $L \approx 12$ см, то верхняя граница измеримых $\rho_{\text{вс}}$ доходит до 100 Гэв.

Для получения этих оценок мы предположим, что импульсное распределение частиц в С.Ц.М. описывается формулой Планка

$$f(p) \approx \frac{p^2}{\exp\left(\frac{1}{T} \sqrt{p^2 + m^2}\right) - 1}$$

с температурой $T < 0,35$ Гэв (в работе /107/ при $E_0 \geq 200$ Гэв $T < 0,35$ Гэв), а ложное рассеяние таково же, как и в эмульсии НИИХИМФОТО БР-2, облучавшейся на Серпуховском ускорителе /73/.

Измерять $\rho_{\text{вс}}$ по многократному рассеянию на отдельных следах с энергией больше 100 Гэв практически не имеет смысла, т.к. это связано с большой ошибкой и необходимостью проводить измерения на очень длинных отрезках следа, что не всегда возможно. Однако, в некоторых случаях можно оценить величину $\rho_{\text{вс}}$ с ошибкой, не превышающей 30% вплоть до 200 Гэв, если использовать вариант метода относительного рассеяния, предложенный в работе /29/. Для следов частиц, расходящихся в плоскости эмульсии не более, чем на 50 мк, а по глубине не более, чем на 20 мк, средний квадрат относительной второй разности многократного кулоновского рассеяния можно найти по формуле

$$\langle {}^n D_{12ki}^2 \rangle = \langle {}^n D_{1ki}^2 \rangle + \langle {}^n D_{2ki}^2 \rangle = \frac{4}{n g(1)} \langle {}^n D_{12i} {}^n D_{12(i+1)} \rangle, \quad (4.26)$$

где ${}^n D_{12i} = {}^n D_{1i} - {}^n D_{2i}$ - измеренные относительные вторые разности, а ${}^n g(1)$ - коэффициент, определяемый соотношением (1.71). Относительная ошибка оценки (4.26) при $n \geq 4$ равна

$$\frac{\delta {}^n D_{12k}}{{}^n D_{12k}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \left(0,528 + \frac{0,528}{n} \mu + \frac{0,487}{n} \mu^2 \right)^{1/2}, \quad (4.27)$$

где $\mathcal{M} = \frac{2\langle \mathcal{D}_{i\mu}^2 \rangle}{\langle \mathcal{D}_{1ki}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}_{2ki}^2 \rangle}$, а \mathcal{N} - число вторых разностей ${}^n \mathcal{D}_{ni}$.

Если измерить рассеяние вторичного следа относительно первичного на длине $L \sim 3,5$ см, то при $t = 5$ мм и $n = 25$ можно оценить величину $\rho_{\text{вс}} = 200$ Гэв с ошибкой $\sim 30\%$. При $L = 6$ см эта ошибка уменьшается до 20%. Естественно, что наибольшую трудность при этом представляет отыскание первичного следа, отстоящего в плоскости эмульсии от заданного вторичного не более, чем на 50 мк на заданной длине L .

Очевидно поэтому, что таким образом можно оценить $\rho_{\text{вс}}$ не для всех вторичных частиц с энергией > 100 Гэв. Учитывая, однако, что доля таких частиц во взаимодействиях при энергии 200 Гэв мала и что в некоторых случаях имеется возможность измерить относительное рассеяние на тройках вторичных частиц, заключаем, что метод ядерных фотоэмульсий может быть использован для изучения $\pi\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}\mathcal{N}$ взаимодействий вплоть до энергий порядка 200 Гэв.

В ы в о д ы.

1). Предложен экспериментальный способ нахождения корреляционной функции вторых разностей, основанный на свойствах перекрывающихся ячеек. Получены выражения для корреляционных и спектральных функций многократного кулоновского рассеяния и шумов. (Глава I).

2). Анализируется метод исключения шумов, основанный на корреляционных свойствах перекрывающихся ячеек. Этот метод в отличие от других позволяет исключить шумы с любой заданной точностью. Описан наиболее общий способ исключения дисторсий любого порядка.

3). Изучена корреляционная функция ложного рассеяния и найдено выражение, хорошо аппроксимирующее экспериментальные данные. На основании этого показаны недостатки модели ложного рассеяния, предложенной Яноши. Приблизительно линейный рост ложного рассеяния при малых длинах ячеек t и резкое его уменьшение при очень больших t объяснены специфическим характером корреляционной функции этого рассеяния.

