

СЗУч.1  
В-651



В. Г. ВОИНОВ  
И Я. ЧАСНИКОВ

МНОГОКРАТНОЕ  
РАССЕЯНИЕ  
ЧАСТИЦ  
В ЯДЕРНЫХ  
ФОТОУМУЛЬСИЯХ

КАМПИНА АКАД. 1969

Публикации в порядке обмена просим направлять нам по адресу: Москва, Главпочтамт, п/я 79, НТБ. Репринты, пожалуйста, не присылайте.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH  
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ • НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
PUBLISHING DEPARTMENT • БИБЛИОТЕКА  
SCIENTIFIC LIBRARY



БЕСПЛАТНЫЙ ОБМЕН ПУБЛИКАЦИЯМИ  
Free Exchange of Scientific Information

Please, send the publications on the exchange basis at the address: Scientific Library, Joint Institute for Nuclear Research, Head Post Office, P.O. Box 79, Moscow, U.S.S.R. BUT do not send REprints.

- 91873 -

АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В. Г. ВОИНОВ, И. Я. ЧАСНИКОВ

СЗУЧ.1  
В-657

МНОГОКРАТНОЕ  
РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ  
В ЯДЕРНЫХ ФОТОЭМУЛЬСИЯХ



Издательство "НАУКА" Казахской ССР  
АЛМ-АТА-1969

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

В предлагаемой книге анализируются экспериментальные и теоретические данные по многократному кулоновскому рассеянию заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях. Сравняются различные методы определения энергии частиц по измерениям этого рассеяния и оценивается их эффективность. Показана необходимость уточнения существующих теорий многократного кулоновского рассеяния.

Книга рассчитана на физиков-экспериментаторов, работающих в области физики частиц, высоких энергий и космических лучей, аспирантов и студентов старших курсов.

Таблиц 9, рисунков 37, библиографических ссылок 148.

Ответственный редактор  
Ю. Т. ЛУКИН

#### ОТ АВТОРОВ

Энергия заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях обычно определяется с помощью измерения многократного кулоновского рассеяния. Этот метод широко используется в ядерной физике и физике космических лучей. Многократное кулоновское рассеяние изучалось многими исследователями, обсуждалось на различных совещаниях и международных конференциях по ядерной фотографии. Однако до сих пор нет единого подхода к проблеме исключения ложного рассеяния и других помех, мешающих определению энергии частиц.

Авторы книги стремились по возможности полно проанализировать свойства кулоновского рассеяния, ложного рассеяния, различных шумов и дисторсий. Для этой цели наряду с другими был применен метод корреляционного анализа. Некоторые приведенные данные могут быть использованы при определении энергии частиц в пузырьковых и других камерах.

Значительную часть книги составляют результаты работ, выполненных в Институте ядерной физики АН КазССР. Некоторые из них публикуются впервые.

Авторы глубоко признательны академику АН КазССР профессору Ж. С. Такибаеву, поставившему в свое время задачу об определении энергии ливневых частиц по измерению многократного рассеяния в ядерных фотоэмульсиях и полностью интересовавшемуся ходом ее решения. Мы обязаны фотоэмульсионным

Комитетам ОИАИ и ЦЕРНА, предоставившим нам возможность работать с эмульсиями, облученными на участках Дубны, Женевы и Серпухова. Выражаем свою благодарность К. С. Богомолову, Э. Г. Боссу, В. М. Иваненко и другим, сделавшим замечания при редактировании книги, К. Семенову, написавшему приложение, а также Л. И. Явтушенко и В. А. Мистюк за помощь в оформлении рукописи.

В. Г. Волков, И. Я. Часников.

## Глава I

### МЕТОД ЯДЕРНЫХ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ ЭМУЛЬСИИ

Еще в 1910—1911 гг. было известно, что с помощью фотографических слоев можно обнаружить не только потоки частиц, вызывающих сплошное почернение эмульсии, но и следы отдельных сильно ионизирующих частиц. Заряженная частица, проходя через фотоэмульсию, активизирует на своем пути кристаллы галогенидов серебра и делает их способными к проявлению. После специальной обработки эмульсионных слоев в них появляются следы частиц в виде цепочек проявленных зерен, хорошо видных под микроскопом. В этом и заключается метод ядерных фотографических эмульсий. Этот метод регистрации ионизирующих частиц получил широкое распространение благодаря работам Л. В. Мыевского, А. П. Жданова и других, которые впервые изготовили толстослойные ядерные фотографические эмульсии [1, 2]. Позже были созданы специальные эмульсии, способные регистрировать частицы любых энергий. Наибольшее распространение получили эмульсии типа Илльфорда G-5, созданные при активном участии английских физиков, и эмульсии НИКФИ-Р, созданные в лаборатории К. С. Богомолова. Существенный вклад в развитие специальных метковерстных эмульсий внесли Н. А. Перфилов, П. Демерс и др. Вопросы развития фотоэмульсионного метода подробно изложены в работах [3, 4, 5].

В последние два-три года с помощью фотоэмульсионного метода открыты т-мезоны, К-мезоны; обнаружены тяжелые ядра в первичном космическом излучении и т. д. По измерениям многократного кулоновского рассеяния

получены важные для теории энергетические характеристики частиц, образовавшихся в ядерных взаимодействиях.

В конце пятидесятих годов метод толстослойных ядерных фотоэмulsionей стал одним из основных при регистрации заряженных частиц.

### § 1. Толстослойные ядерные фотографияческие эмульсии

Толстослойные ядерные фотографияческие эмульсии отличаются от эмульсий, используемых в обычной практической фотографии, толщиной эмульсионного слоя, концентрацией галогенного серебра и желатина. Слои ядерных эмульсий в 10—100 раз толще, а содержание галогенного серебра в них в 8 раз больше обычного. Галогенное серебро (в основном бромистое) находится в эмульсии в виде микрокристаллов, размеры которых колеблются от 0,03 до 0,6 мк. Так, средние размеры микрокристаллов в эмульсии Kodak NT-4 — 0,4 мк, НИКФИ-Р — 0,28 мк, Илльфорд G-5 — 0,27 мк, Истмен-NTB — 0,25 мк, Демерс-II — 0,06 мк, Перфидол и др. — 0,03 мк и т. д. Основные характеристики наиболее распространенных ядерных фотоэмulsionей даны в таблице 1 [4, 6, 7].

Таблица 1

Тип эмульсии	Содержание AgHal в 1 г эмульсии	Плотность эмульсии, г/см <sup>3</sup>	Остаточная влажность, %
Илльфорд G-5	0,8275 ± 0,0270	3,828 ± 0,018	2,50
НИКФИ-Р	0,8284 ± 0,0011	3,950 ± 0,021	2,21
НИКФИ-ВР	0,8252 ± 0,0037	3,945 ± 0,050	2,60

В состав ядерной эмульсии кроме галогенного серебра входят желатин, пластификатор и вода. Желатин и пластификатор содержат водород, углерод, кислород, азот и серу. Концентрация элементов в граммах на грамм эмульсии приведена в таблице 2.

Таблица 2

Элемент	Тип эмульсии		
	Илльфорд G-5	НИКФИ-Р	НИКФИ-ВР
Ag	0,4747	0,4701	0,4742
Br	0,3495	0,3485	0,3500
I	0,0031	0,0013	0,0013
C	0,0724	0,0749	0,0716
H	0,0139	0,0134	0,0129
O	0,0650	0,0671	0,0665
N	0,0193	0,0240	0,0229
S	0,0018	0,0006	0,0006

Пластификатор (обычно глицерин) используется для уменьшения хрупкости эмульсии. Чтобы провести точные количественные измерения многократного рассеяния, углов разлета частиц, образовавшихся в результате взаимодействия в ядерных эмульсиях, и других физических величин, кроме характеристик, приведенных в таблицах 1 и 2, необходимо знать коэффициент усадки эмульсии, характеризирующий изменение толщины слоя, а также различного рода деформации, возникающие в процессе обработки (ложное рассеяние, С- и S-образные дисторсии и т. п.).

Подробные сведения о характеристиках ядерных эмульсий, методах их обработки, хранения, о природе образования следов заряженных частиц, методах анализа и т. п. можно найти в работах [3—10] и в материалах международных конференций и совещаний по фотометоду.

### § 2. Преимущества и недостатки фотометода

Ядерные фотографияческие эмульсии используются для регистрации и анализа следов заряженных частиц любой энергии. По измеренным характеристикам этих слоев можно определить заряд частицы, массу и скорость. Время чувствительности ядерных эмульсионных пластинок определяется временем их экспозиции, кото-

рое может быть порядка нескольких недель. В течение этого времени ядерная эмульсия регистрирует все заряженные частицы, проходящие через нее, в отличие от камер Вильсона и других приборов, время чувствительности которых — доли секунды. К преимуществам этого метода относятся также и небольшая вес, компактность, механическая прочность ядерных эмульсий и способность регистрировать частицы в широком диапазоне температур.

Благодаря высокому пространственному разрешению фотометод с успехом применяется при измерении углов разлета частиц, образовавшихся в результате ядерного взаимодействия, а также при анализе распада различных частиц и типерадер. По точности измерения малых углов фотометод не имеет себе равных. С помощью фотометода можно изучать частицы с малым временем жизни ( $10^{-10}$  сек и меньше), которые с ядрами, определять магнитные моменты типеронов, измерять сечение фрагментации и т. п. По измеренным многократного рассеяния и ионизации в ядерных фотоэмульсиях возможна непосредственная идентификация вторичных частиц из индивидуальных событий вплоть до импульсов порядка  $20 \text{ Гэв/с}$ . В пузырьковых жидководородных камерах, широко распространенных в экспериментах на ускорителях, непосредственная идентификация частиц по измеренным импульсам и ионизации возможна до импульсов порядка  $2 \text{ Гэв/с}$ . Поэтому полностью информативно об индивидуальных взаимодействиях частиц в пузырьковых, искровых и других камерах можно получить в том случае, если число зарегистрированных частиц невелико, а число нейтральных частиц не более одной (в пузырьковых камерах частицы одного знака заряда идентифицируются с помощью кинематики и законов сохранения). Трудности идентификации частиц в пузырьковых камерах, особенно при большой множественности, приводят к заметной дискриминации событий. С увеличением энергии первичной частицы множественность вторичных частиц растет и в соответствии с этим увеличивается дискриминация изучаемых событий.

При проведении экспериментов на ускорителях фотометод не требует больших затрат времени работы

ускорителя. Расходы на аппаратуру также относительно малы даже в случае, когда эмульсия облущается в сильном магнитном поле. Облучение эмульсии в присутствии магнитного поля расширяет возможности фотометода: частицы можно различать по знаку заряда, а точность в определении импульса частиц увеличивается. Фактически точность в определении импульса частиц в эмульсиях, облученных при наличии магнитного поля, определяется его напряженностью, искажениями эмульсии и многократным кулоновским рассеянием частиц\*. Небольшие затраты на проведение фотомульсионных работ, простота транспортировки эмульсионных стопок — все это важно для исследованияских групп и небольших лабораторий, удаленных от мест облучения.

Однако фотометоду, как и любому другому методу, присущи и недостатки, наиболее серьезные из них перечислены ниже.

Сложность состава вещества фотомульсии не позволяет однозначно ответить на вопрос, с каким ядром произошло взаимодействие налетающей частицы. Правда, этот недостаток можно устранить, если ввести в эмульсию известные элементы в виде металлических проводочек [11, 12], крупинки [13] и т. п. Известно, что ~40% полного числа атомов в  $1 \text{ см}^3$  эмульсии составляют атомы водорода, но отобрать случаи взаимодействия частиц на свободных протонах довольно трудно. Несмотря на то, что существуют различные критерии отбора взаимодействий частиц на свободных и квазисвободных протонах, неуверенность в чистоте мишени остается. В этом отношении жидководородные пузырьковые камеры имеют большие преимущества.

Если в ядерных эмульсиях незначительные потери частиц можно практически измерять с точностью 1—2%, что существенно выше точности определения ионизационных потерь в пузырьковых камерах, то импульсы частиц измеряются менее точно. Фотометод также уступает методу пузырьковых камер в скорости обработки событий взаимодействия частиц.

\* Многократное кулоновское рассеяние необходимо также учитывать и при определении импульса частиц в пузырьковых и других камерах, помещенных в магнитное поле.

### § 3. Приборы для измерения многократного рассеяния

Для поиска и обработки событий взаимодействия частиц в ядерной фотоэмульсии обычно применяются биноккулярные микроскопы [14]. В различных лабораториях мира широко используются отечественные микроскопы МБИ-8М, МБИ-9; микроскопы Лейтц (Ортолюкс), Користка-MS2, Користка-R4, КСМ-1 фирмы «Карл Цейсс»; микроскопы фирмы «Кук, Трултон и Симмс» и др.

Так как процессы обработки нужных событий в ядерной фотоэмульсии чрезвычайно трудоемки и, следовательно, необходима информатизация накопивающейся медленно, предприняты довольно успешные попытки автоматизации этих процессов. В автоматизации измерений возможны два пути — создание полностью автоматизированных микроскопов, осуществляющих слежение и фиксирование координат следа, или же полуавтоматических приборов, когда слежение осуществляется оператором. Результаты измерений, полученные на полуавтоматических и автоматических микроскопах, как правило, обрабатываются на электронных вычислительных машинах. В работах [15, 16] описывается действующий макет телевизионной установки, которая в сочетании с высококачественным микроскопом автоматически прослеживает и измеряет координаты следа в горизонтальной плоскости, т. е. в плоскости эмульсионного слоя. Авторы указывают, что их установка может быть использована и для слежения за треком по вертикали. В работах [17, 18] описано устройство для автоматического прослеживания треков в эмульсиях, измерения рассеяния, длин пробегов и т. п. Доступная для автоматического просмотра площадь —  $20 \times 20$  см, скорость слежения — до 10 м/мин. В Физическом институте АН СССР разработан прибор для автоматических измерений в ядерных фотоэмульсиях методом телевизионного растра [19—21]. Прибор позволяет автоматически следить за заданным следом по трем координатам и регулярно выдавать текущие значения координат, времени, затрачиваемого на продвижение до очередных координат, а также ионизационные характеристики следа; отыскивать следы заданного направления с авто-

матическим продвижением вдоль них; измерять многократное рассеяние избранного следа. Цифровые данные по рассеянию регистрируются на перфокартах, которые затем обрабатываются на электронной вычислительной машине. К сожалению, подобные автоматические установки существуют в единственных экземплярах и, как правило, очень дороги. Кроме того, они требуют высококачественного обслуживания.

Ленинградское объединение оптико-механических предприятий при научном руководстве Ленинградского физико-технического института имени А. Ф. Иоффе разработало несколько микроскопов для работ с ядерными эмульсиями: МШЭ-1 — для поиска событий, МИЭ-1 и МИЭ-2 — для измерения геометрических характеристик следов, МИЭ-1 и МИЭ-2 — для измерения многократного рассеяния, МИЭ-1 — для измерения ионизации на следах однозарядных и многозарядных частиц и др. Наиболее удобный и надежный прибор для измерения многократного рассеяния МИЭ-2 [22] (рис. 1) имеет оптическую систему с увеличением 273×



Рис. 1. Полуавтоматический микроскоп МИЭ-2.

— 2632 для визуального наблюдения следов в эмульсии. Припарат в горизонтальной плоскости автоматически перемещается на длину  $l=1, 3, 10, 50, 100, 500$  и  $1000$   $\mu\text{м}$  (полная длина  $L=6$   $\text{см}$ ). Скорость перемещения регулируется в пределах  $22-350$   $\mu\text{м}/\text{сек}$ . На предметном столике могут закрепляться пластинки размером  $120 \times 220$   $\mu\text{м}$ . Диапазон перемещения объектива по вертикали  $\pm 0,5$   $\text{м.м}$ . Шум столика, имеющего фторопластовые направляющие, не превышает  $0,03$   $\mu\text{м}$  на ячейке  $l=500$   $\mu\text{м}$ . Для измерения собственных шумов прибор снабжен многолучевым интерференционным устройством. Значения координат фиксируются позиционным преобразователем угла поворота в двоичный код; цена наименьшего разряда преобразователя  $0,025$   $\mu\text{м}$ . Координаты следа автоматически наносятся на стандартную телеграфную ленту с помощью перфоратора. Результаты измерений обрабатываются на электронных вычислительных машинах типа «Минск». Работа оператора на МИР-2 сводится к отысканию необходимого следа, выставлению его приблизительно параллельно направлению перемещения столика, подведению биштриха окулярмикрометра к точкам следа и нажатие кнопки «запись». При этом автоматически фиксируются координаты на перфоленге, и столик микроскопа перемещается на ячейку  $l$ , затем вся процедура повторяется. Эксплуатация полуавтоматических микроскопов МИР-2 в Ленинградском ФТИ АН СССР и в Институте ядерной физики АН КазССР показала, что производительность труда по сравнению с ручным способом повышается в среднем в 10 раз. В ИЯФ АН КазССР микроскопы МИР-2 для удобства перемещения биштриха окулярмикрометра снабжены дополнительными электро-двигателями. Это позволяет увеличить скорость обработки следов частиц, имеющих большой средний угол многократного рассеяния.

Несмотря на то, что в различных странах мира имеются разнообразные приборы для фотомультиплексной работы, конструкции новых автоматических и полуавтоматических микроскопов постоянно разрабатываются.

## Глава II

### ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЙНИЯ

#### § 1. Сечение упругого кулоновского рассеяния

Упругим рассеянием называется такой процесс взаимодействия двух частиц, при котором суммарная энергия частиц сохраняется и только перераспределяется между ними, при этом частицы изменяют направление своего движения. Согласно Резерфорду, дифференциальное поперечное сечение упругого кулоновского рассеяния, рассчитанное на единицу длины, при условии, что масса рассеивающего центра много больше массы налетающей частицы,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4 (p^2 c)^2} \cos^4 \frac{\Theta}{2}, \quad (1.2)$$

где  $z_1 e$ ,  $p$  и  $\beta c$  — соответственно заряд, импульс и скорость налетающей частицы;  $z_2 e$  и  $N$  — соответственно заряд и число рассеивающих центров в  $1 \text{ см}^2$ ;  $\Theta$  — пространственный угол рассеяния;  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Выражение (1.2) для поперечного сечения рассеяния получено в предположении, что электрическое поле атома совпадает с полем точечного заряда  $z_2 e$ . Конечные размеры ядра, а также экранирование его поля внешними электронами ограничивают справедливость этого выражения определенным интервалом углов  $\Theta$ .

Рассмотрим влияние экранирования поля ядра атомными электронами. Сущность экранирования состоит в том, что электроны, окружающие атом, значи-



Тельно уменьшают электрическое поле ядра на расстояниях порядка нескольких  $a_0 = \frac{h^2}{m e^2}$ . В результате этого сечение рассеяния частиц на малые углы оказывается меньше, чем это дает формула Резерфорда.

Используя различные модели распределения потенциала в атоме, можно количественно оценить влияние экранирования. Так, в первом борновском приближении поперечное сечение рассеяния для потенциала, задаваемого выражением  $V(r)$ , будет

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{NM_1^2}{4\pi^2 k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}} \left[ \int_0^\infty V(r) \sin \left( 2kr \sin \frac{\Theta}{2} \right) r dr \right]^2, \quad (2.2)$$

где  $M_1$  — масса налетающей частицы, а  $k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}$ . Если потенциальную энергию атома представить в виде

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - Z_1 e \int_0^\infty \frac{\rho(r') r'}{|r-r'|} dr', \quad (3.2)$$

где  $\rho(r')$  — плотность электрического заряда, создаваемого облаком электронов атома в точке  $r'$ , то дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4 (p^2 c)^2} \cdot \frac{[z_2 - F_a(\Theta)]^2}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}, \quad (4.2)$$

здесь  $F_a(\Theta) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin \left( 2kr \sin \frac{\Theta}{2} \right)}{2kr \sin \frac{\Theta}{2}} \rho(r) r^2 dr$  — атомный

формфактор.

Гулдсмит и Сандерсон [23, 24], используя потенциал электрического поля атома в форме  $V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - \frac{r_a}{r}$ , где  $r_a$  — радиус атома, получили следующие выражения для поперечного сечения рассеяния, справедливые и при малых значениях угла  $\Theta$ :

\*  $h = 6,5817 \cdot 10^{-27}$  дж·сек.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4N z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2} \cdot \frac{1}{(\Theta^2 + \Theta_{min}^2)^2}, \quad (5.2)$$

где  $\Theta_{min} = \frac{\lambda}{r_a}$ . Используя томас-ферминовское значение для радиуса атома, получим

$$\Theta_{min} = z_2^{1/3} \frac{\lambda}{r_e}, \quad (6.2)$$

где  $\lambda = \frac{e^2}{h c}$ , а  $r_e = \frac{e^2}{m c^2}$ . При  $\Theta \gg \Theta_{min}$  выражение (5.2) совпадает с формулой Резерфорда (1.2) (при малых углах  $\sin \frac{\Theta}{2} \approx \frac{\Theta}{2}$ ), но поперечное сечение рассеяния становится значительно меньше резерфордского при  $\Theta < \Theta_{min}$ . Следовательно, со стороны малых углов область, в которой применимо выражение (1.2), приближенно ограничена углом  $\Theta = \Theta_{min}$ . В работе Молвер [25] использовано приближенное выражение для потенциала  $V(r)$ , описываемого функцией Томаса — Ферми [26]:

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \left( 0,10 e^{-\frac{6r}{r_a}} + 0,55 e^{-\frac{1,3r}{r_a}} + 0,35 e^{-\frac{0,3r}{r_a}} \right). \quad (7.2)$$

При больших углах  $\Theta$  поперечное сечение рассеяния, полученное Молвер, описывается законом Резерфорда, а при малых углах — эквивалентно сечению, полученному в первом борновском приближении для выбранной модели атома. В работе Молвер введен единственный угловой параметр  $\Theta_a$ , приближенное выражение которого

$$\Theta_a = 1,063 h \sqrt{\beta^2 + \left( \frac{z_1 z_2}{75} \right)^2}, \quad (8.2)$$

где  $r_a$  — радиус атома в модели Томаса — Ферми ( $r_a = 0,885 z_2^{-1/3} \frac{h^2}{m e^2}$ ).

Выражение для дифференциального поперечного сечения рассеяния, выведенное Молвер, совпадает с (5.2),

если вместо  $\Theta_{m1n}$  подставить  $\Theta_a$ . Мольеровский вывод формулы для  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  подробно обоснован в исчерпывающем обзоре Скотта [27], Мавеский и Тигц [28], используя другую приближенную формулу томас-фермиевского распределения потенциала, получили сравнительно простое первое борновское приближение для поперечного сечения рассеяния частиц с зарядом  $z_1=1$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N g^2 \left[ \frac{0,285}{0,0605 + p^2} + \frac{0,581}{0,897 + p^2} + \frac{0,184}{18,975 + p^2} \right]^2 \quad (9.2)$$

здесь

$$g = \frac{3^{1/2} h^2 z_1^2}{2^{-1/2} \pi^{1/2} p^2 m}, \quad p = \frac{8^{1/2} h^2 c \sin \frac{\theta}{2}}{2^{1/2} \pi^{-1/2} p^2 z_1^2}$$

Томас и Умела [29], применяя более точную модель атома при  $z_2$  от 25 до 80, численно рассчитали атомный формфактор  $F_a(\Theta)$ . Баркас [4] аппроксимировал эти расчеты выражением

$$F_a(\Theta) \approx \frac{z_2}{1 + 3,3z_2^{1/2} x + 17,3z_2^{-1/2} x^2} \quad (10.2)$$

где  $x = 10^{-8} z_2^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2}$ . Подставляя формфактор (10.2) в формулу (4.2), получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4 (p^2 c)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 3,3z_2^{1/2} x + 17,3z_2^{-1/2} x^2} \right]^2 \quad (11.2)$$

Выражения для дифференциального поперечного сечения рассеяния, приведенные в этом параграфе, получены в предположении, что плотность электронного облака непрерывна. Чтобы оценить влияние рассеяния на отдельных электронах на  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , Вильямс [30] предложил заменить  $z_2^2$  на  $z_2(z_2+1)$  в формулах для дифференциального поперечного сечения рассеяния.

Для построения теории многократного рассеяния обычно используется поперечное сечение рассеяния в зависимости от проекции угла  $\Theta$  на плоскость. Для малых углов  $\Theta$  справедливо соотношение  $\Theta^2 = \theta^2 + \vartheta^2$ , где  $\theta$  и  $\vartheta$  — проекции пространственного угла  $\Theta$  на длины  $x, y$  и  $x, z$  соответственно. Полагая  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\Theta)$ , можно рассчитать

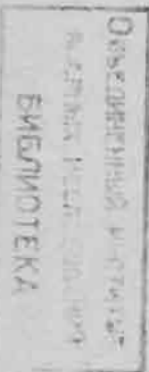
$$f(\theta) = \frac{d\sigma}{d\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta^2 + \vartheta^2)^{-1/2} d\vartheta. \quad (12.2)$$

Считая, что  $f(\Theta)$  описывается выражением (5.2) с заменой  $\Theta_{m1n}$  на  $\Theta_a$  и что это выражение справедливо для всех, а не только для малых значений  $\Theta$ , имеем

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2} (\theta^2 + \Theta_a^2)^{-3/2}. \quad (13.2)$$

Чтобы учесть влияние конечных размеров ядра на  $f(\theta)$ , необходимо знать распределение электрического заряда в нем. Хоффштадтер с сотрудниками [31] провел большую серию опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах в области углов, для которых существенно распределение зарядов в ядре. Он считает, что распределение зарядов в ядрах средних и тяжелых элементов лучше всего описывается функцией Ферми. Так как отличие этого распределения от сферически симметричного распределения, соответствующего предположению об ядре как о твердом шарике незначительно, то в качестве оценки величины радиуса ядра возьмем такое значение  $r_0$ , при котором функция Ферми имеет половинное значение. Согласно опытам Хоффштадтера,  $r_0 \approx (1.7 - 1.2) A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  см, где  $A$  — массовое число. Количественно влияние протяженности ядра на рассеяние оценивалось Олбергом [32, 33], Купером и Рейнвогтером [34], а также Тер-Микаэляном [35], которые для  $f(\theta)$  используют следующую формулу:

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2} \cdot \frac{F_a(\theta)}{(\theta^2 + \Theta_a^2)^{3/2}}, \quad (14.2)$$



где  $F_{\alpha}(\vartheta)$  — ядерный формфактор. Выражение для формфактора  $F_{\alpha}(\vartheta)$  Олберт аппроксимировал ступенчатой функцией

$$F_{\alpha}(\vartheta) = \begin{cases} 1, & |\vartheta| \leq \Theta_{max}, \\ 0, & |\vartheta| > \Theta_{max}, \end{cases} \quad (15.2)$$

где  $\Theta_{max} = \frac{\lambda}{r_0}$ .

Купер и Рейнвогел [34], используя первое борновское приближение и данные Хофштадтера [31], численно рассчитали формфактор  $F_{\alpha}(\vartheta)$ , который можно приближенно оценивать по формуле

$$F_{\alpha}(\vartheta) \approx \begin{cases} 1, & \text{при малых } \vartheta, \\ z_2^{-1} & \text{для больших } \vartheta. \end{cases} \quad (16.2)$$

Тер-Микаэлян [35] аппроксимировал  $F_{\alpha}(\vartheta)$  с помощью выражения

$$F_{\alpha}(\vartheta) = (1 + k^2 r_0^2 \vartheta^2)^{-4}. \quad (17.2)$$

Здесь  $\Theta$  — пространственный угол. Приведенные результаты показывают, что форма распределения заряда в ядре существенно не отражается на поперечном сечении рассеяния при  $\vartheta \ll \frac{\lambda}{r_0}$ , хотя  $f(\vartheta)$  и стремится к нулю при  $\vartheta > \frac{\lambda}{r_0}$ . Если  $r_0 = A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  см, то область, в которой справедливы приведенные выше выражения для  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , ограничена со стороны больших углов значением  $\Theta_{max} = \lambda A^{-1/3} \cdot 10^{13}$ . Это ограничение естественно, когда  $\Theta_{max}$  мало по сравнению с единицей. Так как  $\Theta_{max}$  становится больше единицы, когда импульс частицы мал, а, следовательно,  $\lambda$  велико, то конечные размеры ядра не играют значительной роли при рассеянии частиц с достаточной малыми импульсами. В этом случае выражения для поперечного сечения рассеяния, вычисленные в предположении точечного ядра, справедливо вплоть до углов  $\Theta = \tau$ .

## § 2. Многократное кулоновское рассеяние

Заряженная частица, проходя через слой вещества конечной толщины  $t$ , претерпевает большое число стогликовенных, причем чаще всего изменения в направлении движения частицы очень малы. Обозначим изменение в направлении движения частицы, прошедшей слой вещества толщиной  $t$ , через  $\Theta$ . Важно знать зависимость закона распределения величин  $\Theta$  и среднеквадратического значения  $\sqrt{\overline{\Theta^2}}$  от  $t$ . Если частица испытывает большое число малых отклонений, то, согласно центральной предельной теореме, закон распределения  $\Theta$  будет гауссовым. Определим дисперсию этого распределения, равную  $\overline{\Theta^2}$ . Очевидно, что  $\overline{\Theta^2}(t + dt) = \overline{\Theta^2}(t) + d\overline{\Theta^2}$ , где

$$d\overline{\Theta^2} = dt \int \Theta^2 f(\Theta) d\Omega = 2\pi dt \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (18.2)$$

Уравнение (18.2) можно переписать так:

$$\frac{d\overline{\Theta^2}}{dt} = \Theta_s^2 = 2\pi \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (19.2)$$

Если предположить что,  $f(\Theta)$  дается формулой Резерфорда (1.2) для  $\Theta_{min} \leq \Theta \leq \Theta_{max}$  и равно нулю вне этого интервала, то

$$\Theta_s^2 = 8\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} \ln \frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}}. \quad (20.2)$$

Пренебрегая потерями энергии в слое  $t$  и интегрируя уравнение (19.2), получим

$$\overline{\Theta^2} = \Theta_s^2 t. \quad (21.2)$$

Согласно (20.2) и (21.2),

$$\sqrt{\overline{\Theta^2}} = \delta (\ln M)^{1/2} \sqrt{\pi}, \quad (22.2)$$

где  $M$ , равное  $\left(\frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}}\right)^2$ , служит мерой среднего числа

столкновений, испытываемых частицей при прохождении слоя  $t$ , а величина  $\vartheta$ , равная  $\frac{2\pi z e^2 (Nt)^{1/2}}{p^2 c}$ , есть угловая единица. Физический смысл ее в том, что полная вероятность рассеяния на угол, больший, чем  $\vartheta' = \delta \sqrt{\pi}$ , равна единице.

Формула (22.2), основанная в теории многократного рассеяния, разработанной Вильямсом [30, 36], дает приближенную количественную оценку зависимости  $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$  от  $p^2$  и  $t$ . Чтобы точнее оценить величину  $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$ , необходимо использовать более корректную формулу для потеречного сечения рассеяния  $f(\vartheta)$ . Кроме того, взгляд отдельных актов рассеяния на большие углы приводит к отклонению распределения величины  $\vartheta$  от гауссового. Поэтому необходимо тщательно анализировать функцию распределения углов  $\vartheta$ .

Пусть  $P(t, y, \vartheta) dy d\vartheta$  — число частиц на глубине  $t$  (ось  $t$  совпадает с направлением движения падающих частиц), имеющих боковое смещение в интервале от  $y$  до  $y + dy$  и движущихся под углом к оси  $t$ , значение которого заключено в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ ; а  $f(\vartheta) d\vartheta$  — вероятность акта рассеяния на единицу толщины в интервале углов от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ . Очевидно, что  $f(\vartheta) = f(-\vartheta)$ , и поэтому

$$\overline{\vartheta} = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta f(\vartheta) d\vartheta = 0. \quad (23.2)$$

Используя (12.2), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta^2} &= \int \vartheta^2 f(\vartheta) d\vartheta = \iint [(\vartheta^2 + \vartheta_z^2) f(\vartheta^2 + \vartheta_z^2)^{1/2}] d\vartheta d\vartheta_z = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta^2 f(\vartheta) d\vartheta = 2\overline{\vartheta^2}. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Таким образом, из (24.2) находим связь между средним квадратом пространственного угла и средним квадратом его проекции на плоскость  $(x, y)$ :

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{1}{2} \overline{\vartheta_s^2}. \quad (25.2)$$

Вычисляя изменение, которое испытывает функция  $P(t, y, \vartheta)$  в слое между  $t$  и  $t + dt$ , получаем [37]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\vartheta \frac{\partial P}{\partial y} + \int_{-\infty}^{\infty} [P(t, y, \vartheta + \vartheta') - \\ &- P(t, y, \vartheta)] f(\vartheta') d\vartheta'. \end{aligned} \quad (26.2)$$

Предполагая, что  $P(t, y, \vartheta + \vartheta')$  можно разложить в ряд по степеням  $\vartheta'$ , и опуская члены выше второго порядка, с учетом (24.2) и (26.2), имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vartheta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\vartheta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2}. \quad (27.2)$$

Решением этого уравнения будет [38]:

$$P(t, y, \vartheta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\vartheta_s^2 t^2} \exp \left[ -\frac{4}{\vartheta_s^2} \left( \frac{\vartheta^2}{t} - \frac{3y\vartheta}{t^2} + \frac{3y^2}{t^3} \right) \right]. \quad (28.2)$$

Интегрируя соотношение (28.2) по  $y$ , получим функцию  $Q(t, \vartheta)$ , представляющую угловое распределение относительно к боковому смещению:

$$Q(t, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t \vartheta_s^2}} \exp \left( -\frac{\vartheta^2}{\vartheta_s^2 t} \right). \quad (29.2)$$

Аналогично, интегрируя (28.2) по  $\vartheta$ , получим функцию  $S(t, y)$ , представляющую распределение частиц в пространстве, независимо от распределения по углам:

$$S(t, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi t^3 \vartheta_s^2}} \exp \left( -\frac{3y^2}{\vartheta_s^2 t^3} \right). \quad (30.2)$$

Равенство (29.2) показывает, что если ограничиться такими малыми углами  $\vartheta$ , при которых справедливо разложение  $P(t, y, \vartheta + \vartheta')$  в ряд, то функция распределения по углам  $\vartheta$  имеет гауссов вид, причем

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{1}{2} \overline{\vartheta_s^2} t. \quad (31.2)$$

Так как функцию распределения нужно изучать не только для малых углов, то разлагать  $P(t, y, \vartheta + \vartheta')$  в

ряд нельзя, необходимо точно решить уравнение (26.2). Нам интересуют угловые распределение безотносительного к боковому смещению, поэтому, интегрируя (26.2) по  $y$ , получим следующее уравнение для  $Q(t, \theta)$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(t, \theta + \theta') - Q(t, \theta)] f(\theta') d\theta'. \quad (32.2)$$

Разнообразные теории многократного рассеяния [34, 39—47] в основном объединяются различными методами решения уравнения (32.2) и использованием различных приближений для закона однократного рассеяния  $f(\theta)$ . Задачу определения функции распределения  $Q(t, \theta)$  впервые достаточно полно рассмотрел Компанец [39], который решил уравнение, аналогичное (32.2), пользуясь выражением (2.2) для  $f(\theta)$  в предположении о томас-фермиевском распределении потенциала  $V(r)$ . Функцию  $Q(t, \theta)$  он нашел в виде разложения по функциям Бесселя. Не останавливаясь на математической стороне вопроса, приведем окончательный результат [39]:

$$Q(t, \theta) = \int_0^k \left( \frac{1.21 \xi^{10k^2}}{2k} \right)^{\frac{t-\xi}{2k}} I_0 \left( \xi \frac{\theta}{2} \right) d\xi, \quad (33.2)$$

где

$$\tau = \frac{8\pi N t z^{1/2} z_0^2 e^4}{h^2 (\beta c)^2}, \quad k = \frac{P}{h}.$$

Величина  $\theta$  входит в (33.2) через аргумент функции Бесселя. Численное интегрирование показало, что  $Q(t, \theta)$  можно заменить распределение Гаусса вплоть до углов, близких к полуширине распределения. Для квадрата полуширины Компанец получил выражение

$$\overline{\theta^2} = \frac{4\pi N t z^{1/2} z_0^2 e^4}{(h\beta c)^2} \ln \left( 2.03 N \frac{z_0^2 h^2 v^2}{(h\beta c)^2} \right) \cdot \left( \frac{\alpha}{x_0} \right)^2 = \tau^2 \ln M' \left( \frac{\alpha}{x_0} \right)^2, \quad (34.2)$$

где  $M' = 2.03 N \frac{z_0^2 h^2 v^2}{(h\beta c)^2}$  — мера среднего числа столкно-

вений в слое  $t$ . Величина  $\alpha/x_0$  изменяется от 0.84 при  $M' = 16$  до 1.06 при  $M' = 10^5$ . В работе Мольер [40] функция распределения  $Q(t, \theta)$  определена так: если  $f_i(\theta_i) d\theta$  есть вероятность того, что частица, пройдя слой вещества толщиной  $t$ , испытала однократное рассеяние на угол  $\theta$ , то

$$P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, t) = e^{-\tau} f_1(\theta_1) f_2(\theta_2) \dots f_n(\theta_n) \quad (35.2)$$

— вероятность того, что частица испытала  $n$  однократных рассеяний на углы  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . Здесь  $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta$ . Поскольку мы интересуемся только конечным значением угла  $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$ , то, интегрируя по всем промежуточным значениям углов, получим вероятность рассеяния на угол  $\theta$ :

$$P^{(n)}(t, \theta) = \frac{e^{-\tau}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta_1) f_2(\theta_2) \dots f_n(\theta_n) \delta(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_{n-1}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}. \quad (36.2)$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье для  $f_i(\theta_i)$ ,

$$f_i(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi\theta} d\xi, \quad (37.2)$$

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\theta) e^{-i\xi\theta} d\theta,$$

и подставляя (37.2) в (36.2), имеем

$$P_n(t, \theta) = \frac{e^{-\tau}}{(2\pi)^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) \dots g(\xi_n) e^{i\xi_1\theta_1} \dots e^{i\xi_n\theta_n} \delta(\theta - \theta_1 - \dots - \theta_{n-1}) d\xi_1 \dots d\xi_n d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}. \quad (38.2)$$

Промежуточные интегралы в (38.2) берутся с помощью  $\delta$ -функций, и тогда выражение (38.2) приводится к виду

$$P_n(t, \theta) = \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\xi(\xi)]^n}{n!} e^{i\xi t} d\xi. \quad (39.2)$$

Если число актов однократного рассеяния  $n$  не фиксировано, то вероятность отклонения на угол  $\theta$  будет

$$Q(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} e^{\xi(\xi) - \kappa(\theta)} d\xi. \quad (40.2)$$

Множитель  $e^{-\kappa(\theta)} = e^{-\kappa}$  нормирует функцию распределения  $Q(t, \theta)$  к единице. Чтобы получить  $Q(t, \theta)$  в окончательном виде, необходимо вычислить разность  $\xi(\xi) - \kappa(\theta)$ , которая определяется обратным преобразованием Фурье (37.2):

$$\xi(\xi) - \kappa(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta) (e^{-i\xi\theta} - 1) d\theta. \quad (41.2)$$

Подставляя в это выражение функцию распределения (13.2), имеем

$$\xi(\xi) - \kappa(\theta) \approx 4\pi N_f \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} \left[ \frac{\xi^2}{4} \ln \left( \frac{z_1^2 \theta c^2}{4e^2} \right) \right], \quad (42.2)$$

где  $\ln \gamma$  — постоянная Эйлера (0,5772...), а  $\ln e^2 = 1$ . Введем обозначения:

$$\theta_c^2 = \pi \delta^2 = \frac{4\pi N_f z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2}; \quad (43.2)$$

$$\Omega = \frac{\theta_c^2}{\theta_0^2} = \frac{1,47 \cdot 10^{-20} N_f z_1^2 z_2^2 e^4}{\beta^2 + \left( \frac{z_1 z_2}{75} \right)^2}. \quad (44.2)$$

В связана с  $\Omega$  соотношением

$$\ln \Omega = B - \ln B - \ln \frac{e^2}{\gamma^2}. \quad (45.2)$$

$\Omega = \frac{\pi \delta^2}{\theta_0^2}$ , где  $\delta$  — угловая единица (см. 22.2). — мера среднего числа столкновений, испытываемых частицей при прохождении слоя  $t$ .

Подставляя (42.2) в (40.2) и разлагая  $Q(t, \theta)$  в ряд по степеням  $\frac{1}{B}$ , окончательно имеем

$$Q(t, \theta) = \frac{1}{\theta_0 V B} \left\{ \frac{1}{V \pi} \exp \left( -\frac{\theta^2}{\theta_c^2 B} \right) + \frac{1}{B} f^{(1)} \left( \frac{\theta}{\theta_0 V B} \right) + \frac{1}{B^2} f^{(2)} \left( \frac{\theta}{\theta_0 V B} \right) + \dots \right\}. \quad (46.2)$$

Таблицы функций  $f^{(1)}$  и  $f^{(2)}$  даны в работе Молвер [40]. Первый член в фигурных скобках описывает гауссову часть функции распределения  $Q(t, \theta)$ , а члены, содержащие степени  $\frac{1}{B}$ , — негауссову, обусловленную однократным и кратным рассеянием на большие углы.

В экспериментах по многократному рассеянию тип для сравнения с теорией обычно используется выражение (46.2) или следствия из него. Олберт [33], Бете [46] и Солнцев [44] показали, что функцию распределения Молвер можно непосредственно получить из кинетического уравнения (32.2) с помощью преобразований Фурье или Фурье — Бесселя. Полученные там выражения для  $Q(t, \theta)$  идентичны распределению (46.2). Нигам и другие [45] подвергли критике некоторые аспекты теории Молвер. В частности, они считали недостаточно строгим молверовский метод ввода в теорию параметра экранирования  $\theta_{cr}$ , а также полагали, что для изучения рассеяния на малые углы нельзя пользоваться потенциалом Томаса — Ферми. Мухерье [47] рассчитал функцию распределения  $Q(t, \theta)$  и определил  $f(\theta)$  с помощью приближенного решения уравнения Дирака. В его теории параметр  $\theta_{cr}$  основан строго математически. Он показал, что нет никаких оснований отказать от томас-фермиевского потенциала при изучении рассеяния на малые углы. Используя молверовское приближение для  $V(r)$  (7.2), Мухерье получил функцию распределения  $Q(t, \theta)$ , которая хорошо согласуется с экспериментальными данными Хансона и других [48].

Выражения для функции распределения, приведенные выше, получены в предположении точечного заряда ядра. При больших углах рассеяния, чтобы учесть конечные размеры ядра, нужно ввести ядерный фактор в формулу для поперечного сечения однократного рассеяния. Олберт рассмотрел теорию многократного рассеяния фактора Мольера, аппроксимируя выражение для ядерного фактора ступенчатой функцией (15.2). Влияние протяженности ядра на функцию распределения  $Q(t, \theta)$  более строго оценили Купер и Рейнвогтер [34]. Они использовали фактор, который можно приближенно описать выражением (16.2). Подставляя (16.2) в (41.2), имеем

$$g(z) - g(0) = \frac{\pi b^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-t\theta} - 1) F_n(t\theta)}{(1 + \theta^2)^{n/2}} dt. \quad (47.2)$$

Вводя обозначения Олберта

$$Q = \pi b^2,$$

$$G = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{e^{-2\theta a^2} - 1}{2GQ} \right); \quad (48.2)$$

$$x = (2GQ)^{-1/2} \theta; \quad \eta = (2GQ)^{1/2} z;$$

$$\text{где } G \approx 5,66 + 1,241g \left[ \frac{z_0^2 A^{-1} t}{1,13 \beta^2 + 8,76 \left( \frac{21 z_0^2}{137} \right)} \right], \text{ получим}$$

$$g(z) - g(0) \equiv S(\eta) = \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} \frac{(\cos \eta x - 1) F_n(x)}{(x^2 + \eta_0^2)^{n/2}} dx. \quad (49.2)$$

и

$$Q(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} e^{S(\eta)} d\eta. \quad (50.2)$$

Подставляя (49.2) в (50.2), Купер и Рейнвогтер нашли следующее приближенное выражение для функции распределения:

$$Q(t, x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{q(L, x)}{4G} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4G\sqrt{\pi}} \int_L^{\infty} \lambda^{-3} F_n(\lambda) T(x, \lambda) d\lambda, \quad (51.2)$$

где

$$q(L, x) = 2(2x^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{L}{1,26} \right) + \int_0^{2Lx} t^{-1} (\operatorname{ch} t - 1) dt \right] +$$

$$+ 6x^2 - \frac{1}{L^2} (\operatorname{ch} 2Lx - 1) - \frac{2x}{L} \operatorname{sh} 2Lx,$$

$$T(x, \lambda) = \exp[-(x + \lambda)^2] + \exp[-(x - \lambda)^2] - 2 \exp[-x^2] \text{ и } L \approx \frac{1}{4}.$$

Таблицы для расчета  $q(L, x)$  и  $T(x, \lambda)$  приведены в работе [34].

Тер-Микаэлян [35] получил функцию распределения  $Q(t, \theta)$ , решая уравнение (32.2) с учетом (13.2) и (17.2). Его решение можно представить в виде

$$Q(t, \theta) d\theta = \frac{2d^3}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \theta' y \exp \left\{ -\frac{3z}{4\pi^2} \left[ \frac{y^2}{2} - 0,5772 - \ln \left( \frac{y\theta}{2\pi} \right) + 8(-0,5772 + \ln \frac{2}{y} - K_0(y)) + \frac{13}{3} (1 - yK_1(y)) - \frac{2}{3} y^2 K_0(y) - \frac{y^3}{24} K_1(y) \right] \right\} dy, \quad (52.2)$$

где  $z = \frac{1}{k_0^2}$ ,  $\theta' = \frac{\theta}{q_n}$ , а  $K_n(y)$  — модифицированные функции Бесселя.

Сравнение следствий из рассмотренных выше теорий многократного кулоновского рассеяния с экспериментом проведено в работах [32—35, 48—64, 111, 112, 120, 121, 143, 144, 146], а также в пятой главе настоящей

шей книги. Так, экспериментальные данные по рассеянию малоненергичных электронов в металлических фоль-

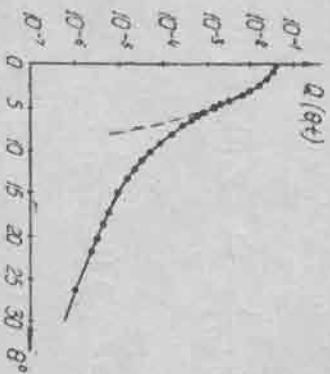


Рис. 2. Угловое распределение электронов: точки—эксперимент [48]; сплошная линия—распределение Мольера; штриховая линия—гауссова часть распределения Мольера.

тах толщиной  $t = 0,02$  и  $1,8$  мкм хорошо совпадают с распределением Мольера [48—50] (рис. 2). На рисунке 3 для

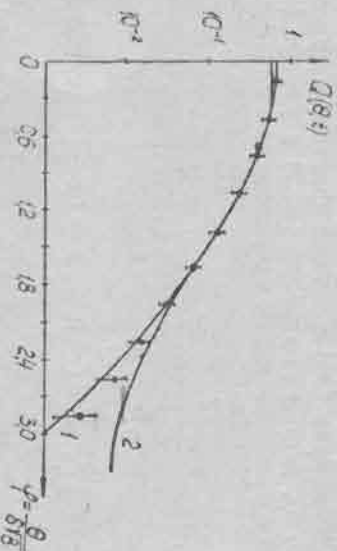


Рис. 3. Угловое распределение  $\mu$ -мезонов: точки—эксперимент [55]; 1—распределение Тер-Микаэляна; 2—распределение Мольера.

сравнения изображены экспериментальные данные по рассеянию  $\mu$ -мезонов с импульсом  $100-180$  Мэв/с в свинцовых пластинках толщиной  $7$  мкм и  $Q(t, \theta)$ , рассчитанные по формулам (46.2) и (52.2). Распределение Тер-Микаэляна, учитывающее конечные размеры ядер,

лучше согласуется с экспериментом, чем распределение Мольера [55].

Данные измерений многократного рассеяния частиц в ядерных фотоэмульсиях при  $t \lesssim 5$  мкм, проведенных многими авторами [51—54, 56—60], удовлетворительно согласуются с классической теорией многократного кулоновского рассеяния Мольера, Вильямса, Снайдера и Скотта и др.

В области  $t \gtrsim 5$  мкм (рассеяние измерялось на следах частиц с энергией  $t \gtrsim 1$  Гэв) экспериментальная функция распределения начинает отличаться от теоретической. На рисунке 4 изображены различные функции распре-

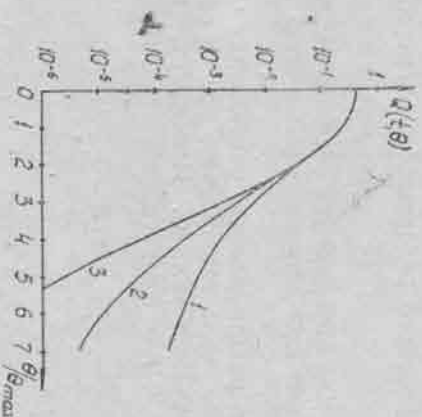


Рис. 4. Функции распределения  $Q(t, \theta)$ : 1—Мольер; 2—Купера и Рейнвоетера; 3—Олберга.

деления  $Q(t, \theta)$ , рассчитанные для  $\mu$ -мезонов с импульсом  $1$  Гэв/с, прошедших слой свинца толщиной  $2$  см [34]. Учет конечных размеров ядер приводит к некоторому уменьшению среднего угла многократного рассеяния. Однако даже в этом случае нельзя полностью объяснить расхождение данных эксперимента и существующих теорий многократного рассеяния. Возможные ошибки эксперимента также не объясняют этого различия [62, 64]. Поэтому авторы работ [58, 59, 63, 120]



предполагают несовершенство теории многократного кулоновского рассеяния.

Некоторые исследователи [65, 66] пытались построить квантово-механическую теорию многократного рассеяния и решили уравнение Шредингера для задачи упругого рассеяния частицы на системе многих рассеивателей в приближении мультипликативной зависимости волновой функции от координат атомов. Функция распределения частиц по углам и поперечному смещению, полученная ими, при малых углах в классическом пределе совпадает с функцией распределения (28.2), полученной Ферми. Имеются и некоторые различия, обусловленные чисто квантовыми эффектами. К сожалению, в литературе пока отсутствуют данные по сопоставлению квантово-механической теории многократного кулоновского рассеяния с экспериментом.

### § 3. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию

Из функции распределения рассеянных частиц по углам можно получить зависимость  $r_{\beta\beta c}$  от средневалентического значения угла  $\phi$ . Используя, например, выражение (46.2) для чистого вещества, получим

$$\sqrt{\beta^2} = \frac{z_1 K' t^{1/2}}{p^2 c}, \quad (53.2)$$

где

$$K' = (2\pi N V)^{1/2} z_2 e^2 \left( 1 + \frac{0.982}{B} - \frac{0.117}{B^2} + \dots \right)^{1/2}.$$

Величина  $K'$  в основном зависит от числа рассеивающих центров  $N$  с зарядом  $z_2 e$  в  $1 \text{ см}^3$  вещества и  $B$ , слабо зависящего от толщины слоя и скорости частицы  $\beta$  (44.2, 45.2). Зная величину  $K'$ , из формулы (53.2) по измеренной  $\sqrt{\beta^2}$  можно определить величину  $r_{\beta\beta c}$  для моноэнергетического пучка частиц, прошедших слой вещества  $t$ . Найдя  $r_{\beta\beta c}$ , можно вычислить кинетическую энергию частиц  $E_k$ . Для нерелятивистских частиц ( $\beta \ll 1$ )  $r_{\beta\beta c} \approx 2E_k$ , а для релятивистских ( $\beta \approx 1$ )  $r_{\beta\beta c} \approx E_k$ . Экспериментаторов же обычно интересует определение

энергии отдельных частиц. Поэтому, чтобы воспользоваться формулой (53.2), найдем угол  $\phi$  для  $n$  равных отрезков следа длиной  $l$  и вычислим  $\sqrt{\beta^2}$ . Известно, что это среднеквадратическое значение равно среднеквадратическому значению угла, вычисленному для пучка одинаковых частиц, прошедших слой  $t$ . Угол  $\sqrt{\beta^2}$  для отдельного следа можно найти угловым (метод касательных) или координатным (метод хорд) методами.

Сущность первого метода состоит в том, что в двух крайних точках слоя  $l$  измеряются углы между касательными к следу и некоторой осевой линией. Проекции разности этих углов на плоскость характеризует изменение в направлении движения частицы в слое за счет многократного кулоновского рассеяния. Разность углов  $\phi$  измеряется для  $n$  следующих друг за другом слоев  $l$  и вычисляется  $\sqrt{\beta^2}$ .

Когда рассеяние частиц мало и углы между касательными измерять неудобно, тогда предпочтительнее координатный метод измерения, предложенный Фаулером [67]. Чтобы измерить рассеяние с помощью этого метода, след выставляется приблизительно параллельно оси, совпадающей с направлением движения столбика микроскопа так, чтобы при перемещении он не выходил из поля зрения. Через равные участки длиной  $l$ , которые обычно называют ячейками, измеряется величина смещения следа по отношению к оси  $x$ . Обозначим ее как  $y_k$ . Затем вычисляются вторые разности координат:

$$D_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \quad (54.2)$$

Тангенс угла между хордами, соединяющими крайние точки траектории частицы в ячейках  $l$ , равен (рис. 5)

$$\operatorname{tg} \alpha = \beta_2 - \beta_1 = \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{l} - \frac{y_{k+1} - y_k}{l} = \frac{D_k}{l}. \quad (55.2)$$

Так как углы между хордами при многократном рассеянии малы, то  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ . Формула (55.2) показывает, что, вычисляя средний квадрат величины  $D_k$ , можно найти средний квадрат угла  $\alpha$  между хордами. Что-

бы воспользоваться формулой (53.2), необходимо установить связь между  $D_k^z$  (или  $\alpha^z$ ) и  $\beta^z$ , которая подробно излучалась в работах [4, 40, 44, 68—72]. Наиболее простой, хотя и недостаточно строгий вывод соотношения между  $D_k^z$  (или  $\alpha^z$ ) и  $\beta^z$  принадлежит Баркасу [4].

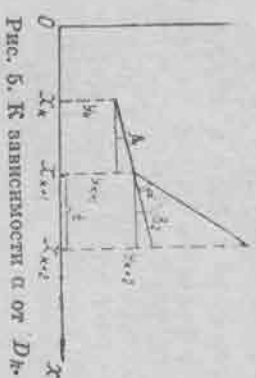


Рис. 5. К зависимости  $\alpha$  от  $D_k$ .

Пусть далее она испытала  $n_k$  однократных рассеяний на углы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_k}$  в точках, разделенных расстоянием  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_k}$  (рис. 6).

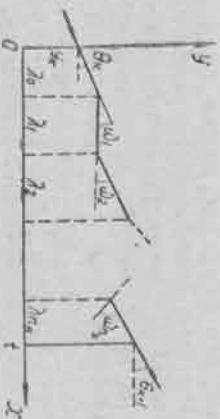


Рис. 6. К рассеянию частицы в слое вещества l.