4). Предложен новый метод оценки величины D_k , характеризующей многократное кулоновское рассеяние. Метод основан на корреляционных свойствах многократного кулоновского рассеяния, ложного рассеяния и шумов. Эффектив-

ность этого способа оценки D_K больше, чем у других известных методов.

5). Показано, что многие формулы, используемые для оценки D_K , ρ и т.п. дают смещенные значения этих величин. Приводится таблица, с помощью которой можно найти эти смещения для коротких следов с малым числом вторых разностей N . На основании полученных данных объяснено расхождение теоретических и экспериментальных значений параметра ρ для многократного кулоновского рассеяния (глава II).

6). Показано, что расхождения экспериментальных и теоретических величин постоянной многократного кулоновского рассеяния K при больших t нет. Заниженные же экспериментальные оценки объясняются двумя причинами методического характера: малым объемом выборки, вызывающим смещение некоторых величин, используемых при вычислении K , и ограничениями на поперечное рассеяние частиц, накладываемыми конечными размером поля зрения микроскопа и фиксированной толщиной эмульсионного слоя. Приведены данные, позволяющие рассчитать величину методического занижения K для любых экспериментальных условий. Специальные измерения подтвердили количественные расчеты занижения оценок постоянной рассеяния K при больших t . Описанные эффекты практически не влияют

на результаты измерений $\rho\beta c$ вторичных частиц.

7). Сравнение импульсных распределений вторичных π -мезонов из πN взаимодействий в ядерной фотоэмульсии при энергии 60 Гэв с расчетами по мультипериферической модели, сделанными Де Таром, показало, что эти распределения для событий с малой и средней множественностью ($n_s \leq 8$) не могут быть описаны такой моделью. В то же время импульсные спектры вторичных π -мезонов для событий с большой множественностью ($n_s \geq 9$) качественно согласуются с расчетами Де Тара.

8). Предложен новый способ учета корреляции продольных и поперечных импульсов в двухтемпературной статистической термодинамической модели, впервые описанной Вэйландом и Боуэном. Этот способ не нарушает общего характера построения двухтемпературной модели.

9). Показано, что двухтемпературная статистическая термодинамическая модель с некоррелированными продольными $p_{||}$ и / поперечными p_{\perp} импульсами, удовлетворительно описывая распределения $f(p_{||})$ и $f(p_{\perp})$, практически не описывает зависимость $\langle p_{\perp} \rangle$ от $p_{||}$, двойное дифференциальное сечение $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p \partial \Omega}$ и угловое распределение $\frac{\partial \sigma}{\partial \cos \theta}$ для вторичных частиц из πN и pp взаимодействий. Учет же этой корреляции приво-

дит к хорошему согласию двухтемпературной модели с экспериментальными данными из πN и NN взаимодействий с большим числом частиц в конечном состоянии в диапазоне энергий 8 — 60 ГэВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор глубоко признателен академику АН КазССР профессору Такибаеву Ж.С. и канд. физ.-мат. наук Часникову И.Я., поставившим задачу усовершенствования существующей методики определения энергии частиц в ядерных фотоэмульсиях; Стрельцову И.С., Виноцкому А.Х., Локтионову А.А., Лукину Ю.Т., Инчину А.С., Секееву К. и всему коллективу лаборатории мезон-ядерных реакций ИФВЭ АН КазССР, непосредственная помощь и поддержка которых во многом помогла автору при выполнении этой работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Goudsmit S.A., Sounderson J.L.-Phys.Rev., 57, 24, 1940.
2. Goudsmit S.A., Sounderson J.L.,-Phys.Rev., 58, 36, 1940.
3. Molière G.-Z.Naturforsch., 2a, 133, 1947.
4. Fermi E.-Z.Physik., 48, 73, 1928.
5. Williams E.J.-Phys.Rev., 58, 292, 1940.
6. Olbert S.-Phys.Rev., 87, 319, 1952.
7. Annis M., Bridge H.S., Olbert S.-Phys.Rev., 89, 1216, 1953.
8. Cooper L.N., Rainwater J.-Phys.Rev., 97, 492, 1955.
9. Тер-Микаэлян М.Л.-ЖЭТФ, 36, 253, 1959.
10. Williams E.J.-Proc.Roy.Soc., A169, 531, 1939.
11. Компанец А.С.-ЖЭТФ, 15, 235, 1945.
12. Molière G.-Z.Naturforsch., 3a, 78, 1948.
13. Snyder H.S., Scott W.T.-Phys.Rev., 76, 220, 1949.
14. Lewis H.W.-Phys.Rev., 78, 526, 1950.
15. Solntseff N.-Nucl.Phys., 4, 337, 1957.
16. Nigam B., Sundaresau M., Wu T.-Phys.Rev., 115, 491, 1959.
17. Bethe H.A.-Phys.Rev., 89, 1256, 1953.
18. Mukherjee S.-Phys.Rev., 162, 254, 1967.
19. Molière G.-Z.Naturforsch., 10a, 177, 1955.
20. Moyal J.E.-Phil.Mag., 41, 1058, 1950.
21. D'Espagnat B.-Compt.Rend., 232, 800, 1951.
22. D'Espagnat B.-J.Phys.et Radium., 13, 74, 1952.
23. Schonland D.-Proc.Phys.Soc., A65, 640, 1952.
24. Scott W.T.-Rev.Mod.Phys., 35, 231, 1963.
25. Росси Б.-Частицы больших энергий. Гостехизд., М., 1955.
26. Rossi B., Greisen K.-Rev.Mod.Phys., 13, 240, 1941.
27. Scott W.T.-Phys.Rev., 85, 245, 1952.
28. Barkas W.-Nucl.Research Emulsions, vol I, N.Y., 1963.