Очевидно, что

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i, \quad (56.2)$$

а

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & y_k + \beta_k \lambda_0 + (\beta_k + \omega_1) \lambda_1 + \dots + (\beta_k + \omega_1 + \omega_2 + \\ & + \dots + \omega_{n_k}) \lambda_{n_k} = y_k + \beta_k \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_j + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p = \end{aligned}$$

$$= y_k + \beta_k l = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p. \quad (57.2)$$

Вычислим вторые моменты координат  $D_k^z$ :

$$\begin{aligned} D_k^z = & (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = \\ & = (l\beta_{k+1} + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p) - (l\beta_k + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p) = \\ & = \sum_{l=0}^{n_k} \lambda_l \sum_{j=1}^{n_k} \omega_j + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p = \\ & = \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p + \sum_{l=1}^{n_k} \omega_l \sum_{r=1}^l \lambda_{r-1}. \quad (58.2) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{p=1}^j \omega_p, \\ U_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \omega_j \sum_{p=1}^{j-1} \lambda_{p-1} \quad (59.2) \end{aligned}$$

и введем новые переменные  $\psi_k$  и  $\chi_k$  по формулам

$$S_k + U_k = 2\psi_k = l \sum_{l=1}^{n_k} \omega_l = l(\beta_{k+1} - \beta_k), \quad (60.2)$$

$$S_k - U_k = 2\chi_k.$$

Можно показать, что

$$\overline{S_k^2} = \overline{U_k^2}, \quad (61.2)$$

а, следовательно,

$$\overline{\psi_k \chi_k} = \frac{1}{4} (\overline{S_k^2} - \overline{U_k^2}) = 0. \quad (62.2)$$

Очевидно также, что

$$\overline{\psi_k \psi_l} = \overline{\psi_k} \overline{\psi_l} = \overline{\chi_k \chi_l} = 0, \quad k \neq l. \quad (63.2)$$

Предполагая, что функция распределения величин

$$y = S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \chi_j \sum_{i=1}^{l_j} \omega_j \quad \text{и} \quad \vartheta = \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i$$

описывается выражением (28.2), можно показать, что

$$\overline{\psi_k^2} = 3\overline{\chi_k^2} = \frac{n_k t^2}{4\omega^2}. \quad (64.2)$$

Таким образом, переменные  $\psi_k$  и  $\chi_k$  статистически независимы. Выразим теперь вторые разности  $D_k$  через  $\psi_k$  и  $\chi_k$ . С помощью (58.2), (59.2) и (60.2) вторые разности будут

$$D_k = S_{k+1} + U_k = \psi_{k+1} + \psi_k + \chi_{k+1} - \chi_k. \quad (65.2)$$

Тогда

$$\overline{D_k^2} = \frac{8}{g} \overline{\psi_k^2} = 8\overline{\chi_k^2} = \frac{2}{g} n_k t^2 \omega^2. \quad (66.2)$$

Усредняя соотношение (66.2) по  $n_k$ , получим

$$\overline{D_k^2} = \frac{8}{g} \overline{\psi^2} = 8\overline{\chi^2} = \frac{2}{g} N t^2 \omega^2, \quad (67.2)$$

где  $N$  — среднее число столкновений в ячейке  $l$ . Методом математической индукции доказывается, что разности координат порядка  $r$  равны

$$D_k^r = \sum_{\alpha=1}^r \frac{(-1)^{r-\alpha} (r-2)! (2r-r-1)}{(r-\alpha)! (\alpha-1)!} \psi_{k+\alpha-1} + \\ + \sum_{\alpha=1}^r \frac{(-1)^{r-\alpha} (r-1)!}{(r-\alpha)! (\alpha-1)!} \chi_{k+\alpha-1}. \quad (68.2)$$

Вторые моменты разностей порядка  $r$  будут

$$\overline{D_k^r D_{k+j}^r} = \overline{D_k^2} \frac{(-1)^j [(r-2)!]^2}{8} \times \\ \times \sum_{\alpha=1}^{r-1} \frac{(r-1)^2 + 3(2r-r-1)(2\alpha+2j-r-1)}{(r-\alpha)! (\alpha-1)! (r-\alpha-j)! (\alpha+j-1)!}. \quad (69.2)$$

Из (69.2) вытекают важные соотношения, которыми часто пользуются:

$$\overline{D_k D_{k+1}} = \frac{1}{4} \overline{D_k^2}, \\ \overline{D_k D_{k+j}} = 0, \quad j > 2; \quad (70.2)$$

$$\overline{T_k^2} = \frac{3}{2} \overline{D_k^2}, \\ \overline{F_k^2} = 4\overline{D_k^2}.$$

Здесь  $T_k$  и  $F_k$  — третьи и четвертые разности координат соответственно:

$$T_k = D_{k+1} - D_k; \\ F_k = T_{k+1} - T_k. \quad (71.2)$$

Комбинируя (60.2) и (67.2), получим искомого связь между  $\overline{D_k^2}$  и  $\overline{\vartheta^2}$ .

$$\overline{D_k^2} = \frac{2}{g} t^2 \overline{\vartheta^2}. \quad (72.2)$$

В то же время

$$\overline{\alpha^2} = \frac{2}{g} \overline{\vartheta^2}, \quad (73.2)$$

так как  $\alpha = D_k/t$ . Используя точное решение уравнения (26.2) [41]

$$P(t, y, \vartheta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\vartheta S + yx) - \\ - \frac{h(S+ix) - h(S)}{\lambda x}] dx,$$

$$\text{где } h(S) = \int_0^S [1 - q(S)] dS, \quad q(S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iSs} p(\theta) d\theta,$$

$p(\theta) = \frac{Q_0^2 F_{\pi}(\theta)}{2(\theta^2 + Q_0^2)^{3/2}}$  и  $\frac{t}{\lambda} = \frac{r_0^2}{R_0^2} = \Omega$ , можно показать, что, как и для гауссового решения (28.2),

$$\bar{y}^2 = \frac{r^2}{g} \bar{\theta}^2, \quad (74.2)$$

а соотношение (73.2) справедливо при любом конкретном виде  $F_{\pi}(\theta)$ , если  $\bar{y}^2$  и  $\bar{\theta}^2$  конечны [72]. Используя соотношения (53.2) и (72.2), для однозарядных частиц находим

$$p\bar{r}c = \frac{K_0' t^{3/2}}{578 \sqrt{D_{\mu}^2}}, \quad (75.2)$$

где  $p\bar{r}c$  выражено в миллионах электронвольт, а  $D_{\mu}$  и  $t$  — в микронах.

Величина  $K_0' = \sqrt{\frac{2}{g}} K'$ , которую принято называть постоянной рассеяния, как было сказано выше, в основном зависит от свойств вещества. Чтобы вычислить  $K_0'$  для ядерной фотоэмюльсии, необходимо найти угловое распределение рассеянных частиц по углам, учитывая элементарный коллинеарный состав эмюльсии. Так как вывод такого соотношения затруднителен, можно оценить значение постоянной рассеяния, усредняя величину  $K_0'$  по всем элементам, входящим в состав ядерной фотоэмюльсии.

Следует отметить, что формула (75.2), связывающая  $p\bar{r}c$  с  $D_{\mu}^2$  и  $t$ , справедлива при любом конкретном виде функции распределения  $Q(t, \theta)$ , которая склывается только на величине постоянной рассеяния  $K_0'$ . Постоянная рассеяния теоретически рассчитана в работах [43, 51, 59 и др.]. При измерении многократного рассеяния чаще всего  $D_{\mu}^2$  находят среднестатистическое значение  $D_{\mu}' = |D_{\mu}|$ . Это особенно удобно при ручном методе измерения  $D_{\mu}$ . Если бы закон распределения величин  $D_{\mu}$  был точно гауссовым, то

$$D_{\mu}' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{D_{\mu}^2}. \quad (76.2)$$

Поскольку негауссов характер распределения вторых разностей  $D_{\mu}$  начинает сказываться при больших углах рассеяния  $\theta$  (46.2), то отбрасывание больших значений  $D_{\mu}$  (например, таких, что  $D_{\mu} > 4D_{\mu}'$ ) приводит к выполнению соотношения (76.2) с большой точностью. Джонстон [73] экспериментально нашел, что

$$r = \frac{D_{\mu}'}{\sqrt{D_{\mu}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,993 \pm 0,003. \quad (77.2)$$

Соотношение  $r$  для вторых разностей, измеренных нами на первичных следах протонов с энергией 9 Лэв в эмюльсии НИКФИ-Р на ячейках  $t = 1000, 2000$  и 4000 мк с отбраковыванием  $D > 4D'$ , оказалось равным

$$r = \begin{cases} 0,984 \pm 0,001, & t = 1000 \text{ мк}; \\ 0,992 \pm 0,001, & t = 2000 \text{ мк}; \\ 0,999 \pm 0,002, & t = 4000 \text{ мк}. \end{cases} \quad (78.2)$$

Величина  $r$  при увеличении длины ячейки стремится к единице. По-видимому, это объясняется тем, что взгляд многократного кулоновского рассеяния растет с ростом  $t$  и различные ошибки негауссового характера мало влияют на  $D$ . Заменяя  $\sqrt{D_{\mu}^2}$  в формуле (75.2) на  $D_{\mu}'$ , получим

$$p\bar{r}c = \frac{K t^{3/2}}{573 D_{\mu}'}. \quad (79.2)$$

где  $t$  и  $D_{\mu}'$  выражено в микронах, а  $K = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0' \frac{z_{\text{яд}} \cdot M_{\text{эв}}}{(100 \cdot \text{мк})^{3/2}}$ . Это соотношение наиболее удобно для экспериментаторов. Значение  $K$  для разных частиц в большом интервале длин ячеек колеблется в пределах  $20 \div 32 \text{ град} \cdot \text{Мэв}/(100 \text{ мк})^{3/2}$ . Так называемая постоянная рассеяния будет подробно обсуждена ниже.

Если импульсы определяется по среднестатистическому значению вторых разностей, то относительная статистическая ошибка

$$\frac{\sigma \rho^2}{\rho^{3/2}} \approx \frac{0,81}{\sqrt{N}},$$

(80.2)

где  $N$  — число измеренных вторых разностей [74, 75].

#### § 4. Корреляционные свойства вторых разностей координат

Измерениям многократного кулоновского рассеяния сопутствуют различные ошибки, для исключения которых полезно знать их корреляционные свойства. Приведем основные положения корреляционного метода анализа случайных процессов [76]. Назовем случайной функцией  $u(x)$  такую функцию своего аргумента, значение которой при любом  $x$  — случайная величина. В результате опыта случайная функция может принять различные конкретные формы. Всякая функция, которой может оказаться равной случайная функция в результате опыта, называется ее реализацией. Аргумент случайной функции  $u(x)$  будем считать величиной неслучайной. Этот аргумент может принимать как дискретные значения, так и меняться непрерывно в некоторой области значений  $x$ . Поскольку соотношения, справедливые для функций непрерывного аргумента, легко обобщаются на случай функций дискретного аргумента, ограничимся сводкой необходимых формул лишь для первого случая.

Средним значением или математическим ожиданием случайной функции  $u(x)$  называется величина

$$\overline{u(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du, \quad (81.2)$$

где  $f(u)$  — закон распределения ординаты случайной функции.

Дисперсия и корреляционная функция случайной функции  $u(x)$  определяются соотношениями

$$D^2(u) = \overline{(u - \overline{u})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \overline{u})^2 f(u) du; \quad (82.2)$$

$$K(x_1, x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (\overline{u_1} - \overline{u_1})(\overline{u_2} - \overline{u_2})$$

$$- \overline{u_2} f(u_1, u_2, x_1, x_2) du_1 du_2. \quad (83.2)$$

Здесь  $f(u_1, u_2, x_1, x_2)$  — двумерный закон распределения  $u(x)$ .

Если среднее значение и дисперсия случайной функции не зависят от  $x$ , а корреляционная функция зависит только от разности координат  $x_2 - x_1 = \tau$ , т. е. если

$$\overline{u(x)} = \text{const},$$

$$D^2(u) = \text{const} \quad \text{и} \quad (84.2)$$

$$K(x_1, x_2) = K(\tau),$$

то случайная функция называется стационарной.

Если корреляционный функционал стационарной случайной функции  $K(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то такая случайная функция называется эргодической. Для эргодической стационарной случайной функции математическое ожидание, вычисленное усреднением по реализации, равно среднему значению, полученному по одной реализации. Для корреляционной функции стационарного случайного процесса справедливы следующие формулы:

$$K(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (85.2)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (86.2)$$

Из (82.2), (83.2) и (85.2) следует, что дисперсия стационарной случайной функции

$$D^2(u) = K(0) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (87.2)$$

Функция  $S^{(0)}$  называется спектральной плотностью, так как стационарная функция  $y(x)$  может быть представлена в виде

$$y(x) = \overline{y(x)} + \int_{-\infty}^{\infty} V^{(0)} e^{i\omega x} d\omega, \quad (88.2)$$

а  $S^{(0)}$  представляет собой дисперсию случайной величины  $V^{(0)}$ , равную дисперсии гармоник  $V^{(0)} e^{i\omega x}$  в разложении случайной функции  $y(x)$  на гармонические колебания (88.2). Иными словами, спектральная плотность стационарной случайной функции характеризует распределение средней интенсивности колебаний по спектру частот. Формулы (85.2) и (86.2) показывают, что задание спектральной плотности  $S^{(0)}$  эквивалентно заданию корреляционной функции  $K(\tau)$ , но использование  $S^{(0)}$  во многих случаях упрощает выкладки и делает все рассуждения более наглядными.

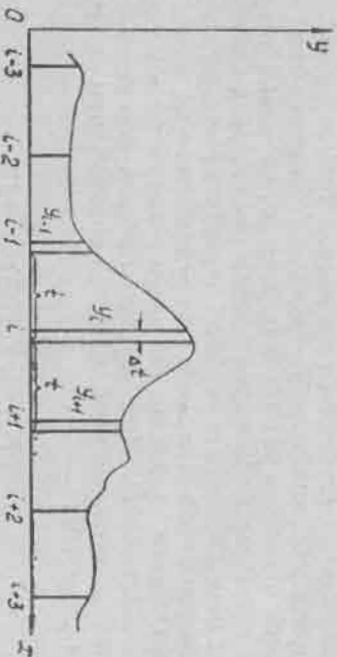


Рис. 7. К рассмотрению корреляции вторых разностей.

Прониллюстрируем приведенные соотношения на примерах. Пусть  $y(x)$  — ордината следа частицы, испытывающей многократное кулоновское рассеяние (рис. 7). Разобьем измеряемый отрезок следа на ячейки длиной  $t$  и вычислим вторые разности  $D_i = y_i^2 - 2y_{i+1} + y_{i+2}$ . Величины  $D_i$  образуют некоторую случайную последовательность.

Поскольку траектория частицы  $y(x)$  в принципе непрерывна, то мы всегда можем разбить след на сколь угодно большое число сколь угодно малых отрезков  $\Delta t$  и вычислить вторые разности для всех троек точек,

отстоящих друг от друга на  $t$ . В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  вторые разности образуют случайную функцию непрерывного аргумента

$$D(x) = y(x) - 2y(x+t) + y(x+2t).$$

Можно показать [77], что  $\overline{D(x)} = 0$ ,  $\overline{D(x)^2} = \text{const}$ , а

$$K(\tau) = \overline{D(x) D(x+\tau)} = \frac{1}{4} \overline{D(x)^2} \cdot g(\tau);$$

$$\begin{cases} 4 - 6\left(\frac{\tau}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{t}\right)^3, & 0 \leq \tau \leq t; \\ 2 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^2, & t < \tau \leq 2t; \\ 0, & \tau > 2t. \end{cases} \quad (89.2)$$

Легко видеть, что  $K(\tau) = 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , т. е. случайная функция  $D(x)$  — стационарна и эргодична. Эргодичность многократного кулоновского рассеяния позволяет вычислить необходимые средние характеристики с помощью единственной реализации. Этот результат использован в § 3 этой главы при выводе формулы, связывающей многократное кулоновское рассеяние и  $D(x)$  отдельной частицы.

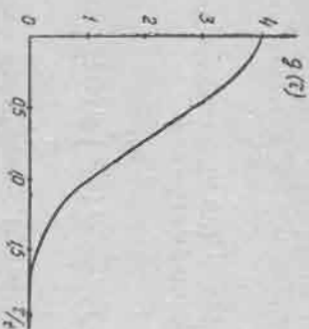


Рис. 8. Корреляционная функция  $g(\tau)$  вторых разностей для многократного кулоновского рассеяния.

Из рисунка 8 видно, что

$$\overline{D(x) D(x+t)} = \frac{1}{4} \overline{D(x)^2}; \quad (90.2)$$

$$\overline{D(x) D(x+jt)} = 0, \quad j \geq 2.$$

Эти соотношения говорят о том, что вторые расстояния, отстоящие друг от друга на расстоянии, большее или равное двум ячейкам, — некоррелированы, а коэффициент корреляции  $K(\tau)/K(0)$  вторых разностей, разделенных ячейкой  $\tau$ , равен  $1/4$ . Формулы (90.2) обобщают аналогичные результаты (70.2), полученные для функции дискретного аргумента.

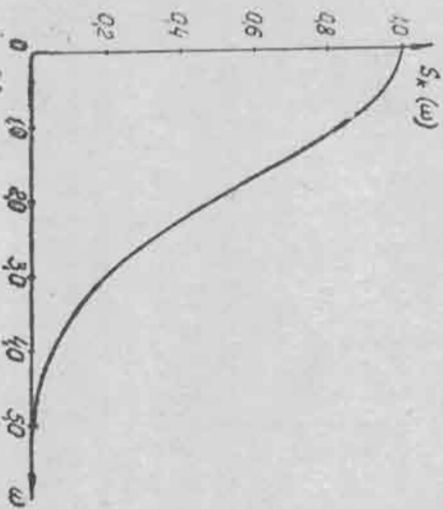


Рис. 9. Спектральная функция вторых разностей многократного кулоновского рассеяния.

Согласно (86.2) и (89.2), спектральная плотность случайной функции  $D(x)$  равна

$$S(\omega) = \frac{1}{4\pi} \overline{D(x)^2} \int_0^{\infty} g(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (91.2)$$

Подставляя в (91.2) конкретное выражение для  $g(\tau)$  (рис. 9), получим

$$S_k(\omega) = \frac{3\overline{D(x)^2}}{2\pi\omega^4} (3 - 4 \cos \omega + \cos 2\omega). \quad (92.2)$$

Рассмотрим корреляционные свойства вторых разностей многократного кулоновского рассеяния для перекрывающихся ячеек. Обозначим эти разности че-

рез  $n$   $D_i$ , где  $n$  — индекс, характеризующий степень перекрывания. При  $n=4$ , например,

$${}^4D_i = y_i - 2y_{i+4} + y_{i+8} = D_i + 2D_{i+1} + 3D_{i+2} + 4D_{i+3} + 3D_{i+4} + 2D_{i+5} + D_{i+6}. \quad (93.2)$$

Ординаты, образующие  ${}^4D_i$  и  ${}^4D_{i+1}$ , изображены на рисунке 10.

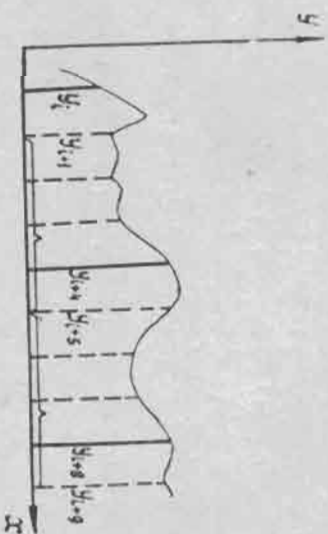


Рис. 10. К рассмотрению корреляции значений  ${}^4D_i$ .

Чтобы рассчитать корреляционные моменты  ${}^4D_i, {}^4D_{i+j}$ , удобно перейти от  $D_i$  к новым статистически независимым переменным  $v_i$  по формуле

$$D_i = v_i + av_{i+1}. \quad (94.2)$$

Так как  $\overline{v_i v_{i+j}} = 0$  при  $j \geq 1$ , то очевидно, что

$$\overline{D_i^2} = (1 + a^2) \overline{v_i^2};$$

$$\overline{D_i D_{i+1}} = a \overline{v_i^2};$$

$$\overline{D_i D_{i+j}} = 0, \quad j \geq 2.$$

Сравнивая (95.2) с (70.2), найдем, что  $a = 2 \pm \sqrt{3}$ . Выберем из этих двух значений наименьшее:  $a = 2 - \sqrt{3}$ . Подставляя (94.2) в (93.2), получим

$${}^4D_i = v_i + (a + 2)v_{i+1} + (2a + 3)v_{i+2} + (3a + 4)v_{i+3} +$$

$$+ (4a + 3) v_{i+4} + (3a + 2) v_{i+5} + (2a + 1) v_{i+6} + a v_{i+7}, \quad (96.2)$$

$$\overline{D_i^2} = (44a^2 + 80a + 44) v_i^2 = 64 \overline{D_i^2}. \quad (97.2)$$

Откуда

Это выражение соответствует известному соотношению, устанавливающему зависимость среднеквадратического значения второй разности координат от длины ячейки  $l$  для многократного кулоновского рассеяния. Вычисляя  ${}^4 D_i^4 D_{i+j}$  при  $j = 1, 2, 3, \dots$ , последовательно получим

$${}^4 D_i^4 \overline{D_{i+1}} = \frac{285}{4} \overline{D_i^2}; \quad {}^4 D_i^4 \overline{D_{i+5}} = \frac{27}{4} \overline{D_i^2};$$

$${}^4 D_i^4 \overline{D_{i+2}} = 46 \overline{D_i^2}; \quad {}^4 D_i^4 \overline{D_{i+6}} = 2 \overline{D_i^2};$$

$${}^4 D_i^4 \overline{D_{i+3}} = \frac{121}{4} \overline{D_i^2}; \quad {}^4 D_i^4 \overline{D_{i+7}} = \frac{1}{4} \overline{D_i^2}; \quad (98.2)$$

$${}^4 D_i^4 \overline{D_{i+4}} = 16 \overline{D_i^2}; \quad {}^4 D_i^4 \overline{D_{i+j}} = 0, \quad j > 8.$$

Используя соотношения, аналогичные (96.2), и выражения (95.2), легко рассчитать корреляционные моменты вторых разностей, вычисленных для перекрывающихся ячеек при любой кратности  $n$ , причем

$${}^n \overline{D_i^n D_{i+j}} = \frac{1}{4} {}^n \overline{D_i^2} {}^n g(j);$$

$${}^n g(j) = \begin{cases} 4 - 6 \left(\frac{j}{n}\right)^2 + 3 \left(\frac{j}{n}\right)^3, & 0 \leq j \leq n; \\ \left(2 - \frac{j}{n}\right)^3, & n < j \leq 2n; \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (99.2)$$

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$  вторые разности  ${}^n D_i$  образуют непрерывную случайную функцию  $D(x)$ , а  ${}^n g(j)$  переходит в  $g(\tau)$ . Приведенный способ вычисления корреляционной функции с помощью перекрывающихся

ячеек позволяет в ряде случаев быстро рассчитать ее без привлечения функции распределения  $D_i$ , если известны только статистические свойства  $y_i$ .

Отметим, что корреляционные свойства вторых разностей целиком и полностью определяются свойствами третьих разностей и разностей более высокого порядка. Например, параметр  $r^2 = \frac{T_i^2}{D_i^2}$  можно вычислить, ис-

пользуя  ${}^n \overline{D_i^2}$  и  ${}^n \overline{D_i^n D_{i+n}}$  следующим образом:

$$r^2 = \frac{({}^n \overline{D_{i+n}^n} - {}^n \overline{D_i^n})^2}{{}^n \overline{D_i^2}} = 2 \left( 1 - \frac{{}^n \overline{D_i^n D_{i+n}}}{{}^n \overline{D_i^2}} \right). \quad (100.2)$$

С помощью (99.2) для многократного кулоновского рассеяния находим, что  $r^2 = \frac{3}{2}$  (см. также § 3 этой главы).

Рассмотрим связь между зависимостью  $\overline{D_i^2}$  от  $t$  и видом корреляционной функции  $D_i D_{i+j}$ . Для многократного кулоновского рассеяния мы получили  $\overline{D_i^2} \sim t^3$  (75.2), используя (70.2). Очевидно, что зависимость  $\overline{D_i^2}$  от  $t$  определяется корреляционной функцией  $D_i D_{i+j}$ , так как вторые разности  ${}^n D_i$  однозначно определяются через  $D_i$ . Возьмем для примера еще две корреляционные функции и вычислим для них зависимость  $\overline{D_i^2}$  от  $t$ .

1. Пусть измеренные значения координат  $y_i$  статистически независимы, т. е.  $y_i y_{i+l} = 0, j > 1$ . Вычисляя  ${}^n \overline{D_i^n D_{i+j}}$ , получим [78] (см. рис. 11)  ${}^n \overline{D_i^n D_{i+j}} = D_i^2 \cdot {}^n p(j)$ , где

$${}^n p(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & 1 < j < n, \\ -\frac{2}{3}, & j = n, \\ 0, & n < j < 2n, \\ \frac{1}{6}, & j = 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (101.2)$$



Таким образом, для корреляционной функции (101.2)  $\overline{D_i^2} = D_i^2 = \text{const}$ , т. е. средний квадрат вторых разностей для статистически независимых координат не зависит от длины ячейки  $t$ .

2. Пусть  $y_i$  представляет случайные поперечные смещения. Для этих смещений [77]

$$D_i = S_{i+1} - S_i,$$

где  $S_i$  — статистически независимые первые разности координат. Вычисляя  $\overline{D_i^2} D_{i+j}$ , получим (рис. 12)

$$\overline{D_i^2} D_{i+j} = n \overline{D_i^2} \cdot {}^n q(j),$$

$${}^n q(j) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{j}{n} \right), & 0 \leq j \leq n; \\ -1 + \frac{1}{2} \left( \frac{j}{n} \right), & n < j \leq 2n; \\ 0, & j > 2n, \end{cases} \quad (102.2)$$

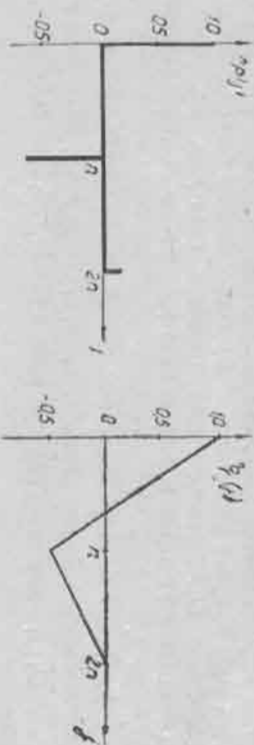


Рис. 11. Корреляционная функция вторых разностей для статистически независимых координат.

Рис. 12. Корреляционная функция вторых разностей для случайных поперечных смещений.

причем  $\overline{D_i^2} = Vt$ , где  $V$  — некоторая постоянная. Следовательно, средний квадрат вторых разностей для  $D_i$ , определяемых случайными смещениями, пропорционален длине ячейки. Аналогичные результаты, установленные между собой, между видом корреляционной функции и зависимостью  $\overline{D_i^2}$  от  $t$ , получены Кирали [79]. Значение параметра  $\rho$  для случаев  $\overline{D_i^2} = \text{const}$

и  $\overline{D_i^2} \sim t$  соответственно равны  $\sqrt{\frac{10}{3}}$  и  $\sqrt{3}$ . Важным является то, что при  $x = \text{const}$  в зависимости  $\overline{D_i^2} \sim t^x$  параметр  $\rho$  также постоянен.

Корреляционные свойства вторых разностей, приведенные нами, очень важны при экспериментальном определении величины многократного кудлоновского рассеяния и исключения ошибок, сопутствующих измерениям.

### Глава III

#### ШУМЫ, ДИСТОРСИИ И ЛОЖНОЕ РАССЯНИЕ

Измерениям многократного кулоновского рассеяния в ядерных фотоэмульсионных всегда сопутствуют различного рода ошибки: дисторсии, ложное рассеяние, шум зерен, шум столбика, перефокусировки, тепловой шум и шум отсчета.

#### § 1. Шумы

Под шумами будем понимать статистическую сумму: 1) шума отсчета, 2) шума зерен, 3) шума перефокусировки, 4) шума столбика микроскопа и 5) теплового шума:

$$\overline{D_{\text{шм}}^2} = \overline{D_{\text{ш}}^2} + \overline{D_{\text{ш}}^2} + \overline{D_{\text{ш}}^2} + \overline{D_{\text{ш}}^2} + \overline{D_{\text{ш}}^2}. \quad (1.3)$$

Все компоненты  $D_{\text{шм}}$  имеют различную природу, статистические свойства и величину. Поэтому, чтобы правильно учитывать влияние шума на результаты измерений, необходимо знать соотношение между всеми его составными частями.

Шум отсчета определяется в основном ошибками при установке нити или биштриха окулярмикрометра на отдельные зерна или группы зерен трека, а также ошибками отсчета делений на шкале барабана окулярмикрометра или ценой наименьшего деления датчика смещения биштриха в полуавтоматических микроскопах.

Очевидно, что отдельные значения координаты  $y_j$ , обусловленные ошибками этого типа, статистически независимы, т. е.

$$\overline{y_i y_{i+j}} = 0, \quad j > 1, \quad (2.3)$$

откуда следует, что

$$\overline{D_{\text{ш}}^2} = \overline{(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})^2} = 6\overline{y_i^2}. \quad (3.3)$$

С помощью этого соотношения можно экспериментально определить  $\overline{D_{\text{ш}}^2}$ , повторно измерив координаты  $y_i$  следа строго в одних и тех же точках. Так как координаты  $y_i$  и повторно измеренные  $y_i'$  статистически независимы, то

$$\overline{D_{\text{ш}}^2} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i')^2. \quad (4.3)$$

На практике обычно вместо среднеквадратических значений  $\sqrt{\overline{D_{\text{ш}}^2}}$  и  $\sqrt{\overline{y_i^2}}$  используются среднеарифметические  $D_{\text{ш}}' = \sqrt{\overline{D_{\text{ш}}^2}}$  и  $\varepsilon = \sqrt{\overline{y_i^2}}$ , которые при гауссовом законе распределения в  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ -раз меньше первых.

В работах Бисваса и др. [80] и Экспонта [81] для величин  $\varepsilon$ , измеренной на микроскопах Кул-М 4005, Користка и КСМ-1, получено значение  $\varepsilon \approx 0,02$  мк. В работе Скирды [82] значение  $\varepsilon$  для микроскопа МВИ-8М оценено как  $0,016 \pm 0,001$  мк, причем указывается, что шум отсчета не зависит от способа фиксирования центров отдельных зерен или групп зерен следа и глубины затенения следа в эмульсии, но зависит от среднего числа зерен  $n$ , по которым устанавливается нить окулярмикрометра.

Сначала, при небольших  $n$ ,  $\overline{D_{\text{ш}}^2}$  возрастает, а затем, по достижении некоторого критического значения  $n$ , уменьшается.

Шум отсчета  $\overline{D_{i_0}^2}$ , согласно работам [80, 81 и др.], не зависит от длины ячейки  $t$ , на которой измерались координаты  $y_i$ . Этот результат — следствие статистической независимости  $y_i$ . (§ 4, гл. II).

Шум зерен. Ошибка, обусловленная отклонением положения центров проявленных зерен от истинной траектории частицы, называется шумом зерен. Этот шум вызывается, во-первых, тем, что частица, проходя через эмульсионный слой, активирует не только кристаллы  $AgHal$ , которые она пересекает по диаметру, но и почти все кристаллы, пересекаемые по хордам; и, во-вторых, тем, что на заключительной стадии проявления происходят микросмещения отдельных зерен серебра. Шум зерен, обусловленный первой причиной, может быть приближенно оценен как [82]

$$\sqrt{\overline{D_{i_0}^2}} \approx R, \text{ мк}, \quad (5.3)$$

где  $R$  — радиус непроявленных зерен галлонда серебра. Для эмульсии НИКФИ-Р, например,  $\sqrt{\overline{D_{i_0}^2}} \sim 0,14 \text{ мк}$ .

Как и шум отсчета, шум зерен может быть определен экспериментально путем измерения координат  $y_i$  и  $y_i''$  в точках, отстоящих на расстоянии  $l$  порядка  $10 \div 50 \text{ мк}$ . Пренебрегая в силу малости  $l$  вкладом многократного кулоновского рассеяния, ложного рассеяния, дисторсии и исключая шум отсчета, получим

$$\overline{D_{i_0}^2} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i'')^2 - \overline{D_{i_0}^2}. \quad (6.3)$$

В работе [82] подробно изучены все свойства шума зерен на микроскопе типа МБИ-8М. Показано, что шум зерен практически не зависит от условий проявления, а определяется в основном процессом активирования микрокристаллов и физико-механическими свойствами эмульсии. Наиболее вероятный шум отдельных зерен и глобов в эмульсии НИКФИ-Р равен  $\overline{D_{i_0}^2} = 0,162 \pm 0,003 \text{ мк}$ . Показано, что распределение вторых разностей, обусловленных шумом зерен, мож-

но считать гауссовым (рис. 13) и, следовательно, для эмульсии НИКФИ-Р  $\sqrt{\overline{D_{i_0}^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} D_{i_0}' = 0,203 \pm 0,004 \text{ мк}$ .

Наиболее интересные для экспериментатора результаты работы [82] касаются шума зерен и отсчета. Они дают возможность этих шумов от среднего числа зерен  $n$ , по которым устанавливается нить окулярмикрометра (рис. 14). Из рисунка видно, что величина ошибки, обусловленная разбросом центров тяжести зерен, может быть значительно уменьшена путем увеличения  $n$ .

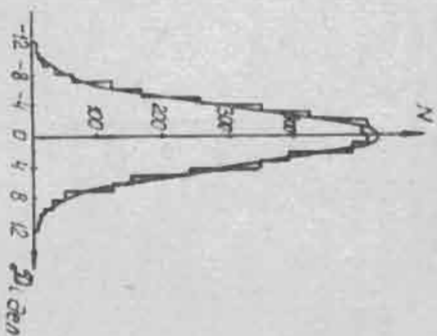


Рис. 13. Распределение вторых разностей, обусловленных шумом зерен [82] ( $N=5000$ ). Кривая — распределение Гаусса.

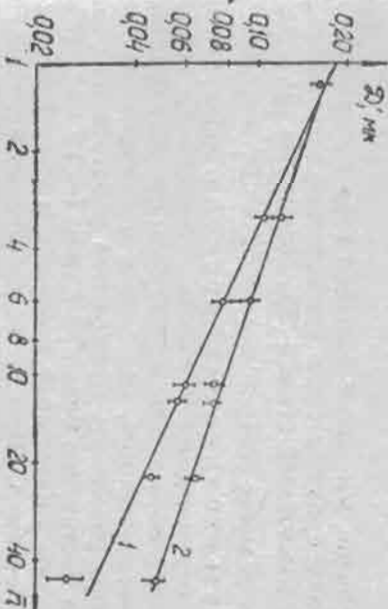


Рис. 14. Зависимость шума зерен и ошибок отсчета от  $n$  [82]: 1 — шум зерен; 2 — суммарный шум зерен и отсчета. Кривые проведены по методу наименьших квадратов.

Что касается зависимости шума зерен от длины ячейки, то, как и для шума отсчета, он не зависит от  $l$ , т. е.

$$\overline{D_{i_0}^2} = \overline{D_{i_0}^2} = \text{const}. \quad (7.3)$$

Шум перефокусировки. Ошибки, обусловленные непрямолинейностью перемещения объектива микроскопа при перефокусировке, называются шумом перефокусировки. Величина этой ошибки зависит от угла погружения следа частицы в эмульсию. При вертикальном перемещении объектива на  $5 \div 20$  мк шум перефокусировки  $D'_{in} \approx 0,02 \div 0,30$  мк [83, 84] (рис. 15).

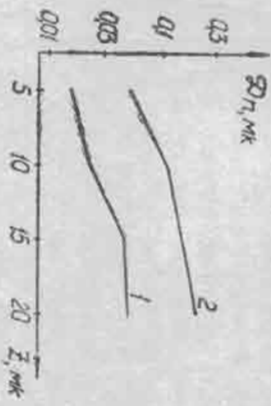


Рис. 15. Зависимость шума перефокусировки от величины перемещения объектива Z [84] для микроскопов: 1 — МВН-2; 2 — МВН-8.

Для следов, имеющих большой угол погружения, шум перефокусировки можно существенно уменьшить, применяя наклонный столик [85]. Для шума  $D'_{in}$  очевидно, имеет место соотношение  $D'^2_{in} = D^2_{in} = const.$

Шум столика микроскопа. Непрямолинейность перемещения столика микроскопа вызывает ошибки, которые называют шумом столика. В современных исследованиях, связанных с измерением многократного рассеяния, приходится работать на отрезках следов достаточно большой длины ( $\sim 10$  см), поэтому необходим тщательный контроль и учет боковых смещений столика. Шум столиков обычно измеряют с помощью интерферометров [86, 87] (рис. 16). Из рисунка видно, что шум столиков микроскопов МИР-2, Кордета MS-2 и др., специально разработанных для измерения рассеяния, невелик и равен приблизительно  $D'_{ст} \approx 0,01 \div 0,03$  мк на ячейке  $t = 500$  мк. С длиной ячейки  $D'_{ст}$  изменяется незначительно ( $D'_{ст} \sim t^{0,2-0,5}$ ).

Эта зависимость объясняется своеобразным видом корреляционной функции  $D'_{ст}$  (рис. 17). Поскольку вторые моменты  $D'_{ст}$  коррелированы, шум столика обычно исключают одновременно с ложным рассеянием.

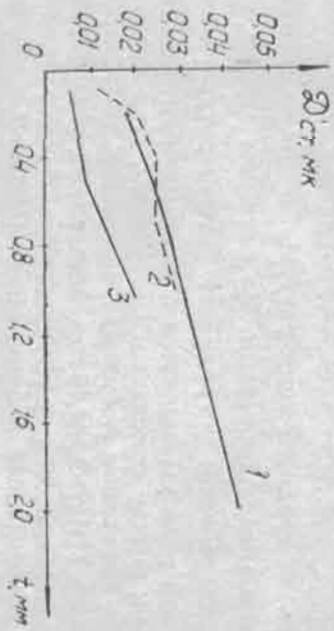


Рис. 16. Зависимость шума столика микроскопа от длины ячейки t: 1 — МИР-2; 2 — Кордета MS-2; 3 — МВН-8М.

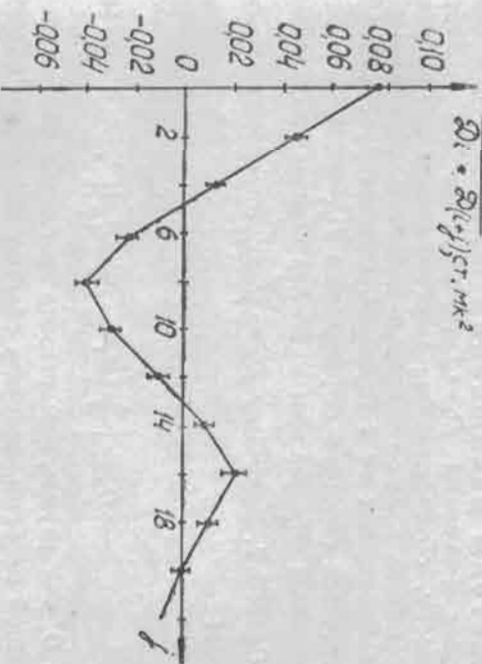


Рис. 17. Экспериментальная корреляционная функция вторых моментов для шума столика МИР-2, измеренная на ячейке  $t = 2000$  мк с восьмикратным переувеличением.

Температурой шум обусловлен различными влиянием температуры на отдельные части микроскопа. Вели-

чина  $D'_{ir}$ , например, для микроскопа типа Користка выражается соотношением [80]

$$D'_{ir} = 38 \frac{dT}{dt} \Delta t, \quad (8.3)$$

где  $\frac{dT}{dt}$  — градиент температуры, а  $\Delta t$  — интервал времени между отсчетами. Из формулы видно, что при постоянном градиенте температуры  $\frac{dT}{dt}$  тепловой шум уменьшается с уменьшением интервала времени между отдельными отсчетами. При автоматическом измерении координат, например, на микроскопах типа МИРЭ-2,  $\Delta t$ , а следовательно, и  $D'_{ir}$ , значительно меньше, чем при ручном измерении.

В современных микроскопах (МИРЭ-2, Користка MS-2 и др.) величина теплового шума пренебрежимо мала по сравнению с другими источниками шумов и ее при измерениях обычно не учитывают.

Методы искомой шумов. Пусть измеренные значения  $D_i = D_{ik} + D_{im}$ , где  $D_{ik}$  — вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием, а  $D_{im}$  — вторые разности, обусловленные не зависящими от  $t$  шумами. Существует множество различных способов определения  $D_{ik}$  по измеренным значениям  $D_i$ , из них наиболее важны следующие:

*Способ 1.* Величину  $D_k = \sqrt{D_{ik}^2}$  определяют по формулам

$$D_k = (\overline{D_i^2} - \overline{D_{im}^2})^{1/2}, \quad (9.3)$$

$$D_k = \left[ \frac{2}{3} \left( \overline{T_i^2} - \frac{10}{3} \overline{D_{im}^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (10.3)$$

где  $\overline{D_{im}^2}$  — шумы, измеренные на следях частиц очень большой энергии, которые обычно называют калибровочными. При определении  $D_{im}^2$  необходимо следить, чтобы калибровочные следы имели ту же плотность зерен, что и измеряемые.

Относительная ошибка величины  $D_k$  вычисляется по формуле [9]

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad (11.3)$$

где  $N$  — число вторых разностей;

$$C = (0.95 + 1.13\mu + 2.49\mu^2)^{1/2} \text{ для (9.3) и}$$

$$(12.3)$$

$$C = (1.53 + 6.45\mu + 10.33\mu^2)^{1/2} \text{ для (10.3)},$$

$$\text{Здесь } \mu = \frac{\overline{D_{im}^2}}{D_{ik}^2}.$$

*Способ 2* основан на использовании кратных ячеек. Поскольку  $\overline{T_{ik}^2}$  и  $\overline{D_{im}^2} \sim t^3$ ,  $\overline{T_{im}^2}$  и  $\overline{D_{im}^2} \sim t^0$ , то  $D_k$  можно определить следующим образом:

$$D_k = \left( \frac{\pi \overline{D_{i2}^2} - \overline{D_{i2}^2}}{n^3 - 1} \right)^{1/2}; \quad (13.3)$$

$$D_k = \left( \frac{\pi \overline{T_{i2}^2} - \overline{T_{i2}^2}}{2(n^3 - 1)} \right)^{1/2}, \quad (14.3)$$

где  $n$  — показатель кратности ячеек. Относительная ошибка величины  $D_k$  в этом случае также вычисляется по формуле (11.3), причем [9]

$$C = (2.03 + 0.138\mu + 0.0402\mu^2)^{1/2} \text{ для (13.3)}$$

при  $n = 2$

$$\text{и} \quad (15.3)$$

$$C = (3.6 + 0.096\mu + 0.003\mu^2)^{1/2} \text{ для (14.3)}$$

при  $n = 4$ .

Под  $N$  в этом случае подразумевается число основных ячеек длиной  $t$ , а не  $nt$ .

*Способ 3* основан на корреляционных свойствах вторых разностей многократного кулоновского рассея-

ния и шумов. Суть его состоит в использовании таких комбинаций вторых моментов  $D_i D_{i+j}$ , которые не подвержены шумам [4, 44, 77, 88]. Например,  $D_k$  можно найти следующим образом [4]:

$$D_k = \sqrt{\frac{3}{11}(D_1^2 + \frac{3}{2} D_1 D_{11})^{1/2}}, \quad (16.3)$$

примем

$$C = (1,047 + 0,155\mu + 0,090\mu^2)^{1/2}. \quad (17.3)$$

Способ 4 состоит в определении  $D_k$  по среднеквадратическому значению величины [89, 90]

$$D_k(m) = \frac{(y_{i+1} + y_{i+2} + \dots + y_{i+m-1}) - 2(y_{i+m} + y_{i+m+1} + \dots + y_{i+2m-1}) + (y_{i+2m} + \dots + y_{i+3m-1})}{m} = \frac{m D_{i+m} D_{i+1} + \dots + m D_{i+m-1}}{m} \quad (18.3)$$

Используя (99.2) и (101.2) при  $m=5$ , получим

$$D_1(5)^2 = 0,83008^5 D_{1k}^2 + \frac{1}{5} D_{1m}^2. \quad (19.3)$$

В отличие от предыдущих этот способ не позволяет полностью избавиться от шумов, вклад которых, однако, уменьшается как  $m^{-1}$ .

Способ 5 основывается на корреляционных свойствах перекрывающихся ячеек [78]. В параграфе 4 (глава II) показано, что  ${}^n D_{i+1}^n = 0$  для статистически независимых координат  $y_i$ . Поэтому  $D_k$  можно определить по формуле (см. 99.2) [91]

$$D_k = 2 \left[ \frac{{}^n D_{i+1}^n D_{i+1}}{n g(1)} \right]^{1/2}. \quad (20.3)$$

Статистическая ошибка величины  $D_k$  в этом случае равна для  $n=2, 3$  и 4 соответственно:

$$\frac{\Delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,779 + 0,141\mu + 0,094\mu^2)^{1/2}, \quad (21.3)$$

$$\frac{\Delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,630 + 0,147\mu + 0,218\mu^2)^{1/2}, \quad (22.3)$$

$$\frac{\Delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,589 + 0,132\mu + 0,144\mu^2)^{1/2},$$

где  $N$  — число измеренных вторых разностей на основной ячейке  $t$ .

Следует отметить, что с увеличением степени перекрывания  $n$  члены, содержащие  $\mu$ , сначала возрастают, а при  $n > 3$  уменьшаются приблизительно как  $n^{-1/2}$ . Это объясняется тем, что для шумов  ${}^n D_{i+1}^n = 0$ , причем статистическая обеспеченность этого соотношения растет с ростом  $n$ . Сравнение формул (12.3), (15.3), (17.3) и (21.3—23.3) показывает, что наибольшую точность определения величины  $D_k$  дает последний способ, во-первых, потому, что с ростом  $n$  растет статистическая обеспеченность криволинейной части рассеяния и, во-вторых, потому, что для шумов, определенных по помощи перекрывающихся ячеек,

$$\frac{\Delta D_m}{D_m} \approx \frac{1,1}{\sqrt{n(N-1)+1}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

## § 2. Дисторсия

После обработки ядерной фотоэмulsion следы частиц искривляются и могут принять характерную  $S$ -образную или еще более сложную форму. Такие макроскопические искажения обычно называются дисторсией. Основная причина дисторсии — разбухание и последующая усадка желатина в процессе проявления, фиксирования, промывки и сушки фотоэмulsion. После наготовления слоя в его желатиновой основе возникают различные внутренние напряжения, которые в значительной степени ослабляются при обработке, вызывая деформации. Видимо, искажения этого типа существенно зависят от показателя водородных ионов pH и температуры растворов, которыми обрабатывают эмульсию. Так, в работе [92] показано, что растворы с  $\text{pH} < 7,5$  не влияют на дисторсию, в то время как при  $\text{pH} > 7,5$  дисторсия резко возрастает. Показано также, что при температуре растворов, большей 15°C, дисторсия значительно увеличивается. В работе

[93] изучена зависимость дисторсии от условий хранения эмульсии до экспонирования. Показано, что если эмульсию хранить в условиях высокой относительной влажности и температуры, то внутренние напряжения существенно ослабевают и дисторсия обработанных слоев снижается.

Другой важный источник дисторсии — сушка обработанных и наклеенных на стекло слоев. Если пластинка сушится несколько наклонно или на ребре, то очевидно, что под действием силы тяжести одни части слоев сдвигаются по отношению к другим. Кроме того, в результате сушки возникают специфические искажения на краях эмульсии.

Значительная дисторсия появляется и при наклеивании эмульсии на стекло, если слой прикатывают или прижимают к поверхности каким-либо способом. Особым и сравнительно частым источником дисторсии являются наполненные жидкостью пузырьки, образующиеся между эмульсией и стеклом. Дисторсия может вызываться и макроасштабной неоднородностью плотности эмульсии. Коэффициент усадки зависит от плотности вещества эмульсии, а это и приводит к возникновению искажений. Существуют и другие причины, вызывающие искажения следов частиц в эмульсии.

Рассмотрим способы измерения и исключения дисторсии. Пусть в необработанном слое эмульсии толщиной  $BC = T$  (рис. 18) имеется скрытое изображение прямого следа  $AB$ . Введем систему координат  $x_0, y_0, z_0$  так, чтобы плоскость  $x_0, y_0$  совпала с поверхностью стекла, на которую наклеена эмульсия. После обработки и сушки след  $AB$  искажится и перейдет в  $A'B'$ . При этом толщина эмульсии уменьшится до  $B'C' = T_0$ . Отношение  $\frac{B'C'}{BC} = \frac{T_0}{T} = S_0$  называется коэффициентом усадки. Векторный элемент трека  $d\vec{R}_0(dx_0, dy_0, dz_0)$  переходит в соответствующий векторный элемент  $d\vec{R}(dx, dy, dz)$ . Введем в рассмотрение непрерывную векторную функцию  $D(x_0, y_0, z_0)$ , ставящую в соответствие каждой точке следа  $AB$  определенную точку следа  $A'B'$ . Очевидно, что

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + \vec{d}D. \quad (24.3)$$

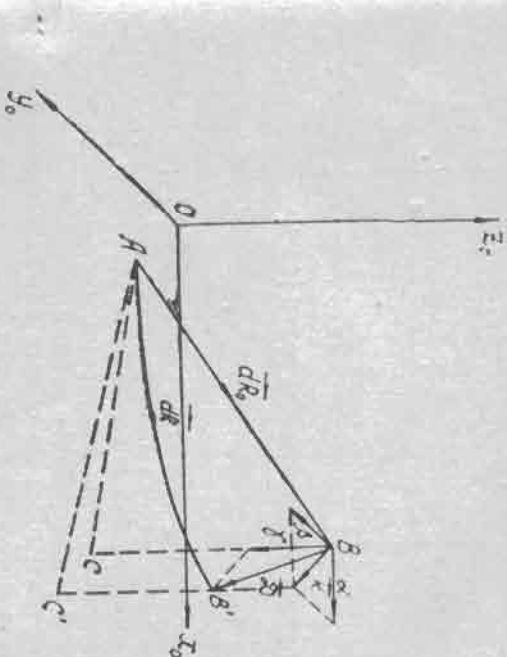


Рис. 18. Искажение следа частицы за счет дисторсии.

Обозначая проекции вектора  $\vec{D}$  на оси  $x_0, y_0$  и  $z_0$  через  $d(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\beta(x_0, y_0, z_0)$  соответственно и проектируя (24.3) на эти оси координат, получим

$$\begin{cases} dx = \left(1 + \frac{\partial x}{\partial x_0}\right) dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial y_0}\right) dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial z_0}\right) dz_0. \end{cases} \quad (25.3)$$

Таким образом, дифференциальный элемент следа частицы в необработанной эмульсии переводится в соответствующий дифференциальный элемент следа в обработанной эмульсии с помощью матрицы

$$M = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial \beta}{\partial y_0} & \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} & \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (26.3)$$

Определитель этой матрицы равен [4.94]

$$\det M = \frac{1}{S_0}, \quad (27.3)$$

где  $S_0$  — коэффициент усадки. Дифференциальное уравнение в частных производных (27.3), удовлетворяющее определенным граничным условиям, описывает все возможные типы дисторсии, согласующиеся с постоянством коэффициента усадки.

Рассмотрим один из самых важных типов дисторсии, который обычно называют гравитационным. Эта дисторсия возникает вследствие сдвиговых напряжений, параллельных плоскости эмульсии. Предположим, что силовое поле и плотность эмульсии однородны. Тогда естественны следующие граничные условия:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{при } z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z_0} = \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \quad \text{при } z_0 = T.$$

Кроме того, будем считать, что  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят только от  $z_0$ , т. е.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} = \frac{\partial \beta}{\partial y_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} = 0.$$

В этих предположениях простейшим нетривиальным решением уравнения (27.3) будет

$$\begin{cases} \alpha = \frac{K}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \cos \vartheta, \\ \beta = \frac{K}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \sin \vartheta, \\ \gamma = z_0 \left( \frac{1}{S_0} + 1 \right). \end{cases} \quad (28.3)$$

Здесь  $\vartheta$  — постоянная, определяемая направлением поля, а  $K$  — величина тангенциальной составляющей вектора дисторсии  $\vec{D}$  на поверхности эмульсии — воздух. Обычно мерой дисторсии в ядерной фотоэмульсии называется величина

$$K_d = \frac{K}{T^2}. \quad (29.3)$$

Если  $K$  измерять в микронах, а толщину необработанный эмульсии в миллиметрах, то  $K_d$  будет выражена в ковансах. Таким образом,  $1 \text{ ковс} = 1 \frac{\mu\text{м}}{\text{мм}^2}$ . Стандартных эмульсиях  $K$  имеет величину порядка 10 мк. Тангенциальная составляющая вектора дисторсии (28.3) равна

$$\vec{K} = i\vec{z} + j\vec{\beta} = \vec{K}_1 \left( \frac{z_0}{T} \right) + \vec{K}_2 \left( \frac{z_0}{T} \right)^2, \quad (30.3)$$

где

$$\vec{K}_1 = 2\vec{K} (i \cos \vartheta - j \sin \vartheta),$$

$$\vec{K}_2 = -K (i \cos \vartheta - j \sin \vartheta),$$

откуда

$$\vec{K}_1 = -2\vec{K}_2. \quad (31.3)$$

Соотношение (30.3) показывает, что рассматриваемая нами дисторсия будет квадратичной. В общем случае дисторсия может быть и более высоких порядков, т. е.

$$\vec{K} = \vec{K}_1 \left( \frac{z_0}{T} \right) + \vec{K}_2 \left( \frac{z_0}{T} \right)^2 + \vec{K}_3 \left( \frac{z_0}{T} \right)^3 + \dots \quad (32.3)$$

Агостолакис и Маджор [95] экспериментально изучили вектор  $\vec{K}$ . Для этого они наклеивали эмульсионные слои на обе стороны тонкой стеклянной пластинки. Зная точку входа и выхода следа из стекла, можно определить первоначальный угол погружения следа в необработанной эмульсии, а также найти вектор  $\vec{K}$ , если пластины обладают достаточно высокой энергией. По их данным,  $\vec{K}$  может быть представлено соотношением (30.3), причем  $|\vec{K}_1| / |\vec{K}_2| = 2.03 \pm 0.03$ , а  $\vec{K}_1 \approx -2\vec{K}_2$ . Это говорит о том, что в ядерной фото-



Эмульсии преобладают дисторсии линейная и квадратичная. Баркас, Смит и Вирнбаум [94] также считают, что для эмульсионных слоев, не испытывающих поперечных напряжений, предположение о пренормированности квадратичном характере дисторсии вполне оправдывается. Предположим, что измерено  $N$  значений координаты  $y$ , подверженной дисторсии. Тогда каждое значение

$$y_i = y_{i0} + \beta_i \quad (33.3)$$

где  $y_{i0}$  — истинная координата, а  $\beta_i$  — проекция вектора  $D$  на ось  $y$ .