29. Воинов В.Г., Часников И.Я. Многократное рассеяние частиц в ядерных фотоэмульсиях. Изд. "Наука" АН КазССР, А-Ата, 1969.
- 30 Hanson A. et al. - Phys. Rev., 84, 634, 1951.
- 31 Fouler P.H. - Phil. Mag., 41, 169, 1950.
- 32 Voyvodic L., Pickup E. - Phys. Rev., 85, 91, 1952.
- 33 Sood P.M., Ahuja S. - Ind. J. Pure Appl. Phys., 5, 132, 1967.
- 34, Пугачев В.С. Теория случайных функций. ФМ, М., 1962.
35. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. "Мир", М., 1965.
36. Воинов В.Г., Часников И.Я. - Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 4, 3, 1967.
- 37 Király P. - VI Int. Conf. on Nucl. Phot., Florence, 1966.
- 38 Biswas S., et al. - Proc. Ind. Acad. Sci., 44, 154, 1955.
39. Ekspong A.G. - Arkiv fysik, 9, 49, 1954.
40. Скирда Н.В. - Ж. научн. и прикл. фот. и кинематогр., 12, 12, 1967
41. Такибаев Ж.С., Шахворостов В.Н. - ЖЭТФ, 26, 507, 1954.
42. Gottstein K. - Nuovo Cim. Suppl., 12, 619, 1954.
43. Долинский И.М. и др. - ПТЭ, 4, 51, 1966.
44. Бонетти А., Дилворз С., Пелк С., Скарси Л. Ядерные эмульсии. Физматгиз, М., 1961.
45. Greiner D. - Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, 1964.
46. Déraux B. - Ann. de Phys., 6, 86, 1961.
47. Déraux B., Tsai-Chü. - Compt. Rend., 249, 2187, 1959.
48. Воинов В.Г. - Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 4, 61, 1968.
49. Dentan I.P. 2nd Int. Conf. on Nucl. Phot. Montreal, 1959.
50. Kreker U. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, 1964.
51. Barkas W. et al. - Phys. Rev., 98, 605, 1955.
52. Apostolakis A., Major I. - Brit. J. Appl. Phys., 8, 9, 1957.
53. Dahl-Jensen E. Korpuskularphotographie. IV. München, 1963.
54. Аюпова А. и др. - Ж. научн. и прикл. фот. и кинематогр., 12, 266, 1967.
55. Biswas S. et al. - Pros. Ind. Acad. Sci., 46, 167, 1957.