Вычисляя вторые разности, имеем

$$D_i = D_{i0} + (\beta_i - 2\beta_{i+1} + \beta_{i+2}) = D_{i0} + d_i \quad (34.3)$$

Когда имеются искажения только первого и второго порядков, то, согласно (28.3),

$$\beta_i = \frac{K}{T^2} (2z_i T - z_i^2) \sin \theta. \quad (35.3)$$

Если первоначальный угол погружения трека  $\varphi$ , то длина ячейки  $l = \frac{L}{N-1} = \frac{(N-1)tg\varphi}{T}$ , где  $L$  — длина проекции следа на плоскость  $(x_0, y_0)$ , а  $N-1$  — число ячеек. Очевидно также, что  $z_i = ittg\varphi$ , а

$$\beta_i = \frac{K}{T^2} (2itTtg\varphi - i^2t^2tg^2\varphi) \sin \theta. \quad (36.3)$$

Соответственно

$$D_i = D_{i0} - \frac{2K}{T^2} t^2 tg^2 \varphi \sin \theta \quad (37.3)$$

и

$$d' = \left| \frac{d_i}{d_1} \right| = \frac{2K}{T^2} t^2 tg^2 \varphi \sin \theta. \quad (38.3)$$

Из этой формулы видно, что среднеарифметическое значение второй разности, обусловленной квадратичной дисторсией, пропорционально квадрату длины ячейки  $l$  и  $tg^2\varphi$  (рис. 19) [96]. Экспериментально полученные зависимости  $d'$  от угла  $\varphi$  для различных длин ячеек в пределах ошибок согласуются с формулой (38.3). Соотношение (37.3) показывает, что если необходимо вы-

числить вторые разности  $D_{i0}$ , не подверженные дисторсии второго порядка, то нужно каждое значение  $D_i$  исправить на некоторую постоянную величину  $d'$ .

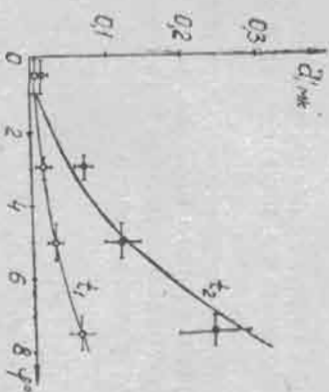


Рис. 19. Зависимость дисторсии от угла погружения следов для ячеек  $t_1 = 250$  мк и  $t_2 = 500$  мк в эмульсии Ильфорда G-5 [96]. Кривые — расчетная зависимость.

Измеренные координаты следа, подверженного произвольной дисторсии, можно представить следующим образом:

$$y_i = y_{i0} + a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + \dots \quad (39.3)$$

( $i = 1, 2, 3, \dots$ )

Здесь  $y_{i0}$  — координаты, не содержащие искажений, а  $bx_i, cx_i^2, \dots$  — члены, описывающие дисторсию соответственно первого, второго, третьего и более высоких порядков. Если длина ячейки, на которой измерились координаты, равна  $l$ , то  $x_i = il$ . Вычисляя первые  $S_i$ , вторые  $D_i$  и третьи  $T_i$  разности координат, имеем

$$S_i = S_{i0} + bl + c l^2 (2i + 1) + d l^3 (3i^2 + 3i + 1) + \dots$$

$$D_i = D_{i0} + 2c l^2 + 6d l^3 (i + 1) + \dots \quad (40.3)$$

$$T_i = T_{i0} + 6d l^3 + \dots$$

Из этих соотношений видно, что первые разности не содержат постоянной величины  $a$ , вторые — линей-

ной дисторсии  $b\chi_1$ , третьи — дисторсии второго порядка  $s\chi_1$  и т. д. Используя только выражения (40.3), можно получить три различных способа исключения дисторсий.

*Способ 1.* Для определения  $D_2$  используются третьи разности  $T_1$ , которые не подвержены дисторсии второго порядка.

*Способ 2.* Вторые разности  $D_1$  для следов, подверженных дисторсии второго порядка, равны сумме  $D_{10}$  и некоторой постоянной величины  $2ct^2$ . Поскольку среднее значение  $D_{10}$  равно нулю, то

$$2ct^2 = \overline{d_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} D_i}{N-2}, \quad (41.3)$$

а неискаженные значения вторых разностей равны

$$D_{10} = D_1 - \overline{d_1}. \quad (42.3)$$

Сравнивая формулы (37.3) и (42.3), находим, что

$$\overline{d_1} = -\frac{2K}{T_1^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \vartheta. \quad (43.3)$$

Таким образом, чтобы исключить дисторсию второго порядка, описываемую выражением (37.3), достаточно найти среднее алгебраическое значение  $D_1$  и вычесть его из каждого значения измеренных вторых разностей [67]. В некоторых случаях удобнее применять формулу [96]

$$D'_{10} = \frac{2 \left( \sum_{i=1}^n D_1 x_i - n \overline{d_1} \right)}{N-2}, \quad (44.3)$$

где  $n$  — число  $D_1 x_i > \overline{d_1}$  со своим знаком, а

$$\overline{d_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} D_i}{N-2} = \frac{S_N - S_1}{N-2}.$$

*Способ 3* наиболее общий и может быть применен для исключения дисторсий любого порядка. Пусть  $a$ ,

$b$ ,  $c$  и  $d$  не равны нулю, а все остальные члены равны нулю. Так как третьи разности  $T_{10}$  не подвержены дисторсии, то  $T_{10} = 0$  и, согласно (40.3),

$$d = \frac{1}{6t^3} T_1. \quad (45.3)$$

Подставляя это значение  $d$  в (40.3) и учитывая, что  $D_{10} = 0$ , получим

$$\overline{D_1} = 2ct^2 + \frac{N+1}{2} T_1,$$

откуда

$$2ct^2 = \overline{D_1} - \frac{N+1}{2} T_1. \quad (46.3)$$

Здесь  $N$  — число измеренных координат  $i/j$ . Согласно (40.3), (45.3) и (46.3), вторые разности, исправленные на дисторсию второго и третьего порядков, равны

$$D_{10} = D_1 - \overline{D_1} + T_1 \left[ \frac{N+1}{2} - (i+1) \right]. \quad (47.3)$$

Судя по результатам проверки формулы (47.3) на первичных следах  $\gamma$ -мезонов с импульсом  $17 \text{ ГэВ}/c$  в эмульсии Илльфорд G-5 для следов частиц, имеющих даже малый угол погружения в эмульсию, при измерении расстояний на больших ячейках необходимо учитывать дисторсию третьего порядка.

### § 3. Ложное рассеяние

Помимо шумов и дисторсии, мешающих измерению многократного кулоновского рассеяния, наблюдаются еще малые (локальные) искажения следов частиц в эмульсии. Влияние таких искажений проявляется в виде так называемого ложного рассеяния, которое наиболее трудно отличить от кулоновского. Впервые на существование ложного рассеяния указали Висвас и др. [80]. Они, определяя ложное рассеяние с помощью измерения многократного рассеяния на следах высокоэнергичных частиц космического излучения, установили, что величина этого рассеяния увеличивается с

длинной ячейки примерно по такому же закону, как и кулоновское, и что надежное измерение истинного кулоновского рассеяния возможно для однозарядных частиц только с энергией ниже 600 Мэв и многозарядных — с энергией ниже 300 Мэв на нуклон. Несмотря на то, что ложное рассеяние обнаружилось практически во всех типах ядерных эмульсий. Было также выяснено, что величина этого рассеяния сильно колеблется от одной партии эмульсии к другой, от одного слоя к другому и изменяется даже в пределах одного эмульсионного слоя. Одно время существовало мнение о невозможности определения энергии частиц выше 1 Гэв путем измерения многократного рассеяния на отдельных следах. В то же время некоторые авторы считали, что можно определять энергию частиц в области даже нескольких десятков Гэв и выше [3, 97, 98].

Сразу же после открытия ложного рассеяния предпринимались попытки уменьшить его, улучшив физико-механические свойства ядерной эмульсии. Представляются интерес результаты работы [99], в которой указано, что при определенном режиме обработки ядерной эмульсии ложное рассеяние может быть сведено до минимума. Обработка ядерной эмульсии с помощью акустических колебаний приводит к уменьшению величины ложного рассеяния и дисторсии [100].

*Измерение ложного рассеяния.* Величина среднего квадрата второй разности ложного рассеяния  $D_{1n}^2$  может быть определена из соотношения

$$\overline{D_{1n}^2} = \overline{D_1^2} - \overline{D_{1k}^2} - \overline{D_{1m}^2} - d^2, \quad (48.3)$$

где  $D_1$  — измеренные вторые разности;  $D_{1m}$  — вторые разности, включающие ошибки отчета, шума зенитов, перефокусировки, столика и т. п.;  $d$  — вторые разности, обусловленные дисторсией;  $D_{1k}$  — вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием. Среднеквадратическое значение этих разностей вычисляется по формуле (75.2)

$$\sqrt{\overline{D_{1k}^2}} = \frac{K'_0 t^{1/2}}{573 \rho^{1/2} c},$$

где  $t$  — длина ячейки, жк;  $\rho$  — произведение импульса частицы на ее скорость, Мэв;  $K'_0$  — постоянная рассеяния, вычисленная по теории Вильямса — Молвер [51].

При значительной дисторсии второго порядка ложное рассеяние можно оценить с помощью третьих разностей

$$\overline{T_{1n}^2} = \overline{T_1^2} - \overline{T_{1k}^2} - \overline{T_{1m}^2}, \quad (49.3)$$

где  $T_1$  — измеренные третьи разности;

$$\overline{T_{1k}^2} = \frac{8}{3} \overline{D_{1k}^2}, \quad \overline{T_{1m}^2} = \frac{10}{3} \overline{D_{1m}^2}, \quad \overline{T_{1n}^2} = \rho_n^2 \overline{D_{1n}^2}.$$

Чтобы оценить  $\overline{D_{1n}^2}$  по формуле (49.3), необходимо заранее знать величину  $\rho_n$  или же при определении энергии частиц пользоваться только третьими разностями. Существуют и другие методы измерения  $\overline{D_{1n}^2}$ , основанные уже на свойствах самого ложного рассеяния. Характер распределения вторых разностей ложного рассеяния пока неясен. Большинство экспериментальных данных указывает на то, что, по-видимому, это распределение незначительно отличается от нормального.

*Зависимость ложного рассеяния от длины ячейки.*

В многочисленных работах показано, что  $D'_n = \sqrt{\overline{D_{1n}^2}} = a' n^x$ . Сводка экспериментальных значений  $a$  и  $x$  дана в таблице 3.

По данным, приведенным в таблице 3,  $D'_n$  в среднем увеличивается пропорционально длине ячейки. Заметное отличие показателя  $x$  от единицы, по-видимому, можно объяснить не только свойствами самой эмульсии, но и недостаточно корректным исключением различных шумов, дисторсий и т. п. В некоторых работах показано, что с увеличением длины ячейки показатель  $x$  уменьшается [57, 61, 104, 114]. Поведение ложного рассеяния в области очень больших длин ячеек ( $t > 1$  см) еще до конца не выяснено. Исследованию ложного рассеяния на таких ячейках путем изме-

Таблица 3

Автор	Интервал длин зыбоек, ед.-100 мк	$\sigma$ , мк	$x$	Интульс частич, Гэв с
1	2	3	4	5
Биснае и др. [80]	2,5—10	0,02—0,30	1,57—1,1	Косм. лучи
Фей [101]	10—40	0,087—0,043	1	*
Лорман и Тейчер [102]	5—40	0,042	1	*
Брисбаут и др. [56]	5—20	0,02—0,04	1	*
Апостоловски и др. [108]	5—20	0,02—0,04	1	4,2
Биснае и др. [57]	10—30 30—80	0,04—0,05 0,11—0,15	0,8 0,5	6,2 и 5,7
Финшер и Лорд [104]	5—20	0,034	1	6,2
Часников и др. [105]	>50	—0	?	6,2
Самойлович и др. [106]	5—80	0,08	0,6	10
Акопова [107]	5—20	0,030	0,7	8,5
Жюдек [108]	2,5—5	0,04—0,18	0,3—1	1,7
Давкаре и Сударшан [109]	5—40	0—0,014	0—1,2	6,2
Лагнукс и Ренард [110]	5—40	0,016	1,26	6,2
Крекер [93]	10—40	0,031	1	14,5
Мараари—Чи- еа, Ватгин [111]*	5—40	0,017—0,033	0,87—1,11	10
Пал и Рай [61]	20—400	0,02	1	17,2
Возек и др. [62]	20—80	0,060	0,90	24
Раво и Камал [112]	2,5—80	0,017	0,91	24
Шарапов и др. [113]	5—40	0,028	0,97	7,5
	50—300	0,0068	1,22	17,2
	10—100	0,098	1,26	17,2
	5—80	0,04	0,8	19,8

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
Даль-Кенсен [99]	20—40	—0	?	24
Адгьян и др. [114]	40—120 120—200	0,033—0,011 —0	0,9—1,3 ?	27
Раво и Камал [115]	20—120	0,063—0,007	1—1,25	24 и 27
Настоящая работа	20—80	0,008	0,85	60

\* При нахождении  $D'$  использовалась экспериментальное значение  $K$ , которое меньше соответствующего значения, рассчитанного по теории Вильямса [51].

рения рассеяния частиц с энергией 20—30 Гэв не дает надежных результатов, так как велик вклад кулоновского рассеяния. Замечено, что при  $l > 1$  см измеренная координатным методом величина второй разности может быть меньше теоретического значения  $D_n$ . Даже если не исключать  $D_n$ ,  $D_{n+1}$  и  $d$  [58, 93, 104, 114]. Возможно поэтому наблюдается различие в величинах  $d$  и  $x$  при больших  $l$ .

*Зависимость ложного рассеяния от угла погружения следов в эмульсии.* Энергия неизвестных частиц, как правило, определена на следах, имеющих различные углы погружения  $\varphi$  по отношению к плоскости эмульсионного слоя. Чтобы выяснить зависимость ложного рассеяния от угла наклона следов частиц, эмульсионные слои облучались специально под различными углами [93, 96, 116, 117]. В работе [116] эмульсия НИКФИ-Р толщиной 400 мк облучалась протонами с энергией 9 Гэв под углами 0,5; 1,2; 2,1; 2,9; 5,6; 10°. Для ложного рассеяния, измеренного с помощью третьих и четвертых разностей координат, зависимости  $D_n$  от углов не наблюдалось. Слабая зависимость ложного рассеяния от углов подтверждена также в работе [117]. В работе [93] показано, что ложное рассеяние не зависит от  $\varphi$  до углов порядка 2°, а затем оно увеличивается с ростом углов.

Вспомогательная, что исторически сильно зависит от угла  $\varphi$ , можно предположить, что в работах, где наблюдается

зависимость ложного рассеяния от угла наклона слоев частиц, авторы не совсем корректно или вовсе не исключали дисторию.

Для практических целей важно знать пределы изменения угла  $\varphi$  и длин ячеек, при которых возможны надежные измерения  $\rho_{\text{лж}}$ . По-видимому, такие значения  $\rho_{\text{лж}}$  можно найти из условия  $D_{\text{лж}}^2 > D_{\text{лн}}^2 + d \sim \varphi^2$  (рис. 20).

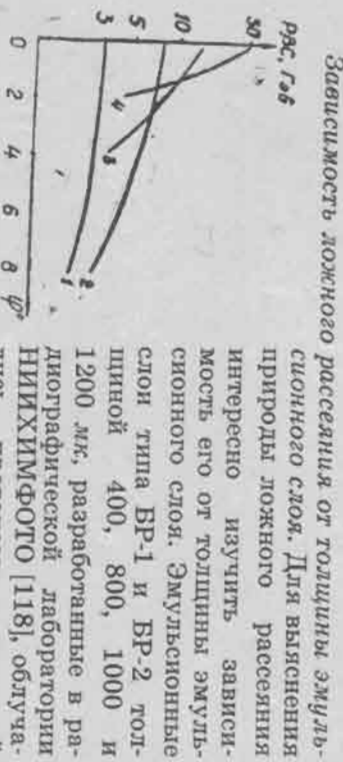


Рис. 20. Область надежно измеримых значений  $\rho_{\text{лж}}$  в зависимости от угла  $\varphi$  для эмульсии Илфорд G-5 [96]: 1, 2, 3, 4 — ячейки 500, 1000, 2000 и 4000 мк соответственно

**Корреляционные свойства ложного рассеяния.** Многократное рассеяние наиболее полно характеризуется корреляционной функцией вторых разностей координат  $K_n(j) = D_{\text{лж}} D_{\text{лн}(+j)}$ . Эта функция однозначно определяет свойства разностей координат более высокого порядка. Например, средний квадрат третьих разностей  $T_3^2$  и средний квадрат четвертых разностей координат  $F_4^2$  можно выразить в виде

$$\begin{aligned} T_3^2 &= 2K(0) - 2K(1), \\ F_4^2 &= 6K(0) - 8K(1) + 2K(2). \end{aligned} \quad (50.3)$$

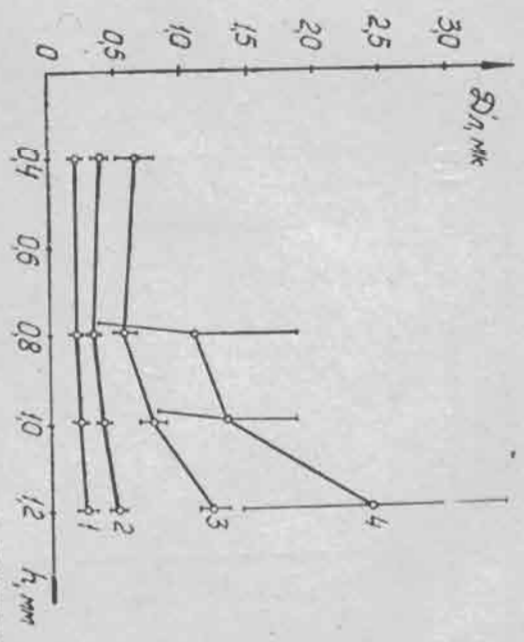


Рис. 21. Зависимость ложного рассеяния от толщины эмульсионного слоя  $h$  для различных длин ячеек: 1 —  $l = 500$  мк; 2 —  $l = 1000$  мк; 3 —  $l = 2000$  мк; 4 —  $l = 4000$  мк.

Параметры  $\rho = \sqrt{\frac{T_3^2}{D_{\text{лж}}^2}}$  и  $q = \sqrt{\frac{F_4^2}{D_{\text{лж}}^2}}$ , используемые в практических измерениях, могут служить простейшей мерой корреляции вторых разностей координат. Согласно (50.3),

$$\rho = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{K(1)}{K(0)} \right)^{1/2}}, \quad q = \sqrt{2 \left( 3 - \frac{4K(1)}{K(0)} + \frac{K(2)}{K(0)} \right)^{1/2}}. \quad (51.3)$$

Зная природу того или иного типа рассеяния, а соответственно и его корреляционную функцию, можно легко определить  $\rho$  или  $q$ . Для многократного кулоновского рассеяния  $\rho_{\text{лж}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $q_{\text{лж}} = 2$ , а для шумов, не зависящих от длины ячейки,  $\rho_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ ,  $q_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{35}{3}}$ . Так как природа ложного рассеяния окончательно не выяснена, величины  $\rho_{\text{лж}}$  и  $q_{\text{лж}}$  обычно находят экспериментально. В работах [60, 61, 75, 120, 121] показано, что для измеренных вторых и третьих разностей величина  $\rho$  на ма-

тых ячеек, когда кулоновское рассеяние мало, порядка 1,8 ( $\approx \rho_{in}$ ), а на больших ячейках, когда вклад кулоновского рассеяния велик, порядка 1,2 ( $\approx \rho_{ex}$ ) (рис. 22).

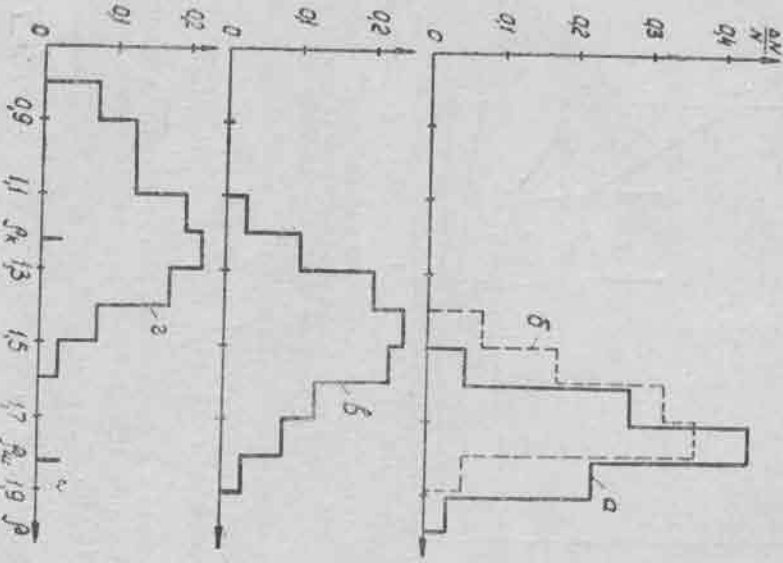


Рис. 22. Распределение  $\rho$  для протонов с энергией 9 Гэв, полученные на ячейках: а —  $t=500$  мк; б —  $t=1000$  мк; в —  $t=2000$  мк;  $t=4000$  мк [75].

В работе [75] на следах протонов с энергией 9 Гэв в эмульсии НИКФИ-Р оценено значение  $\rho_{in}$ , которое оказалось равным  $1,75 \pm 0,02$  при  $t=500$  мк,  $1,76 \pm 0,05$  при  $t=1000$  мк и  $1,81 \pm 0,09$  при  $t=2000$  мк. В работе [110] показано, что  $\rho_{in}$  измеренное на следах  $\pi$ -мезонов с энергией 14,5 Гэв в эмульсии Илфорд G-5, колеблется от  $1,62 \pm 0,05$  до  $1,75 \pm 0,09$  при  $t=1000$  мк.

$\approx 4000$  мк. Значение  $\rho_{in}$  определенное на следах частиц с энергией 8; 17 и 24 Гэв, такого же порядка [60, 61, 115] (рис. 23). Согласно приведенным данным, величина  $\rho_{in}$  практически не зависит от длины ячейки и энергии частиц, на следах которых она определяется.

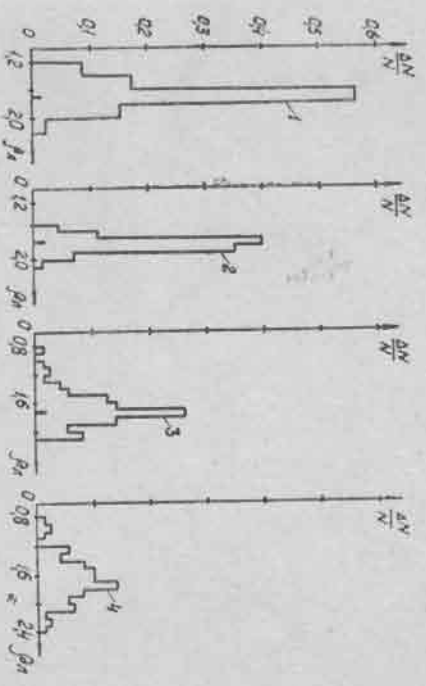


Рис. 23. Распределение  $\rho_{in}$ , найденное на следах протонов с энергией 24 Гэв на ячейке  $t=200$  мк (1) и на следах  $\pi$ -мезонов с энергией 17 Гэв на ячейках:  $t=1000$  мк (2)  $t=2000$  мк (3),  $t=4000$  мк (4).

Отдельные значения корреляционной функции  $K_n(j)$  можно найти с помощью перекрывающихся значений вторых разностей координат, измеренных на следах частиц с известной энергией, по формуле

$$K_n(j) = \overline{D_i^n D_{i+j}^n} - \overline{D_i^n} \overline{D_{i+j}^n} + \overline{D_{i+n}^n D_{i+n+j}^n} - \overline{D_{i+n}^n} \overline{D_{i+n+j}^n} + \dots \quad (52.3)$$

Усредненные по множеству следов корреляционные функции измеренных вторых разностей (без дисторсии) и вторых разностей ложного рассеяния рассчитаны по формуле (52.3) для следов протонов с энергией 10 Гэв в эмульсионных слоях НИКФИ-ВР-1 (рис. 24). Измерения выполнены на полувыводимом микроскопе МИР-2 на ячейке  $t=100$  мк (с пересчетом на ячейки  $t=400, 800, 1200$  и  $1600$  мк). На корреляционных функциях отчетливо видны выбросы при  $j=0$  и  $j=l$ , вызван-

ные шумами; затухающая периодичность за счет ложного рассеяния и рост кулоновского рассеяния (на рисунке заштриховано).

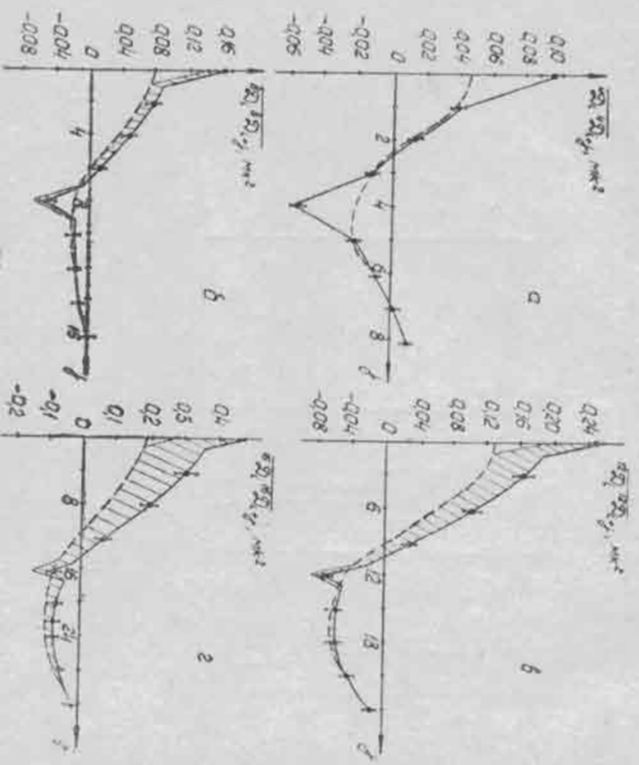


Рис. 24. Корреляционные функции измеренных вторых разностей (сплошная линия) и ложного рассеяния (штрихованая): а —  $t = 400$  мкм; б —  $t = 800$  мкм; в —  $t = 1200$  мкм; г —  $t = 1600$  мкм.

Период корреляционной функции ложного рассеяния, определенный на одной и той же ячейке, как показано в работе [78], имеет довольно узкое распределение со стандартным отклонением  $\sigma \approx 7\%$ . Этот период слабо зависит от типа эмульсии.

Форма корреляционной функции ложного рассеяния также незначительно изменяется с длиной ячейки, что и приводит к независимости  $R_{\alpha}$  от  $t$ , отмеченной выше. В общем случае корреляционную функцию ложного рассеяния можно представить в виде

$$K_{\alpha}(j) = \overline{D_{1\pi}^2} \exp(-\alpha j^2) \cos \beta j, \quad (53.3)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — постоянные величины. Анализ экспериментальных значений  $K_{\alpha}(j)$  показал, что величина  $\alpha \approx 0,16 \div 0,8$ ,  $\beta \approx 1,2 \div 3,2$  и  $\gamma \approx 2$ .  
Спектральная функция ложного рассеяния, согласно (86.2), будет

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{\overline{D_{1\pi}^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha j^2) \cos \beta j \cos \omega j dj. \quad (54.3)$$

При  $\gamma = 2$

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{\overline{D_{1\pi}^2}}{4\sqrt{\pi\alpha}} \left[ \exp\left(-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha}\right) \right]. \quad (55.3)$$

В спектре частот наблюдается резонансный пик при  $\omega = \beta$  (рис. 25), объясняющийся волнообразным характером следов, подверженных ложному рассеянию. Аналогичный результат отмечен в работах [112, 115].

О природе ложного рассеяния. Существует несколько гипотез, авторы которых пытались объяснить причины возникновения ложного рассеяния [77, 109, 114, 122]. Яноши предполагает [77, 123], что ложное рассеяние — искажение следов, возникшие после экспонирования эмульсии. Зависимость среднего квадрата второй разности  $\overline{D_{1\pi}^2}$  от длины ячейки  $l$

$$\overline{D_{1\pi}^2} \sim l^{\nu}, \quad (56.3)$$

где  $1 < \nu < 3$ , объясняется суммарным влиянием двух различных типов искажения следов:

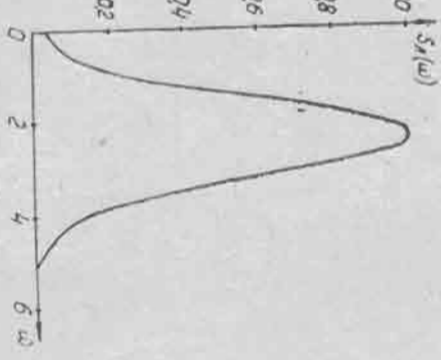


Рис. 25. Спектральная функция ложного рассеяния:  $\alpha = 0,35$ ;  $\beta = 2,4$ ;  $\gamma = 2$ .

1. Эмульсия может деформироваться так, что некоторые малые участки ее поворачиваются один относительно другого на некоторый случайный угол. Если эмульсия при этом не разрушается, то этот процесс дает такой же эффект, как и многократное кулоновское рассеяние, причем  $(D_{in}^2)_1 \sim t^3$ .

2. В некоторых местах эмульсия разрывается и возникает сдвиги в произвольных направлениях. Такие искажения относятся к типу случайных смещений, причем  $(D_{in}^2)_2 \sim t$ . Следует отметить, что корреляционная функция  $K_n(j)$ , рассчитанная согласно этой модели, существенно отличается от экспериментальной при  $j > 1$  (рис. 26).

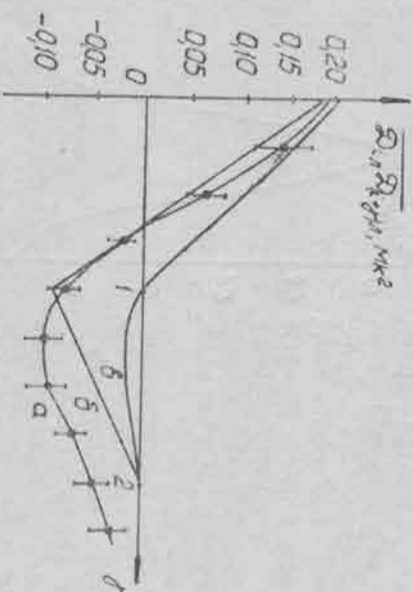


Рис. 26. Корреляционные функции ложного рассеяния: а — измеренная на следах протонов с энергией 10 Гэв в эмульсии НИКФИ-ВР-1 ( $t = 1600$  мкс); б — рассчитанная в предположении  $D_{in}^2 \sim t$ ; в —  $D_{in}^2 = at + at^3$  [77] (а и в подбираются из условия наилучшего согласия с экспериментом).

В работе [114] установлена зависимость среднеарифметического значения второй разности  $|D_{iz}|$ , измеренной в вертикальной плоскости, от среднеарифметического значения  $|D_{iy}|$ , измеренного в плоскости эмульсионного слоя,

$$|D_{iz}| \approx 1 + 3,7 |D_{iy}|. \quad (57.3)$$

На основании этого высказывается предположение, что слои эмульсии при экспонировании некоторым образом искривлены (следы частиц не искажены), а при наклееке обработанных слоев на стекло они спрямляются, вызывая искажения следов частиц в вертикальной плоскости. Согласно (57.3), возникают искажения и в горизонтальной плоскости. Есть указания, что величина ложного рассеяния существенно зависит и от способа наклейки слоев на стекло [124, 125].

В работе [122] автор пытается объяснить природу ложного рассеяния квантомеханическими эффектами, связанными с рассеянием частиц в неоднородной среде. Однако эта гипотеза не может объяснить некоторые экспериментальные факты, в частности увеличение искажений с течением времени, прошедшего после обработки слоев [99]. Ни одна из этих гипотез не в состоянии полностью описать все свойства ложного рассеяния, которые известны в настоящее время. Несмотря на то, что вопрос о происхождении ложного рассеяния открыт, экспериментаторы, используя установленные факты, успешно исключают влияние этих искажений на результаты измерений.



## Глава IV МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ЛОЖНОГО И ОЦЕНКИ КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Методы оценки кулоновского рассеяния основаны на использовании свойства ложного рассеяния. Надежность этих методов определяется главным образом достоверностью и постоянством некоторых параметров, характеризующих ложное рассеяние. Так как ложное рассеяние не поддается строгому математическому описанию, развитие методов его исключения идет в большинстве случаев эмпирическим путем.

### § 1. Статистическое вычитание ложного рассеяния

Если шумы и дистракции исключены из измеренных величин вторых разностей  $D_i$ , кулоновское рассеяние можно оценить по формуле

$$\overline{D_{iN}^2} = \overline{D_i^2} - \overline{D_{i\pi}^2}, \quad (1.4)$$

где  $\overline{D_{i\pi}^2}$  — средний квадрат второй разности ложного рассеяния, измеренный на следах частиц с известной энергией. Предполагается, что это значение соответствует ложному рассеянию в той области эмulsionного слоя, где находится измеряемый след неизвестной частицы. Если среднеарифметическая величина второй разности  $|D_{iN}|$  находится по формуле (1.4), то необходимо, чтобы распределения  $D_{iN}$  и  $D_{i\pi}$  были одинаковыми. Как показывает опыт, если  $|D_{iN}| \approx |D_{i\pi}|$ , формула (1.4)

78

дает неудовлетворительную точность в оценке  $D_N$  [120]. При измерении рассеяния на ячейках, когда  $|D_{iN}| \wedge > 2|D_{i\pi}|$ , с помощью этого метода можно лишь грубо оценить истинное кулоновское рассеяние. При  $|D_{iN}| > 4|D_{i\pi}|$  ошибка в оценке импультса по  $D_N$  мала и практически определяется числом измеренных значений вторых разностей (80.2). Существенный недостаток метода — его низкая надежность из-за статистического разброса  $|D_i|$  и  $|D_{i\pi}|$ . Этот метод наиболее прост и может быть использован, когда  $|D_{iN}| \gg |D_{i\pi}|$ .

### § 2. Метод кратных ячеек

В большинстве случаев среднеарифметическое значение вторых разностей ложного рассеяния зависит от длины ячейки как  $at^x$ , по крайней мере для  $t < 1$  см. На основании этого средний квадрат измеренной второй разности можно записать как

$$\overline{D_i^2} = b^2 t^x + a^2 t^{2x}, \quad (2.4)$$

где  $b = \frac{K_0}{573 r^2 N c}$ . В уравнение (2.4) входят три неизвестные величины:  $a$ ,  $b$  и  $x$ . Чтобы найти их, необходимо иметь систему из трех линейно независимых уравнений, соответствующих трем различным ячейкам. Для длин ячеек, относящихся как 1:2:3, величина  $D_N$  в явном виде не находится [126]. Если взять кратные ячейки, длины которых относятся как 1:2:4, то [98]

$$\begin{cases} \overline{D_1(t)^2} = b^2 t^x + a^2 t^{2x}, \\ \overline{D_1(2t)^2} = 8b^2 t^x + a^2 \cdot 2^{2x} \cdot t^{2x}, \\ \overline{D_1(4t)^2} = 64b^2 t^x + a^2 \cdot 2^{4x} \cdot t^{2x}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Решив эти уравнения, получим

$$D_N = \left[ \frac{\overline{D_1(t)^2} \cdot \overline{D_1(4t)^2} - \overline{D_1(2t)^2}}{64\overline{D_1(t)^2} + \overline{D_1(4t)^2} - 16\overline{D_1(2t)^2}} \right]^{1/2}, \quad (4.4)$$

79

где  $D_1(t)$ ,  $D_1(2t)$  и  $D_1(4t)$  — исправленные на шум и дигорсии измеренные вторые разности на ячейках  $t$ ,  $2t$  и  $4t$ .

Формула (4.4) дает удовлетворительную точность при условии, когда на ячейке  $t$  величина  $D_k < D_n$ , и  $2t - D_k \approx D_n$  и на  $4t - D_k > D_n$ . Такому условию практически удовлетворяет критерий

$$\frac{|D_1(2t)|}{|D_1(t)|} < \frac{|D_1(4t)|}{|D_1(2t)|} \quad \text{и} \quad 2 < \frac{|D_1(4t)|}{|D_1(2t)|} < 2^{\frac{1}{2}}.$$

Ячейка  $t$  выбирается в зависимости от вклада шума в измеренную величину  $D_1$ . Приемлемым может быть условие  $|D_1(t)| > 2D_{ш}$ . В работе [61] уравнение (2.4) записывается в виде

$$\overline{D_i^2} = b^2 t^3 + (at + c)^2, \quad (5.4)$$

т. е. предполагается, что ложное рассеяние изменяется с длиной ячейки по закону  $D_{i,n}^2 \approx at + c$ . Записав на основании (5.4) систему трех уравнений для кратных ячеек аналогично системе (3.4) и решив ее относительно  $D_k$ , можно получить

$$D_k = \left[ \frac{D_1(4t)^2 - 6\overline{D_1(2t)^2} + 8\overline{D_1(t)^2} - 3c^2}{24} \right]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Ячейки  $t$ ,  $2t$  и  $4t$  выбираются такими, чтобы выполнялось условие

$$\overline{D_1(4t)^2} + 8\overline{D_1(t)^2} > 6\overline{D_1(2t)^2} + 3c^2.$$

При выводе формул (4.4) и (6.4) предполагалось, что постоянная рассеяния  $K$  не изменяется с длиной ячейки. Зависимость постоянной рассеяния  $K$  от  $t$  можно учесть, соответственно изменив численные коэффициенты в формулах (4.4) и (6.4). Формулы (4.4) и

(6.4) имеют то преимущество перед формулой (1.4), что с их помощью удается исключить ложное рассеяние индивидуально на каждом следе. Недостаток метода в том, что в зависимости  $D_n = at^x$  или в частном случае в зависимости  $D_n = at + c$  ( $x=1$ ) величины  $a$  и  $x$  могут изменяться с длиной ячейки, поэтому метод кратных ячеек имеет ограниченное применение. Как и предыдущий, этот метод имеет низкую надежность.

### § 3. Оценка кулоновского рассеяния с помощью параметра $\rho$

Этот метод основан на предположении о постоянстве величины  $\rho_n$  [75, 121]. Для кулоновского рассеяния и шумов, как уже отмечалось, параметры  $\rho$  постоянны и равны соответственно  $\rho_k = \sqrt{\frac{10}{3}}$ ,  $\rho_{ш} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ . После исключения дигорсий и шумов для вторых разностей можно записать:

$$\overline{D_{ik}^2} = \overline{D_{ik}^2} + \overline{D_{in}^2},$$

$$\overline{D_{ik}^2} = \rho^2 \overline{D_{ik}^2} = \rho_k^2 \overline{D_{ik}^2} + \rho_n^2 \overline{D_{in}^2},$$

откуда

$$D_k = \sqrt{\overline{D_{ik}^2} \left( \frac{\rho_n^2 - \rho^2}{\rho_n^2 - \rho_k^2} \right)^{1/2}}. \quad (7.4)$$

Оценка  $D_k$  по формуле (7.4) отличается от оценки по формуле (1.4) тем, что в одном случае используется среднее значение  $\overline{D_{in}^2}$ , которое изменяется в широких пределах в зависимости от  $t$ , типа амплитуды и геометрического положения следов; в другом случае — значение  $\rho_n$ , которое, как показала экспериментальная проверка, имеет узкое распределение и почти не зависит от  $t$ . Ошибка в определении  $D_k$  по формуле (7.4) может быть найдена следующим образом [120]:

$$\frac{\partial D_k}{\partial C} = \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad C = C_1 \left[ 1 - 2r \left( \frac{C_2}{C_1} \right) \frac{\rho^2}{\rho_n^2 - \rho^2} + \right.$$

$$+ \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{r^4}{(r^2 - r_0^2)^2} \quad (8.4)$$

где  $N$  — число основных измерений на отдельном следе;  $C_1 \approx 0,81$  и  $C_2 \approx 0,50$  (определены экспериментально из распределений  $|D_i|$  и  $r_i$  для отдельных следов);  $r$  — коэффициент корреляции между  $|D_i|$  и  $r_i$ , равный 1.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{D}_i - \bar{D})(\bar{r}_i - \bar{r})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{D}_i - \bar{D})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (\bar{r}_i - \bar{r})^2}} \quad (9.4)$$

Здесь  $\nu$  — число следов;  $\bar{D}_i$  — среднестатистическое значение второй разности на  $i$ -том следе;  $\bar{D}$  — среднестатистическое значение, найденное по всем следам (аналогично для  $\bar{r}_i$  и  $\bar{r}$ ). Численное значение коэффициента  $r$  колеблется примерно от  $-0,4$  до  $+0,2$  и определяется из эмпирического соотношения

$$r = 14,3 r_0^2 - 15. \quad (10.4)$$

Если преобладает кулоновское рассеяние ( $r$  мало), коэффициент корреляции  $r$  имеет отрицательную величину, в случае преобладания ложного рассеяния ( $r$  велико) — положительную величину.

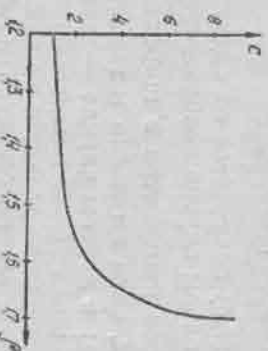


Рис. 27. Зависимость коэффициента  $r$  от  $\rho$ .

$D_k$  велики и существенно зависят от  $\rho$ . Поэтому на практике необходимо выбирать ячейку такой, чтобы вы-

Зависимость величин

$C$  от  $\rho$  определена по экспериментальным значениям  $C_1$ ,  $C_2$  и  $r$ , найденным по измерениям многократного рассеяния на следах протонов с энергией 9 Гэв в ампуле НИКФИР [120] (рис. 27). При значениях  $\rho > 1,5$  величина  $C$  и соответственно ошибка в оценке

попадают соотношение  $r < 1,5$ , что соответствует

$$D_{1k}^2 > D_{1k}^2.$$

В ряде работ [61, 110, 120, 124] экспериментально проверены различные методы исключения ложного рассеяния и оценена их эффективность с помощью измерения многократного рассеяния на следах частиц с известной энергией. Показано, например, что в случае большого вклада ложного рассеяния  $D_n \approx D_k$  формула (7.4) дает лучший результат по сравнению с формулами (1.4), (4.4) и (6.4).

При использовании формулы (7.4) необходимо обращать особое внимание на исключение дисторсий, которые приводят к уменьшению  $\rho$ . Значение этой величины может быть близким к значению  $\rho_n$  соответствующему кулоновскому рассеянию, хотя вклад последнего в измеренную вторую разность может быть незначителен.

В случае очень больших длин ячеек, когда наблюдается некоторое возрастание  $\rho_n$  [120], пользуясь формулой (7.4), можно получить неверный результат. Кроме того, на таких ячейках ложное рассеяние еще окончательно не изучено и неизвестно, чему равно  $\rho_n$ . Этот метод прост, достаточно надежен и распространен.

#### § 4. Метод максимального правдоподобия

Чтобы определить  $D_k$  с помощью этого метода, необходимо знать элементы  $M_{\nu\mu} = D_\nu D_\mu$ , образующие матрицу

$$M = a^{(1)} A^{(1)} + a^{(2)} A^{(2)} + a^{(3)} A^{(3)}, \quad (11.4)$$

где матрицы  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ , описывающие многократное кулоновское рассеяние и шум, имеют следующие элементы:

$$A_{\nu\mu}^{(1)} = \begin{cases} 4, & |\nu - \mu| = 0; \\ 1, & |\nu - \mu| = 1; \\ 0, & |\nu - \mu| > 1. \end{cases} \quad A_{\nu\mu}^{(2)} = \begin{cases} 6, & |\nu - \mu| = 0; \\ -4, & |\nu - \mu| = 1; \\ 1, & |\nu - \mu| = 2; \\ 0, & |\nu - \mu| > 2. \end{cases} \quad (12.4)$$

Согласно [77, 123, 127, 128], вторые разности ложного рассеяния обусловлены, во-первых, случайными смещениями отдельных частей змультисии, для которых

$$A_{1\gamma\sigma}^{(3)} = A_{\gamma\sigma}^{(3)} = \begin{cases} 2, & |\gamma - \sigma| = 0, \\ -1, & |\gamma - \sigma| = 1; \\ 0, & |\gamma - \sigma| > 1, \end{cases} \quad (13.4)$$

и, во-вторых, поворотом отдельных частей змультисии относительно друг друга на некоторый случайный угол. Для этой части ложного рассеяния матрица  $A_2^{(3)}$  совпадает с  $A^{(1)}$ .

Таким образом,  $\alpha^{(1)} = \alpha_k^{(1)} + \alpha_x^{(1)}$ , где  $\alpha_k^{(1)}$  характеризует истинное кулоновское рассеяние, а  $\alpha_x^{(1)}$  — часть ложного рассеяния, не отличимую ни по какому признакам от истинного кулоновского рассеяния. Как уже отмечалось, корреляционная функция ложного рассеяния для этой модели несколько отгицается от экспериментально полученной функции, поэтому метод оценки  $\alpha^{(0)}$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$ , разработанный Яноши и другими, в известной степени приближенный.

Под  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  и  $\alpha^{(3)}$  подразумеваются величины

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(1)} &= \frac{1}{4} \overline{D_{1k}^2}; & \alpha_x^{(1)} &= \frac{1}{4} \overline{D_{1xk}^2}; & \alpha^{(2)} &= \frac{1}{6} \overline{D_{1m}^2}; & \alpha^{(3)} &= \\ & & & & & & & = \frac{1}{2} \overline{D_{1n}^2}, \end{aligned} \quad (14.4)$$

где  $D_{1n}$  — кулоновская часть ложного рассеяния;  $D_{1x}$  — истинно ложное рассеяние. Величину  $\alpha^{(1)}$  можно оценить только с помощью следов матриц с известной энергией. Полагая, что это всегда можно сделать, найдем наилучшие оценки  $\alpha^{(0)}$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$ .

Совместную функцию распределения вторых разностей можно представить в виде [129]

$$f(\mathbf{D}) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{M})^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{D}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \right), \quad (15.4)$$

где  $\mathbf{D}$  — одностроковая матрица  $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}$ , а  $\mathbf{D}'$  — матрица

рима  $(D_1, D_2, \dots, D_N)$ . Согласно принципу максимального правдоподобия [77, 130], наилучшими оценками  $\alpha^{(0)}$  будут величины  $\bar{\alpha}^{(0)}$ , полученные в результате решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{D})}{\partial \alpha^{(0)}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\alpha}^{(0)} = \alpha^{(0)}, \quad \sigma = 1, 2, 3. \quad (16.4)$$

Элементы матрицы ошибок величин  $\bar{\alpha}^{(0)}$  обозначим как

$$Q_{\sigma\sigma} = \overline{\delta \alpha^{(0)} \delta \alpha^{(0)}}, \quad (17.4)$$

причем обратная ей матрица  $\mathbf{Q}^{-1} = [Q_{\sigma\sigma}^{-1}]$ , где

$$Q_{\sigma\sigma}^{-1} = - \left( \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{D})}{\partial \alpha^{(0)} \partial \alpha^{(0)}} \right). \quad (18.4)$$

Можно показать [77, 123, 131], что

$$Q_{\sigma\sigma}^{-1} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(0)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(0)}), \quad (19.4)$$

а

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &= \frac{1}{2} \mathbf{D}' \left( \sum_{\sigma=1}^3 Q_{\sigma\sigma} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(0)} \mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{D}, & \alpha^{(0)} &= \bar{\alpha}^{(0)}, \\ & & & \sigma = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Символ  $\text{Tr}$  обозначает след матрицы, или сумму элементов, расположенных на ее главной диагонали. Формулы (19.4) и (20.4) слишком сложны для практического определения  $\bar{\alpha}^{(0)}$  и  $Q_{\sigma\sigma}$ , особенно при большом числе измеренных вторых разностей  $D$ . Однако оценки ошибок, получаемые с помощью формулы (19.4), могут служить критерием точности того или иного приближенного метода, так как в большинстве случаев метод максимального правдоподобия дает наименьшие ошибки

ки. Поэтому имеет смысл получить асимптотические (справедливые при большом  $N$ ) выражения для  $Q_{\sigma\tau}$ . Вводя новые переменные

$$x = \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}}, y = \frac{\alpha^{(3)}}{\alpha^{(1)}} \quad (21.4)$$

и функции

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{2\alpha^{(1)^2}}{N} Q_{\sigma\tau}^*$$

вместо (11.4) получим

$$P = \frac{1}{\alpha^{(1)}} M = A^{(1)} + xA^{(2)} + yA^{(3)} \quad (22.4)$$

и вместо (19.4)

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{N} \text{Tr} (P^{-1} A^{(1)} P^{-1} A^{(1)}), \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \quad (23.4)$$

Матрицы  $A^{(i)}$  можно выразить через вспомогательные простейшие матрицы  $H$  и  $E$  с элементами

$$H_{\nu\mu} = \delta_{\nu, |\nu-\mu|}, \quad E_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma}, \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, \dots, N \quad (24.4)$$

следующим образом:

$$A^{(1)} = H + 4E;$$

$$A^{(2)} = H^2 - 4H + 4E + H_0; \quad (25.4)$$

$$A^{(3)} = -H + 2E.$$

Здесь  $H_0$  — матрица, имеющая, как легко проверить, только два не равных нулю элемента в левом верхнем и правом нижнем углах. Пренебрегая  $H_0$ , получим

$$P = xH^2 + (1 - 4x - y)H + (4 + 4x + 2y)E. \quad (26.4)$$

Очевидно, что

$$P^{-1} A^{(i)} P^{-1} A^{(i)} = f_{\pi} (H) \quad (27.4)$$

— рациональная функция матрицы  $H$ .

Известно, что собственные значения и след такой функции  $f_{\pi}(H)$  равны  $f(\gamma_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  и  $\sum_{k=1}^N f(\gamma_k)$  соответственно, где  $\gamma_k$  — собственные значения матрицы  $H$ .

Очевидно, что

$$\gamma_k = 2 \cos \frac{k\pi}{N+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (28.4)$$

Используя (23.4), (27.4) и (28.4), получим

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{\sigma\tau} \left( 2 \cos \frac{k\pi}{N+1} \right). \quad (29.4)$$

При большом  $N$  суммирование в (29.4) можно заменить интегрированием и тогда

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\sigma\tau} (2 \cos z) dz. \quad (30.4)$$

При  $\sigma = \tau = 1$

$$q_{11}^*(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{2 + \cos z}{2 + 2x + y + (1 - 4x - y) \cos z + 2x \cos^2 z} \right]^2 dz. \quad (31.4)$$

Вычисляя интегралы (30.4) и элементы матрицы  $[q_{\sigma\tau}^*]^{-1}$ , получим

$$Q_{\sigma\tau} = \frac{2\alpha^{(1)^2}}{N} q_{\sigma\tau}^*(x, y), \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \quad (32.4)$$

Формула для функции  $q_{11}(x, y)$ , характеризующей ошибку в определении величины  $\alpha^{(1)}$ , будет

$$q_{11}(x, y) = 1 + \frac{2}{3} \sqrt{6(y + 2 + \sqrt{24x + 6y + 3})}. \quad (33.4)$$

В силу громоздкости формулы (20.4) для величины  $\bar{a}^{(s)}$  предложена следующая квадратичная оценка [123]:

$$\bar{a}^{(s)} = D' V^{(s)} \Lambda D, \quad s = 1, 2, 3, \quad (34.4)$$

Эта оценка даст правильное значение для  $\bar{a}^{(s)}$  при условии

$$\text{Tr}(V^{(s)} \Lambda^{(s)}) = \delta_{st}, \quad s, \tau = 1, 2, 3. \quad (35.4)$$

Если выразить неопределенную пока матрицу  $V^{(s)}$  через  $l+1$  соответствующим образом выбранных линейно независимых матриц  $G^{(s)}$  по формуле

$$V^{(s)} = \sum_{\lambda=0}^l b_{\lambda s} G^{(\lambda)}, \quad (36.4)$$

и затем найти  $b_{\lambda s}$ , так, чтобы выполнялось условие (35.4) и чтобы  $Q_{st}$  было минимальным, то

$$B = [b_{\lambda s}] = S^{-1} T (T' S^{-1} T)^{-1}; \quad (37.4)$$

$$Q = [Q_{st}] = 2\alpha^{(s)^2} (T' S^{-1} T)^{-1}, \quad (38.4)$$

где элементы матриц  $T$  и  $S$  равны

$$T_{\lambda s} = \text{Tr}(G^{(\lambda)} \Lambda^{(s)}), \quad \lambda = 0, 1, \dots, l; \quad \tau = 1, 2, 3 \quad (39.4)$$

$$S_{\lambda \mu} = \text{Tr}(G^{(\lambda)} R G^{(\mu)} P), \quad \lambda, \mu = 0, 1, \dots, l. \quad (40.4)$$

В работе [123] матрицы  $G^{(\lambda)}$  выбраны так, чтобы можно было использовать суммы квадратов вторых разностей  $D_i^{(s)}$  для перекрывающихся ячеек

$$D_i^{(s)} = y_{i+2^\lambda} - 2y_{i+2^\lambda-2^{\lambda-1}} + y_{i-2^{\lambda-1}}, \quad i = 2^\lambda, 2^\lambda + 1, \dots, N - 2^\lambda + 1. \quad (41.4)$$

Очевидно, что степень перекрывания  $n$  (§ 4, тл. II) равна  $2^\lambda$ . Если вектор  $\bar{D}^{(s)}$ , имеющий  $N+2-2^{\lambda+1}$  компонент, выразить через вектор  $\bar{D}^{(0)}$ , имеющий  $N$  компонент, с помощью матрицы  $K^{(s)}$ , которая имеет  $N+2-2^{\lambda+1}$  строк,  $N$  столбцов и элементы

$$K_{\nu \mu}^{(s)} = \begin{cases} 2^\lambda - |\nu - \mu| & \text{при } 2^\lambda \geq |\nu - \mu| \\ 0 & \text{при } 2^\lambda < |\nu - \mu| \end{cases}$$

$$\nu = 2^\lambda, 2^\lambda + 1, \dots, N - 2^\lambda + 1, \quad \mu = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$G^{(s)} = K^{(s)} K^{(s)}.$$

Если  $N \gg 2^\lambda$ , то

$$G^{(0)} = E,$$

$$G^{(1)} = (N + 2E)^2,$$

$$G^{(2)} = (N^3 + 2N^2)^2, \quad (42.4)$$

$$G^{(3)} = (N^7 + 2N^6 - 4N^5 - 8N^4 + 4N^3 + 8N^2)^2.$$

Используя (25.4), (26.4), (39.4), (40.4), можно без труда определить  $T$  и  $S$ . После этого  $\bar{a}^{(s)}$  вычисляется по формуле (34.4) и ошибка в величине  $\bar{a}^{(s)}$  — по формуле (38.4). В случае, если используются только три матрицы  $G^{(s)}$ ,

$$B = T'^{-1} \quad (43.4)$$

и

$$Q = 2\alpha^{(s)^2} (T'^{-1} S T'^{-1}). \quad (44.4)$$

Приведем окончательные выражения для  $\bar{a}^{(s)}$  и  $Q_{st}$ , выбирая следующие комбинации матриц  $G^{(s)}$ :

$$1) \quad (012) = (G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}),$$

$$2) \quad (013) = (G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(3)}),$$

$$3) \quad (023) = (G^{(0)}, G^{(2)}, G^{(3)}).$$

Обозначая

$$\tilde{D}^{(s)} = \frac{1}{N+2-2^{\lambda+1}} \sum_{i=2^\lambda}^{N-2^{\lambda+1}} (D_i^{(s)})^2 = \bar{D}_i^2, \quad (n = 2^\lambda), \quad (45.4)$$

имеем

(012):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{168} (2\tilde{D}^{(0)} - 3\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{42} (16\tilde{D}^{(0)} - 10\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{12} (-8\tilde{D}^{(0)} + 9\tilde{D}^{(1)} - \tilde{D}^{(2)}); \end{cases} \quad (46.4)$$

(013):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{1848} (6\tilde{D}^{(0)} - 7\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{462} (160\tilde{D}^{(0)} - 84\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{132} (-72\tilde{D}^{(0)} + 73\tilde{D}^{(1)} - \tilde{D}^{(3)}); \end{cases} \quad (47.4)$$

(023):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{4368} (4\tilde{D}^{(0)} - 7\tilde{D}^{(2)} + 3\tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{546} (128\tilde{D}^{(0)} - 42\tilde{D}^{(2)} + 5\tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{312} (-64\tilde{D}^{(0)} + 73\tilde{D}^{(2)} - 9\tilde{D}^{(3)}). \end{cases} \quad (48.4)$$

Относительную ошибку в определении  $D_k$  можно вычислить по формуле

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{2N}} [q_{\text{гр}}^{(1/k)}(x, y)]^2, \quad (49.4)$$

где  $x = \frac{-\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$  и  $y = \frac{\bar{\alpha}^{(3)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$ .