56. Yash Pal, Ray A.K. - *Nuovo Cim.*, 27, 960, 1963.
57. Fisher E.W., Lord J.J. - *Nuovo Cim.*, II, 44, 1959.
58. Aditya P.K. et al. - *Nuovo Cim.*, 29, 577, 1963.
59. Гайтинов А.Ш. и др. - ПТЭ, 3, 54, 1966.
60. Ван-Шу-Фень и др. - Препринт ОИЯИ, Р-523, Дубна, 1960.
61. Jones J.J., Kalbach R.M. - *Nuovo Cim.*, 31, 10, 1964.
62. Мыльцева В.А. и др. - Препринт ОИЯИ, 3501, Дубна, 1967.
63. Богомолов К.С., Воинов В.Г., Мыльцева В.А., Часников И.Я.,
Препринт ОИЯИ, I-3974, Дубна, 1968.
64. Турсунов Р.А. и др. - Ядерная фотография. Изд. АН СССР., 1962.
65. Lagnaux J., Renard P. - *Bull. C. Phys. N. U. L.*, Bruxelles, 3, 12, 62.
66. Kamal A.A. et al. - *Nuovo Cim.*, 32, 863, 1964.
67. Rao G., Kamal A., Vth Int. Conf on Nucl. Phot, Geneva, 1964.
68. Lavakare P., Sudarshan E. - *Nuovo Cim. Suppl.*, 26, 251, 1962.
69. Kalaschnikov N.P. - *Nuovo Cim.*, 45a, 510, 1966.
70. Jánossy L. et al. - *Nuovo Cim. Suppl.*, 3, 281, 1965.
71. Fowler P., Waddington C. - *Phil. Mag.*, I, 637, 1956.
72. Часников И.Я., Такибаев Ж.С., Боос Э.Г., - ПТЭ, I, 54, 1959.
73. Воинов В.Г., Инчин А.С., Стрельцов И.С. - Изв. АН КазССР,
серия физ.-мат., 4, 85, 1970.
74. Часников И.Я. - Труды ИЯФ АН КазССР, 3, 64, 1960.
75. Jánossy L. - *Acta Phys. Hung.*, 7, 385, 1957.
76. Часников И.Я. и др. - ЖЭТФ, 45, 29, 1963.
77. Hossain A. et al. - *Nuovo Cim.*, 22, 308, 1961.
78. Wong E., Jain P. - *Nuovo Cim.*, 56a, 922, 1968.
79. Hossain A. et al. - *Nuovo Cim.*, 22, 861, 1961.
80. Agnese A. et al. - *Acta Phys. Hung.*, 25, 7, 1968.
81. Aditya P.K. - *Ind. J. Phys.*, 40, 238, 1966.
82. Marsari-Chiesa A., Wataghin A. - *Nuovo Cim. Suppl.*, 26, 279, 1962

83. Воинов В.Г., Часников И.Я. - ЯФ, 10, 988, 1969.
84. Montret J. et al. - J. de Phys., 31, 163, 1970.
85. Fichtel C., Friedländer M. - Nuovo Cim., 10, 1032, 1958.
86. Hanson A. et al. - Phys. Rev., 84, 634, 1951.
87. Алиханян А.И., Арутюнов Ф.Р. - ЖЭТФ, 36, 32, 1959.
88. Анзон Э.В. и др. - ЯФ, 10, 991, 1969.
89. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. Изд. "Наука", М., 1965.
90. Науэлл С., Фаулер П., Перкинс Д. Исследование элементарных частиц фотографическим методом. ИЛ., М., 1964.
91. Anzon E.V. et al. - Phys. Lett., 31B, 237, 1970.
92. Виницкий А.Х. и др. - Труды ИЯФ АН КазССР, 6, 1963.
93. Анзон Э.В. и др. - Труды ИЯФ АН Каз ССР, 7, 1967.
94. Абдрахманов Б.О. и др. - сб. "Физика высоких энергий и космических лучей", изд. "Наука" АН КазССР, А-Ата, 1971.
95. Анзон Э.В. и др. - Препринт ОИЯИ, PI-5072, Дубна, 1970.
96. De Tar C.E. - Phys. Rev., 3D, 128, 1971.
97. Фейнберг Е.Л. - УФН, 104, 539, 1971.
98. Wayland J.R., Bowen T. - Nuovo Cim., 48A, 663, 1967.
99. Fermi E. - Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950.
100. Померанчук И.Я. - ДАН СССР, 78, 889, 1951.
101. Ландау Л.Д. - Изв. АН СССР, сер. физич., 17, 51, 1953.
102. Hagedorn R. - Suppl. Nuovo Cim., 3, 147, 1965.
103. Hagedorn R., Ranft J. - Suppl. Nuovo Cim., 6, 169, 1968.
104. Dekkers D. et al. - Phys. Rev., 137B, 962, 1965.
105. Bøggild H. et al. - Nucl. Phys., 27B, 285, 1971.
106. Такибаев Ж.С. и др. - ЯФ, 15, 62, 1972.
107. Gabunia L.L. et al. - Preprint Inst. Phys. of Academy of Sciences of the GSSR., Tbilissi, 1971.