Если рассмотреть графики функций  $q_{11}^{(1/k)}(x, y)$  при  $y=0$ , график функции  $q_{11}^{(0.25)}(x, y)$ , характеризующий ошибку  $\delta D_k/D_k$  при использовании всех четырех матриц  $G^{(k)}$ , и график функции  $q_{11}^{(1)}(x, y)$ , характеризующий ошибку  $\delta D_k/D_k$  при вычислении по формуле (20.4)

(рис. 28), то видно, что наименьшую ошибку дает метод максимального правдоподобия (20.4), а квадратичные оценки (34.4) при разном наборе матриц  $G^{(k)}$  в определенном интервале значений  $x$  имеют ошибки, не намного превышающие оптимальные.

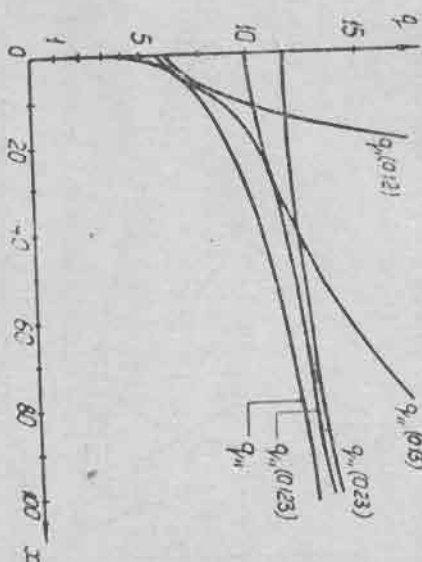


Рис. 28. Зависимость  $q$  от  $x$  (посвящения к кривым в тексте).

В работе [127] предложена простая оценка истинной величины многократного кулоновского рассеяния с помощью следа частицы с известной энергией, который расположен в том же слое фотоэмульсии, что и измеряемые следы. В предположении, что шум и ложное рассеяние для этих следов равны, получим

$$\bar{\alpha}_{k2}^{(1)} = \bar{\alpha}_{k1}^{(1)} + \frac{1}{4 \cdot 2^{2k}} (\tilde{D}_2^{(1)} - \tilde{D}_1^{(1)}), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (50.4)$$

Индекс 2 в этой формуле приписывается следу частицы с неизвестной энергией, а индекс 1 — следу частицы с известной энергией.

Используя квадратичные оценки (34.4) и (50.4), авторы работы [127] создали своеобразный способ нахождения оптимальной длины ячейки, на которой достигается минимальная ошибка определения  $D_k$ . Сущность этого метода состоит в следующем [128].

Минимальная ошибка оценки (50.4) равна

$$\frac{\delta x_{k2}^{(1)}}{\alpha_{k2}^{(1)}} = \sqrt{\frac{2}{N}} [r_1(x_2, y_2)]^{1/2}. \quad (51.4)$$

График функции  $r_1(x, y)$  при  $y=0$  изображен на рисунке 29.

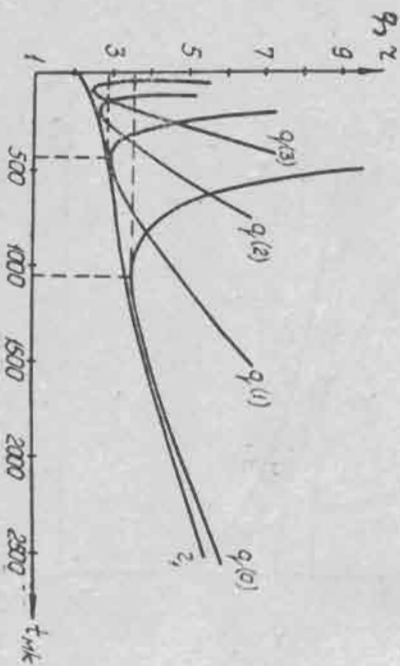


Рис. 29. Зависимость  $q$  и  $r$  от  $t$  (послеения к кривым в тексте).

Если пренебречь вкладом  $\tilde{D}_1^{(k)}$  в ошибку величины  $\frac{\delta x_{k2}^{(1)}}{\alpha_{k2}^{(1)}}$ , то

$$\frac{\delta x_{k2}^{(1)}}{\alpha_{k2}^{(1)}} = \sqrt{\frac{2}{N}} [q^{(k)}(x_2, y_2)]^{1/2}, \quad (52.4)$$

где

$$q^{(0)}(x, y) \approx \frac{1}{8} [35x^2 + (20y + 16)x + 3y^2 + 6y + 9],$$

$$q^{(1)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^6} [35x^2 + (40y + 128)x + 14y^2 + 140y + 1106],$$

(53.4)

$$q^{(2)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^{12}} [35x^2 + (80y + 1024)x + 92y^2 + 4184y + 141380],$$

$$q^{(3)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^{18}} [35x^2 + (160y + 8192)x + 696y^2 + 131760y + 18095496].$$

$$+ 131760y + 18095496].$$

Так как  $x \sim t^{-3}$ ,  $y \sim t^{-2}$  и  $N \sim t^{-1}$ , то для каждого  $\lambda$  из (52.4) и (53.4) можно найти оптимальную ячейку  $t_0$ , предварительно оценив  $x_2$  и  $y_2$  с помощью формул (46.4). Минимальная ошибка для этого значения  $t_0$  будет лишь на несколько процентов больше минимально возможной ошибки. На практике неудобно дважды измерять ординаты следа: сначала на произвольной ячейке  $t$ , а после определения  $t_0$  — на оптимальной ячейке. Поэтому можно измерения выполнить один раз, а отыскивать не  $t_0$ , а  $\lambda_0$ .

На рисунке 29 для конкретного примера, описанного в работе [127] (т-мезоны 3,5 Гэв, ампулы НИКФИ-Р, длина обработанных следов — 72,3 см), построены зависимости  $q^{(0)}$ ,  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ ,  $q^{(3)}$  и  $r$ , от длины ячейки  $t$ . Видно, что в данном случае при измерении ординат следа на основной ячейке  $t \approx 1000$  мк минимальная ошибка достигается при  $\lambda = 0$ , на  $t \approx 500$  мк —  $\lambda = 1$  и т. д.

По точности оценки  $D_k$  и по надежности метода максимального правдоподобия, по-видимому, не лучше более простого метода  $p$  (рис. 30).

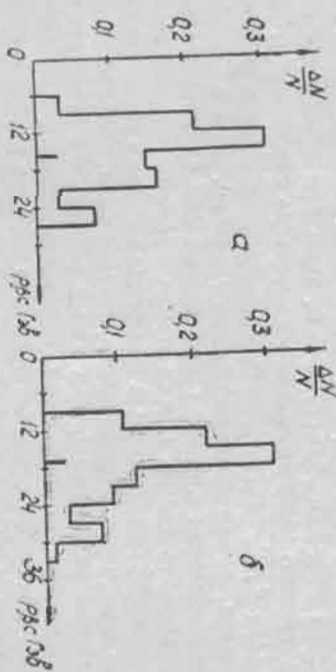


Рис. 30. Распределения значений  $p_{pc}$  найденных на переносных следах т-мезонов с энергией 17 Гэв методами: а — [012] на ячейках  $t=500, 1000$  и  $2000$  мк; б —  $p$  на ячейках  $t=500, 1000$  и  $2000$  мк.



### § 5. Метод корреляционных моментов

Этот метод основан на том, что корреляционная функция ложного рассеяния может быть аппроксимирована выражением

$${}^n D_{1n} {}^n D_{(l+j)n} = {}^n D_{1n}^2 \exp[-\alpha(a_j)] \cos(\beta a_j), \quad (54.4)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — некоторые параметры. Используя (99.2), (101.2) и (54.4), составим систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+\alpha)n} = \frac{235}{256} {}^n D_{1n}^2 + {}^n D_{1n}^2 \exp(-\alpha) \cos \beta, \\ {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+2\alpha)n} = \frac{184}{256} {}^n D_{1n}^2 + {}^n D_{1n}^2 \exp(-\alpha \cdot 2\gamma) \cos 2\beta, \\ {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+3\alpha)n} = \frac{121}{256} {}^n D_{1n}^2 + {}^n D_{1n}^2 \exp(-\alpha \cdot 3\gamma) \cos 3\beta, \\ {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+5\alpha)n} = \frac{27}{256} {}^n D_{1n}^2 + {}^n D_{1n}^2 \exp(-\alpha \cdot 5\gamma) \cos 5\beta, \end{cases} \quad (55.4)$$

где  ${}^n D_{1n}$  — измеренные вторые разности координат, а  $a = \frac{n}{4}$ .

В этой системе уравнений значения  $j$  выбраны равными 1, 2, 3 и 5. Опущены значения, равные 0 и 4, так как для них  ${}^n D_{1n} {}^n D_{(l+j)n} \neq 0$ . При большом  $n$  в принципе можно выбирать любые четыре значения  $j$ , для которых  ${}^n D_{1n} {}^n D_{(l+j)n} \neq 0$ , однако существует ряд аргументов, ограничивающих этот выбор. Из-за слабой определенности системы уравнений (55.4) желательно использовать такие  $j$ , для последовательных значений которых корреляционные моменты заметно различаются по величине. Необходимо, кроме того, выбирать наименьшие значения  $j$ , так как с ростом их статистическая ошибка определения корреляционных моментов растет. Имеются ограничения и в выборе степени перекрывания  $n$ . С одной стороны, чем больше  $n$ , тем с большей точностью исключаются шумы [91], но, с другой стороны, при этом существенно увеличивается объем измерений. Наиболее удобны, по-видимому, значе-

ния  $n=4, 8, 12$  и 16. Все эти аргументы и привели в конечном счете к тем значениям  $j$ , которые используются в системе уравнений (55.4). Система уравнений (55.4) не может быть разрешена в явном виде, однако некоторые упрощения позволяют без труда реализовать ее решение на электронных цифровых вычислительных машинах.

Анализ экспериментальных корреляционных функций ложного рассеяния показал, что величина  $\alpha$  в (54.4) мала и поэтому можно приближенно положить  $\exp[-\alpha(a_j)] \approx 1 - \alpha(a_j)$ . Тогда система уравнений (55.4) сводится к одному уравнению

$$\frac{a_{\alpha 1} \cos 2\beta - a_{\alpha 1} \cos 3\beta - a_{\alpha 3} \cos \beta}{2^7 a_{\alpha 1} \cos 2\beta - 3^7 a_{\alpha 1} \cos 3\beta - a_{\alpha 3} \cos \beta} - \frac{a_{\alpha 1} \cos 2\beta - a_{\alpha 1} \cos 5\beta - a_{\alpha 5} \cos \beta}{2^7 a_{\alpha 1} \cos 2\beta - 5^7 a_{\alpha 1} \cos 5\beta - a_{\alpha 5} \cos \beta} = 0, \quad (56.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{21} &= {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+2\alpha)n} - \frac{184}{235} {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+\alpha)n}, \\ a_{31} &= {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+3\alpha)n} - \frac{121}{235} {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+\alpha)n}, \\ a_{51} &= {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+5\alpha)n} - \frac{27}{235} {}^n D_{1n} {}^n D_{(l+\alpha)n}, \\ a_{23} &= \frac{184}{235} a_{\alpha 1} - \frac{121}{235} a_{21}, \\ a_{25} &= \frac{184}{235} a_{\alpha 1} - \frac{27}{235} a_{21}. \end{aligned}$$

Определив  $\beta$ , являющееся корнем уравнения (56.4), получим

$${}^n D_{1n}^2 = \frac{a_{\alpha 1}}{(1-\alpha \cdot 2^\gamma) \cos 2\beta - \frac{184}{235} (1-\alpha) \cos \beta}, \quad (57.4)$$

где

$$\alpha = \frac{a_{\alpha 1} \cos 2\beta - a_{\alpha 1} \cos 3\beta - a_{\alpha 3} \cos \beta}{2^7 a_{\alpha 1} \cos 2\beta - 3^7 a_{\alpha 1} \cos 3\beta - a_{\alpha 3} \cos \beta}.$$

Зная  $\alpha$ ,  $\beta$  и  ${}^n D_{1n}^2$  из первого уравнения системы (55.4)

найдем средний квадрат второй разности многократного кулоновского рассеяния:

$${}^n D_{i,k}^2 = \frac{256}{235} [{}^n D_{i,n} {}^n D_{(i+a)n} - (1-a) \cos \beta \cdot {}^n D_{i,n}^2]. \quad (58.4)$$

Искомый импульс будет:

$$p_{\beta c}^{\beta c} = \frac{K t^{1/2}}{578} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{{}^n D_{i,n}^2}. \quad (59.4)$$

Полная статистическая ошибка при определении  $p_{\beta c}$  методом корреляционных моментов (МКМ) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial p_{\beta c}^{\beta c}}{p_{\beta c}^{\beta c}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} (a + b\mu^2 + c\nu^2 + d\mu + e\nu + f\nu^2)^{1/2}, \quad (60.4)$$

где  $\mu = \frac{{}^n D_{i,n}^2}{{}^n D_{i,k}^2}$ ;  $\nu = \frac{{}^n D_{i,n}^2}{{}^n D_{i,k}^2}$ ;  $N$  — число вторых разностей, рассчитанных на ячейке  $i$  без перекрывания, а коэффициенты  $a, b, c, d, e$  и  $f$  зависят от степени перекрывания  $n$  (табл. 4).

Таблица 4

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
4	1,05	0,35	0,24	0,11	0,46	0,42
8	1,05	0,18	0,21	0,05	0,46	0,23
12	1,04	0,12	0,18	0,02	0,45	0,12
16	1,04	0,09	0,15	0,01	0,44	0,06

Формула (60.4) получена в предположении, что при  $n=1$   $a=0,32$ ,  $\beta=2,4$  и  $\gamma=2$ .

Описанный метод определения импульсов проведен на первичных следах протонов с энергией 10 Гэв в эмульсионных слоях НИКФИ-ВР-1 толщиной 600 мк, т-мезонов с энергией 17 Гэв и протонов с энергией 19,8 Гэв в слоях Ильфорд G-5 той же толщины. Многократное рассеяние протонов с энергией 10 Гэв и т-мезонов с энергией 17 Гэв измерено на полуавтоматическом микроскопе МИР-2 на ячейках:  $t_{min}=100$  мк для эмульсии НИКФИ-ВР-1 (с пересчетом на ячейки 400, 800, 1200 и 1600 мк) и  $t_{min}=250$  мк для эмульсии Ильфорд G-5 (с пересчетом на ячейки  $t=1000$  и 2000 мк). Ячейки  $t_{min}$  выбирались таким образом, чтобы  $D_{i,n}^2 >$

$> D_{i,n}^2 + D_{i,n}^2 + d^2$ . Для протонов с энергией 19,8 Гэв использованы результаты измерений, полученные ранее [113]. Расчет корреляционных моментов измеренных вторых разностей и импульсов проводился на электронной вычислительной машине. Дисторсии исключались по методу Фаулера.

Импульсы рассчитаны по формулам (56.4—59.4) и для сравнения по наиболее простому и достаточно надежному методу  $\rho$ . Особенность программы определения импульсов (см. приложение) — наличие корней уравнения (56.4). Для экспериментальных значений корреляционных моментов из-за статистических ошибок может не быть таких  $\beta$ , которые удовлетворяли бы этому уравнению. Поэтому выбирается значение  $\beta$ , дающее минимум левой части уравнения (56.4). Это значение отыскивается в области  $\beta^* \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$ , а  $\beta^*$  определяется на основе предварительного изучения корреляционной функции ложного рассеяния (обычно  $\beta^* \approx \frac{\pi}{12}$ ).

Результаты расчетов приведены в таблицах 5, 6 и 7. Надежность средних значений импульсов определяется по формуле

$$q = \frac{v_0 - \nu}{v_0} \cdot \frac{\min(p_{\beta c}, p_{\beta c_{ист}})}{\max(p_{\beta c}, p_{\beta c_{ист}})}, \quad (61.4)$$

где  $v_0$  — полное число обработанных следов;  $\nu$  — число следов, для которых  $p_{\beta c}$  — либо минное, либо выходящее за пределы трех стандартных отклонений относительно среднего значения  $p_{\beta c}$ ;  $p_{\beta c_{ист}}$  — истинное значение импульса.

Протоны с энергией 10 Гэв

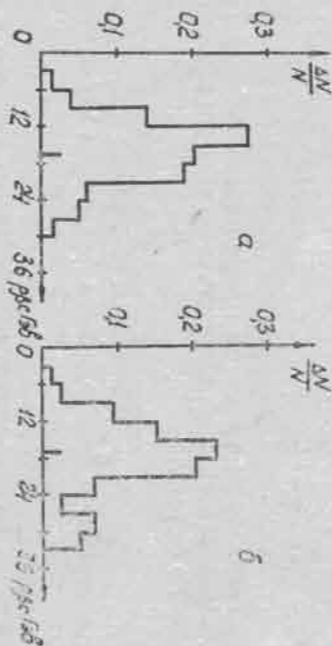
t, мкс	800		1200		1600	
	ρ	КМ	ρ	КМ	ρ	КМ
$\bar{p}_{\text{ис}}, \text{Гэв}$	9,5 ± 0,9	8,1 ± 0,5	9,9 ± 0,8	10,5 ± 0,5	11,1 ± 0,6	10,3 ± 0,6
q, %	53	57	70	95	79	94,5
$\frac{n D_{1x}^2}{n D_{1k}^2}$	4		2		1	

Таблица 5

τ-мезоны с энергией 17 Гэв (рис. 31)

t, мкс	1000		2000	
	ρ	КМ	ρ	КМ
$\bar{p}_{\text{ис}}, \text{Гэв}$	13,6 ± 0,9	10,8 ± 0,5	17,7 ± 0,7	16,5 ± 0,5
q, %	67,5	59	82	94,5
$\frac{n D_{1x}^2}{n D_{1k}^2}$	4,2		2,5	

Таблица 6

Рис. 31. Распределения значений  $\bar{p}_{\text{ис}}$ , найденных на первичных следах τ-мезонов с энергией 17 Гэв на ячейке  $t=2000$  мкс: а — метод корреляционных моментов; б — ρ.

Протоны с энергией 19,8 Гэв

t, мкс	2000	
Метод	ρ	КМ
$\bar{p}_{\text{ис}}, \text{Гэв}$	21,4 ± 0,8	19,9 ± 0,8
q, %	61	99,5
$\frac{n D_{1x}^2}{n D_{1k}^2}$	~2	

Таблица 7

Как видим, почти во всех рассмотренных случаях метод корреляционных моментов имеет существенное преимущество перед методом ρ в смысле надежности определения импульсов. Напомним, что МКМ сводится к аппроксимации корреляционной функции измеренных вторых разностей координат функцией, имеющей четыре параметра:  $n D_{1x}^2$ ,  $n D_{1x}^2$ , α, β (γ = const), а метод ρ фактически аппроксимирует измеренную кривую только двумя параметрами:  $n D_{1k}^2$  и  $n D_{1x}^2$  (α<sub>x</sub> = const), что трудно видеть, что большая точность достигается в первом случае. Естественно, что при этом возрастает надежность. Незначительное же уменьшение ошибки в определении импульса по МКМ объясняется тем, что основной вклад в эту ошибку дает ограниченность объема измерений, которая не зависит от применяемой методики.

Согласно данным таблиц 5, 6 и 7, оптимальную ячейку для определения импульсов по МКМ следует определять из условия

$$D_{1x}^2 < 2 D_{1k}^2 \quad (62.4)$$

Заметим, что в методе ρ  $t_{\text{опт}}$  находят из условия  $D_{1x}^2 < D_{1k}^2$ . Хорошим критерием выполнения соотношения (62.4) может служить величина

$$S = \frac{n D_{1x}^2 n D_{1k}^2}{n D_{1x}^2 n D_{1k}^2} \quad (63.4)$$

С учетом (99.2) и (54.4) для выполнения условия (62.4) необходимо потребовать

$$S > S_0 = \frac{121 + 512 \exp(-\gamma \cdot 3) \cos 3\beta}{235 + 512 \exp(-\gamma) \cos \beta} \quad (64.4)$$

Таким образом, чтобы отыскать оптимальную ячею, необходимо знать параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , которые легко определяются на следах частиц с известной энергией.

Чтобы точнее определить импульсы вторичных частиц, приходится снимать отрезки следов в нескольких слоях эмульсии. В методе корреляционных моментов этой процедуре соответствует усреднение корреляционных моментов по отрезкам. Так как многократное кулоновское рассеяние, должное рассеяние и шумы эргодичны, усреднение по отрезкам эквивалентно усреднению по следу с длиной, равной сумме длин отрезков.

Как показано выше, МКМ надежнее и точнее других методов. Основная недостаток его — громоздкость расчетов, необходимость применения специальных пакетов автоматических микрокалов и электронных вычислительных машин.

## § 6. Метод относительного рассеяния

Многократное относительное рассеяние можно измерить, когда следы частиц расположены друг от друга на расстоянии не более 50 мк в плоскости эмульсии и 20 мк по глубине. Как показали измерения, на таких расстояниях следы частиц испытывают практически одинаковые искажения как за счет дисторсии, так и за счет ложного рассеяния [57].

Относительная вторая разность координат  $D_{12i}$ , измеренная для двух близлежащих следов частиц, складывается из кулоновского рассеяния частиц  $D_{1ki}$ ,  $D_{2ki}$  и ошибок отсчета, шумов перефокусировки и зерен  $D_{1mi}$  и  $D_{2mi}$ . Поэтому

$$\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1ki}^2} + \overline{D_{2ki}^2} + \overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2} \quad (65.4)$$

где  $\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2}$ . Величины  $\overline{D_{1mi}^2}$  и  $\overline{D_{2mi}^2}$  не за-

висят от длины ячейки и для релятивистских частиц практически одинаковы, поэтому величину  $\overline{D_{12i}^2}$  можно выразить как  $\overline{D_{12i}^2} = 2\overline{D_{1mi}^2} = 2\overline{D_{2mi}^2}$ . Величину  $\overline{D_{12i}^2}$  можно исключить одним из способов, описанных в § 1 (гл. III). Наиболее точную и надежную оценку  $\overline{D_{12i}^2}$  можно получить по формуле

$$\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1ki}^2} + \overline{D_{2ki}^2} = \frac{4}{g(1)} \overline{D_{12i}^2} \overline{D_{12i}^2} \quad (66.4)$$

где  $\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1i}^2} - \overline{D_{2i}^2}$ , а  $\overline{D_{12i}^2}$  — коэффициент, определяемый соотношением (99.2). Относительная ошибка оценки (66.4) равна

$$\frac{\overline{D_{12i}^2}}{\overline{D_{12i}^2}} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left[ a + b \frac{2+2\gamma+3\gamma^2}{3(1+\gamma)^2} + c\gamma + d\gamma^2 \right]^{1/2}, \quad (67.4)$$

где  $\gamma = \frac{\overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2}}{\overline{D_{1ki}^2} + \overline{D_{2ki}^2}}$ ;  $N$  — число вторых разностей  $\overline{D_{12i}^2}$  на ячейке  $t$  без перекрытия. Значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в зависимости от степени перекрытия  $n$  даны в таблице 8. Относительная ошибка величин  $\overline{D_{12i}^2}$  зависит от соотношения  $\overline{D_{1ki}^2}/\overline{D_{2ki}^2}$  и будет минимальной при  $\overline{D_{1ki}^2} = \overline{D_{2ki}^2}$ .

Таблица 8

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$
2	0,420	0,359	0,141	0,094
3	0,388	0,242	0,147	0,218
4	0,405	0,184	0,132	0,144

Если  $\overline{D_{1ki}^2}$  или  $\overline{D_{2ki}^2}$  равно нулю, то формулы (67.4) совпадают с формулами (21.3—23.3) с той лишь разницей, что  $n = 2$ . Это обусловлено тем, что при намерении относительного рассеяния  $\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2} = 2\overline{D_{1mi}^2}$ .

Поскольку относительная ошибка оценки  $D_{12k}$  по формуле (66.4) существенно зависит от  $n_1$ , а коэффициенты  $c$  и  $d$  монотонно убывают с ростом  $n$  при  $n > 3$ , то ясно, что при достаточном большом степенни перекрывания  $n$  ошибка определяется только числом измерений  $N$  на заданной ячейке  $t$ . Практически уже при  $n > 8$  влияние случайных ошибок измерения незначительно.

Формула (67.4) получена в предположении равенства  $D_{1n1}^2 = D_{2n1}^2$ , что справедливо только при малых расстояниях между измеряемыми следами. С помощью измерения относительного рассеяния оценивается энергия той частицы, у которой кулоновское рассеяние много больше другой или же оценивается их средняя энергия. Энергию каждой частицы с помощью формулы (66.4) определить нельзя. Этот недостаток можно устранить, если измерить относительное рассеяние для следов трех близлежащих частиц: измеряются относительные значения вторых разностей  $D_{12k1}$ ,  $D_{13k1}$  и  $D_{23k1}$ , соответствующие парам всех трех следов [3, 121]. Комбинируя уравнения (66.4), получим

$$\begin{cases} D_{1k} = \sqrt{2(D_{12k}^2 + D_{13k}^2 - D_{23k}^2)}^{1/2}, \\ D_{2k} = \sqrt{2(D_{12k}^2 + D_{23k}^2 - D_{13k}^2)}^{1/2}, \\ D_{3k} = \sqrt{2(D_{23k}^2 + D_{13k}^2 - D_{12k}^2)}^{1/2}. \end{cases} \quad (68.4)$$

Величины  $D_{12k}$ ,  $D_{13k}$  и  $D_{23k}$  можно найти косвенным путем: многократное рассеяние измеряется на каждом следе строго в одних и тех же точках оси  $x$ . По измеренным координатам в этих точках и находятся относительные вторые разности. Такой способ определения относительного рассеяния уменьшает шум периферической микроскопа и исключает ошибку, обусловленную перемещением шкалы окуляр-микрометра с одного следа на другой. В некоторых работах с помощью относительного рассеяния оценена энергия частиц в несколько десятков и даже сотен Гэв [3, 97, 121, 132]. К сожалению, этот метод имеет ограниченное применение на практике, так как очень небольшое число сле-

дов частиц удовлетворяет требованиям, предъявляемым к методу измерения относительного рассеяния.

С помощью описанного метода можно определить не только кулоновское рассеяние, но и ложное, и использовать его величину при определении энергии других частиц, расположенных в той же области эмульсии, где измерялось относительное рассеяние. Измерения рассеяния для этого проводят отдельно на каждом из двух близлежащих следов строго в одних и тех же точках оси  $x$ . В  $i$ -той точке для каждого следа можно записать [95]:

$$\begin{cases} D_{1i} = \Delta_{1i} + D_{pi} \\ D_{2i} = \Delta_{2i} + D_{pi} \end{cases}, \quad (69.4)$$

где  $D_{2i}$  — вторые разности ложного рассеяния (предполагается, что  $D_{1n1} = D_{2n1}$  в той области эмульсии, где находятся оба следа);  $\Delta_{1i}$  и  $\Delta_{2i}$  — случайные отклонения, обусловленные кулоновским рассеянием и шумами. Из (69.4) получим

$$\sqrt{D_{1i}^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(D_{1i} + D_{2i})^2 - (D_{1i} - D_{2i})^2] \right\}^{1/2}. \quad (70.4)$$

Наряду с методами, описанными в §§ 1—6 этой главы, существуют и другие способы исключения ложного рассеяния [89, 133—136 и др.]. В большинстве случаев они являются модификацией описанных выше методов.

Глава V  
ПОСТОЯННАЯ МНОГОКРАТНОГО  
КУЛОНОВСКОГО РАССЕЙНИЯ

§ 1. Расчет

В работах [43, 51, 59] рассчитана постоянная многократного кулоновского рассеяния для функций распределения  $Q(t, \theta)$ , полученных разными способами. Наиболее просто постоянную рассеяния можно оценить, используя теорию Мольера. В § 3 главы II получено выражение для  $\sqrt{\theta^2}$ , рассчитанного по формуле (46.2):

$$\sqrt{\theta^2} = z_1 z_2 e^2 (2\pi N V)^{1/2} \left( 1 + \frac{0.982}{B} - \frac{0.117}{B^2} + \dots \right)^{1/2} \cdot \frac{t^{1/2}}{p^{3/2} c}. \quad (1.5)$$

Согласно (76.2) и (1.5),

$$\theta' = |\bar{\theta}| = \bar{\theta} \left( B + 0.982 - \frac{0.117}{B} + \dots \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\theta} = \frac{2z_1 z_2 e^2 (N t)^{1/2}}{p^{3/2} c}. \quad (3.5)$$

Вспомогательная (72.2) и (79.2), получим, что для чистого вещества

$$K \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p^{3/2} c}{t^{1/2}} \theta' = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p^{3/2} c}{t^{1/2}} \bar{\theta} \times \\ \times \left( B + 0.982 - \frac{0.117}{B} \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Для усреднения по элементам ядерной фотоэмульсии заменим  $Nz_2^2$  в формулах (44.2) и (3.5) на  $\sum_i N_i z_i^2$  и подставим вместо  $z_2$   $\frac{1}{N} \sum_i N_i z_i$ . Это дает [43, 51]:

$$\bar{\theta} \approx 1.006 \frac{t^{1/2}}{p^{3/2} c}, \quad (5.5)$$

$$B \approx 1.153 + 2.583 \ln \Omega, \quad \Omega = \frac{h^2}{m^2 c^2} \frac{M}{\rho} \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{h^2}{m^2 c^2} \frac{M}{\rho} \frac{1}{(1.5 \cdot 2)}$$

$$\Omega = 6.317 (0.23 + 0.77 \beta^2)^{-1},$$

где  $t$  выражено в микронах,  $p^{3/2} c$  — в миллионах электронвольт, а  $\theta$  — в градусах. Подставляя (5.5) в (4.5), имеем

$$K = 10.06 \sqrt{\frac{2}{3}} \left( B + 0.982 - \frac{0.117}{B} \right)^{1/2} \frac{\text{град} \cdot \text{Мэв}}{(100 \cdot \text{мк})^{1/2}}. \quad (6.5)$$

В литературе часто используется постоянная рассеяния, рассчитанная Вонюдик и Пикал [51] по теории Вильямса [30, 36] с учетом экранирующего параметра  $\Theta_{\text{эк}}$ , предложенного Мольер. Согласно Вильямсу,

$$\theta' = \bar{\theta} [1.45 + 0.80 (\ln M)^{1/2}]. \quad (7.5)$$

Величина  $M = \left( \frac{t}{m t_0} \right)^2$  так же, как и  $\Omega$  в теории Мольера, — мера среднего числа столкновений, испытываемых частицей в слое  $t$ . Для  $M$  Вильямс получил

$$M = 0.64\pi N t z_1^2 z_2^2 \frac{h^2}{m^2 c^2} \frac{1}{\beta^2}, \quad \text{если } \tau \ll 1; \quad (8.5)$$

$$M = 0.20\pi N t z_2^{-2} \left( \frac{h^2}{m c^2} \right)^2, \quad \text{если } \tau \gg 1, \quad (9.5)$$

где

$$\tau = \frac{21 z_1^2}{137 \beta}.$$

Вонволик и Пикап, используя формулу (8.2) для  $\Theta_{\alpha}$ , получили, что среднее число столкновений в слое равно

$$M_1 = M \left(1 + \frac{1}{0,31}\right)^{-1}. \quad (10.5)$$

Теория Вильямса справедлива при  $M_1 \gg 1$ . Для ядерной фотоэмальсии  $M_1$  обычно больше 100, поэтому его теорию вполне можно применить для расчета  $K$ . В дальнейшем используется параметр  $M$ , определяемый формулой (8.5), так как в случае рассеяния релятивистских частиц в ядерной эмульсии  $\tau \ll 1$ . Согласно (8.5) и (10.5), для чистого вещества ( $z_1 = 1$ )

$$\begin{aligned} \ln M_1 &= \ln(0,64\tau N_1 z_1^2 h^2 m^{-2} c^{-2}) - \\ &- \ln \beta^2 - \ln \left(1 + \frac{1}{0,31}\right) z_1^2. \end{aligned} \quad (11.5)$$

По аналогии с методом Молвер осреднения для смеси

$$\begin{aligned} \ln M_1 &= \ln(\text{const} \cdot \tau \sum_i N_i z_{i1}^2) - \ln \beta^2 - \\ &- \frac{\sum_i N_i z_{i1}^2 \ln z_{i1}^2 \left(1 + \frac{1}{0,31}\right) z_{i1}^2}{\sum_i N_i z_{i1}^2}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Подставляя численные значения всех величин, получим (51)

$$\ln M_1 \approx \ln \frac{0,941}{0,30 + \beta^2}. \quad (13.5)$$

Используя (5.5), (7.5) и (13.5), найдем

$$K = 11,9 \left[1 + 0,837 \left(\ln \frac{0,941}{0,30 + \beta^2}\right)^{1,7} \frac{\text{град} \cdot \text{Мэв}}{(100 \text{ мк})^{1,5}}\right]. \quad (14.5)$$

Формулы (6.5) и (14.5) получены без учета рассеяния на атомных электронах. Как показано в § 1 (гл. II), влияние рассеяния на электронах можно учесть, заменяя  $z_2^2$  на  $z_2(z_2 + 1)$ . Значение постоянной рассея-

ния при этом увеличивается приблизительно на 2% [4.51]. Формула (14.5) для величины  $K$  получена в предположении, что ядра рассеивателя точечные.

Знание постоянной рассеяния  $K$  позволяет найти  $r_{\text{рвс}}$  по измерениям  $D_r$ . При обработке экспериментальных данных отдельные (возможно, единичные) большие значения  $D_r$  приведут к неправильной оценке  $r_{\text{рвс}}$ . Чтобы уменьшить флуктуации измеренных значений  $D_r$  за счет упругого и неупругого рассеяния на больших углах, приводящего к большим величинам  $D_r$ , экспериментаторы предпочитают считать это рассеяние тем или иным способом. Наиболее распространено отбрасывание  $D_r > 4D_r$ , или, что то же самое,  $\theta > 4\theta'$ . Эту процедуру часто называют обрезанием. Очевидно, что среднеарифметическое значение угла  $\theta$ , вычисленное с обрезанием, равно

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ср}}' &= \frac{\int_0^{4\theta'} \theta Q(\theta) d\theta}{\int_0^{4\theta'} Q(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_0^{4\theta'} \theta Q(\theta) d\theta}{\int_0^{4\theta'} Q(\theta) d\theta}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Подставляя в (15.5) конкретное выражение для функции распределения  $Q(\theta)$ , (4), получим связь между  $\theta_{\text{ср}}$  и  $\theta'$ . Так, для теории многократного рассеяния Вильямса

$$\theta_{\text{ср}}' = \frac{\pi}{1 - \frac{\pi}{32\theta'^2}}. \quad (16.5)$$

При определении  $r_{\text{рвс}}$  по  $\theta_{\text{ср}}$  постоянная рассеяния находится по формулам (14.5) и (16.5). Часто значения  $\theta > 4\theta'$  не отбрасывают, а заменяют на  $4\theta'$ . Среднеарифметическое значение угла  $\theta$ , найденного с заменением, равно [27]:

$$\vartheta'_a = \int_0^{4\vartheta'_a} \vartheta Q(t, \vartheta) d\vartheta + 4\vartheta'_a \int_{4\vartheta'_a}^{\infty} Q(t, \vartheta) d\vartheta. \quad (17.5)$$

Как указал Варкас [4], метод замещения недостаточно эффективен, так как отдельные отклонения на большие углы частично сохраняют свое влияние на  $D_n$ . Значение постоянной рассеяния для этого случая меньше  $K$  и больше  $K_{co}$ , рассчитанной с обрезанием.

Существует и еще один способ уменьшения влияния однократного рассеяния, суть которого состоит в вычислении вместо среднестатистического значения угла  $\vartheta$  среднего значения  $\cos^2 \vartheta$  [137, 138]. Параметр  $\eta$  выбирается так, чтобы  $\hat{D}_n/D_n$  было минимальным. В работе [139] показано, что теория Молвер позволяет без труда оценить ошибку  $\hat{D}_n/D_n$  найти  $\eta$  и значение постоянной рассеяния  $K_n$ .

Таким образом, выбор конкретной величины  $K$  зависит от способа обрезания. Влияние конечных размеров ядер сказывается в том, что при  $\vartheta' \gg \frac{\lambda}{r_0}$  величина  $M$  не зависит от длины ячейки  $t$ , а среднестатистическое значение угла  $\vartheta$  равно [51]

$$\vartheta' = \delta (19,5 - 3,11 g z_2)^{1/2},$$

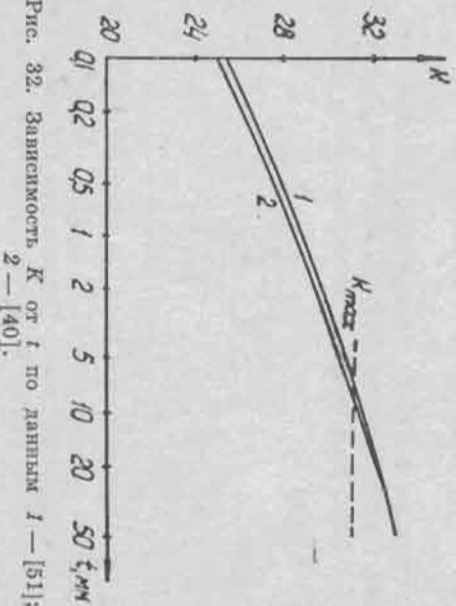


Рис. 32. Зависимость  $K$  от  $t$  по данным 1 — [51]; 2 — [40].

Величина  $K$  при этом достигает своего максимального значения ( $K_{max} = 31,2$ ) и далее не изменяется с изменением  $t$ . На рисунке 32 изображена зависимость от длины ячейки постоянной  $K$ , рассчитанной по формуле (14.5) при  $\beta = 1$ . Здесь же нанесена кривая, соответствующая постоянной  $K$ , определенной по формуле (6.5). Из рисунка видно, что постоянная  $K$ , рассчитанная по теории Вильямса с учетом  $\vartheta_c$ , практически совпадает с  $K$ , вычисленной по теории Молвер. Постоянную рассеяния можно рассчитывать, используя и другие теории [59].

## § 2. Экспериментальные значения

Величина постоянной рассеяния, рассчитанной по теории Вильямса—Молвер, в основном согласуется с экспериментальными данными, полученными при измерении рассеяния на следах протонов и электронов с энергиями в несколько десятков и сотен  $Mэв$  на малых длинах ячеек [51—53, 140—142]. Готштейн и др. [53] при измерении рассеяния на следах протонов с энергией 336  $Mэв$  на ячейке  $t = 0,6$   $\muм$  нашли, что  $K_{co} = 29,2 \pm 1,0$ , а  $K = 30,7 \pm 1,0$ . Теоретическое значение  $K_{co} = 27,2$ , а  $K = 28,8$ . Бергер [52] определил значение  $K_{co}$  и  $K$  при измерении рассеяния на следах протонов с энергией 218 и 337  $Mэв$  на ячейках 0,25; 0,50; 0,75 и 1  $\muм$ . Его экспериментальные значения постоянной рассеяния систематически меньше теоретических на 5—8%.

Лукин и др. [54] для протонов с энергией 660  $Mэв$  получили  $K_{co} = 27,4 \pm 1,5$  ( $t = 0,4$   $\muм$ ).

Для быстрых частиц ( $\beta \approx 1$ ) значения постоянной рассеяния в зависимости от  $t$  приведены на рисунке 33.  $K_{co}$  получены при измерении рассеяния координатным методом на индивидуальных следах. В интервале длин ячеек 4—40  $\muм$  зависимость  $K_{co}$  от  $t$  практически отсутствует. Среднее экспериментальное значение  $K_{co} = 27$ . В области  $t > 10$   $\muм$  наблюдается различие порядка 15—20% между расчетной и экспериментальной величинами постоянной рассеяния.



Впервые такое различие обнаружено в работах Хос-сайна и др. [58]. Постоянная рассеяния определялась на следах  $\pi$ -мезонов с энергией 16,2 Гэв и  $\mu$ -мезонов — 8,2 Гэв на ячейках  $t=2$  и 3 см. Несмотря на то, что значения  $D_1 > 4D'$  не отбрасывались, ложное рас- сечение не исключалось, экспериментальное значение

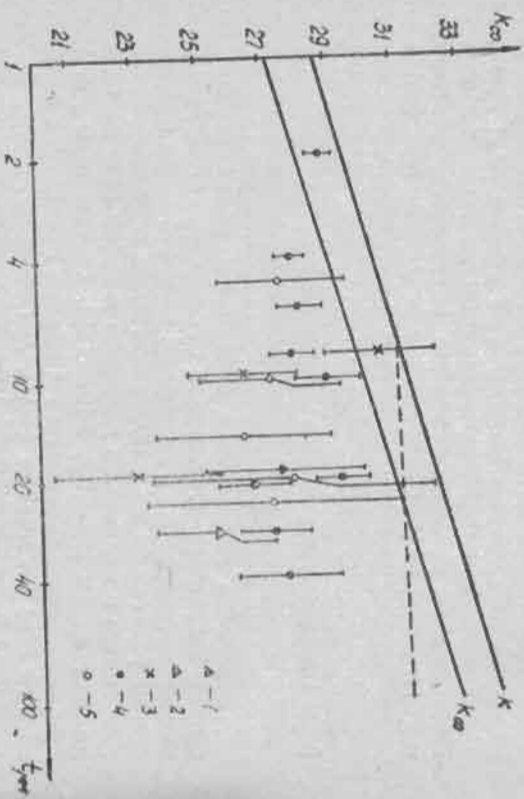


Рис. 33. Экспериментальные значения  $K$ : 1, 2—[58]; 3—[61]; 4—[60]; 5—[62].

постоянной рассеяния все же оказалось ниже расчи- танного примерно на 15%. В работах [111, 120] обнару- жено несоответствие между измеренной величиной мно- тократного рассеяния и его теоретическим значением и для частиц с  $\beta < 1$ . Так, для частиц с отрицательным зарядом (40%  $\pi$ -мезонов и 60%  $\mu$ -мезонов) со средним значением импульса порядка 715 Мэв/с эксперимен- тальное значение второй разности, измеренное на ячей- ках  $t=10 \div 16$  мм, оказалось ниже теоретического на 20—40% [111]. Для протонов с кинетической энер- гией 660 Мэв величина второй разности, измеренной на ячейке  $t=4$  мм, оказалась значительно ниже расчетной; для протонов с энергией порядка 2 Гэв это различие составляет  $\sim 25\%$  на ячейке  $t=10$  мм

[120]. Приблизженный учет размеров ядер, сделанный Вольдик и Пикал [51], дает величину  $K$  (пунктирная линия на рис. 33), большую экспериментальных зна- чений. Поскольку это различие наблюдается и при измерении рассеяния на следах  $\mu$ -мезонов (неядерно- активных частиц), можно предположить, что имеются различия между теорией и экспериментом, по-види- мому, нельзя сбрасывать влияние рассеяния, обуслов- ленного ядерным взаимодействием частиц, т. е. рассея- нием некулоновского характера. Учет протяженности ядра, сделанный в работах [32—34, 143], также не объ- ясняет этого различия.

Следует отметить еще один факт, подтверждающий несоответствие теории многократного рассеяния и экс- перимента. В области больших длин ячеек, когда  $D_k \gg D_{\pi^0}$ , величина  $\rho_k$  начинает увеличиваться, хотя его теоретическое значение должно быть постоянным и равным  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  [120] (рис. 34).

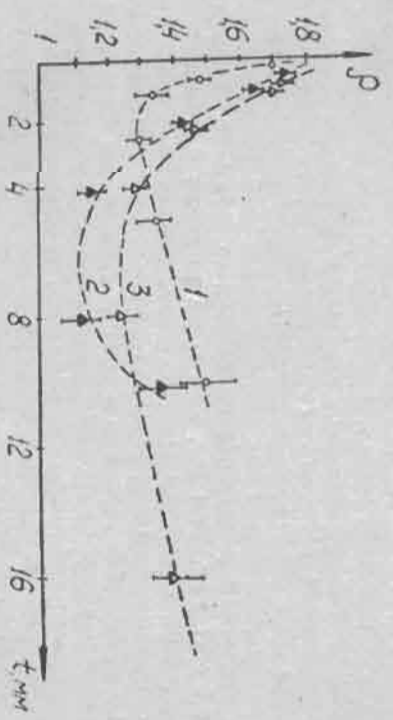


Рис. 34. Зависимость  $\rho$  от длины ячейки и  $\rho_{\text{ис}}$ : 1—2,6 Гэв; 2—10 Гэв; 3—17 Гэв.

Бозоки и др. [62] предположили, что постоянная рас- сечения зависит от метода, с помощью которого измеря- ется многократное рассеяние. Действительно, значение  $K_{\pi^0}$  найдено с помощью измерения относительного рассеяния на ячейках  $t < 1$  см, примерно на 10% выше значения  $K_{\pi^0}$ , найденного при измерении рассеяния на

отдельных следах (см. рис. 33 и 35). На рисунке 35 приведены значения  $K_{\text{ср}}$  найденные при измерении отно-

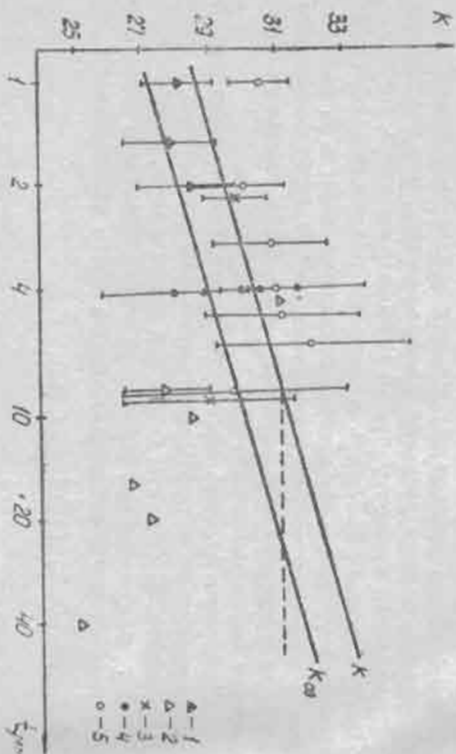


Рис. 35. Экспериментальные значения  $K$ , найденные методом отнормированного рассеяния. 1—[56]; 2—[59]; 3—[58]; 4—[60]; 5—[57].

сительного рассеяния на следах частиц с энергией 4,5–27 Гэв. Так же, как и на рисунке 33, значение  $K_{\text{ср}}$  при  $t > 10$  мк меньше теоретического. Завышение значения  $K_{\text{ср}}$  (рис. 33) при  $t < 10$  мк, по-видимому, можно объяснить тем, что в методе измерения относительно рассеяния недостаточно строго выдерживаются требования, которые необходимо к нему предъявить. Например, в работе Врисбаут и др. [56] относительное рассеяние измерялось на следах частиц, расположенных друг от друга в плоскости эмульсии на 50 мк и то глубине на 20 мк, в то время как в работе Бисвас и др. [57] — на расстоянии 200 и 50 мк соответственно.

Возможно поэтому в работе Бисвас и др. [57] величина постоянной рассеяния оказалась примерно на 8% больше соответствующей величины, найденной в работе [56]. Неполюное исключение ложного рассеяния, шумов и дисторсии приводит в этом случае к завышению постоянной рассеяния.

Интересно определение постоянной рассеяния с помощью других методов, например, с помощью метода углового рассеяния пучка частиц, суть которого заключается в следующем: частицы высокой энергии после прохождения эмульсионного слоя толщиной  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + t$  образуют со средним направлением пучка средние арифметические углы  $\theta_1'$  и  $\theta_2'$ . Квадрат среднеарифметического кулоновского угла  $\theta_{\text{ср}}'$  после прохождения слоя толщиной  $t$  будет  $\theta_{\text{ср}}'^2 = \theta_2'^2 - \theta_1'^2$ . При нахождении  $\theta_{\text{ср}}'^2$  значения отдельных углов, больших  $4\theta_1'$  или  $4\theta_2'$ , отбрасываются по аналогии с координатным методом, где исключаются значения  $D_1 > 4D'$ . Значение постоянной рассеяния определяется угловым методом в работе [145] на следах т-мезонов с энергией 0,3 Гэв при  $t = 40$  мк и следах протонов с энергией 6,2 Гэв при  $t = 60$  мк. Получены значения  $K_{\text{ср}} = 30,3 \pm 0,7$  и  $30,4 \pm 0,9$  соответственно для т-мезонов и протонов. Минимальное расчетное значение постоянной рассеяния на таких ячейках составляет 31,2.

В работе [144] на следах протонов с энергией 9 Гэв при  $t = 72$  мк найдено значение  $K_{\text{ср}} = 34,3 \pm 1,6$ . Затем в работе [62] более корректно учтено дифракционное рассеяние, и это значение уменьшилось до  $K_{\text{ср}} = 29,4 \pm 2$ . Там же определено значение  $K_{\text{ср}} = 30,2 \pm 2,5$  на следах т-мезонов с энергией 17 Гэв при 10 мк  $t \leq 30$  мк.

Экспериментальные значения  $K_{\text{ср}}$  в пределах ошибок согласуются со значением  $K_{\text{ср}} = 31,2$ , хотя они систематически меньше этой расчетной величины. В то же время они значительно больше величин  $K_{\text{ср}}$  определенных координатным методом (см. рис. 33). Возможно, это различие обусловлено тем, что предположения, базирующиеся на основе углового метода определения постоянной рассеяния, недостаточно обоснованы. Например, предполагается, что шумы и ложное рассеяние одинаковым образом входят в угловое распределение в точках  $t_1$  и  $t_2$  и поэтому при вычитании  $\theta_2'^2 - \theta_1'^2$  исключаются [144]. Неясно, как учитываются искажения следов частиц за счет дисторсий. Трудно предположить, чтобы дисторсии и ложное рассеяние были одинаковы в двух областях эмульсионного слоя, расположенных на расстоянии больше 1 см.

В связи с этим интересно привести значения посто-

янной, полученной с помощью измерения рассеяния координатным методом на индивидуальных следах без исключения ложного рассеяния и дисторсии. Так, в работе [62] получено значение  $K_{\text{ср}} = 30,2 \pm 0,6$  (интервал длин ячеек  $5 \text{ мк} \leq t \leq 30 \text{ мк}$ , т-мезоны,  $17,2 \text{ Гэв}$ ), а в работе [146] —  $K_{\text{ср}} = 34$  ( $4 \text{ мк} \leq t \leq 40 \text{ мк}$ , т-мезоны,  $17,2 \text{ Гэв}$ ). Эти значения  $K_{\text{ср}}$  не приведены на рисунке 38, так как совершенно ясно, что они завышены, а исправленные значения (с учетом ложного рассеяния) приведены (точки 5).

В угловом методе определения постоянной рассеяния важно также правильно учесть поправки, обусловленные некулоновским взаимодействием частиц.

В работах [146—148] на следах моноэнергичных частиц в точках  $t_1$  и  $t_2$  вместо углов измерались смещения следов в горизонтальной плоскости эмульсии относительно их первоначальной направленности. Этот метод называют методом прямого измерения  $y$ -ординат. По измеренным среднеквадратичным смещениям  $\sqrt{y_i^2}$  на ячейках длины  $l$  постоянная рассеяния находилась из соотношения

$$K = \frac{2,573 \sqrt{y_i^2 \cdot \rho^2 c}}{\pi \cdot l^{1/2}}$$

Найденная таким способом величина постоянной рассеяния на следах протонов с энергией  $27 \text{ Гэв}$  на ячейках  $l \geq 3 \text{ см}$  оказалась равной  $27,4 \pm 1,6$  и  $27,8 \pm 2,5$  (при максимальных длинах следов  $4,5$  и  $10 \text{ см}$  соответственно) [147]. В работе [148] этот метод применен для следов  $\mu$ -мезонов с энергией  $8 \text{ Гэв}$ . Показано, что постоянная рассеяния зависит от максимально измеряемой величины горизонтального смещения. Так, с увеличением смещения от  $10$  до  $150 \text{ мк}$  на ячейке  $l = 50 \text{ мк}$  постоянная рассеяния увеличивается с  $24,0 \pm 1,8$  до  $30,2 \pm 2,2$ .

В работе Суд и Чохан [146] на следах т-мезонов с энергией  $17,2 \text{ Гэв}$  получено значение постоянной  $32,3 \pm 3,3$  для  $40 \text{ мк} \leq t \leq 80 \text{ мк}$ . Авторы не учитывали в измерениях ложное рассеяние и дисторсии. Кроме того, они не принимали во внимание вклад обусловленный некулоновским рассеянием (неупругое рассеяние на больших углах, дифракционное рассеяние и т. п.).

114

В более поздней работе [59], соавтором которой является также Суд, показано, что экспериментальное значение постоянной рассеяния, измеренной координатным методом Фаулера ( $D_N$  оценивалось с помощью относительного рассеяния) на следах т-мезонов с энергией  $17 \text{ Гэв}$ , и значение постоянной, найденной методом измерения ординат  $|y_i|$  (относительное рассеяние) на ячейках длиной  $40, 60, 80 \text{ мк}$ , хорошо согласуются друг с другом, но систематически меньше расчетных на  $15—20\%$ .

В работе [63] измерена постоянная  $K_{\text{ср}}$  методом относительного рассеяния для следов протонов и пионов с импульсами  $5, 8, 12$  и  $24 \text{ Гэв}/c$  в одних и тех же слоях эмульсии, а также для мюонов с импульсом  $5 \text{ Гэв}/c$ . Выводы авторов этой работы идентичны выводам авторов работы [59].

Нами измерено относительное рассеяние на следах т-мезонов с энергией  $60 \text{ Гэв}$  в эмульсии НИИХИМФТО-ВР-2 толщиной  $600 \text{ мк}$ , облученной на ускорителе в г. Серпухове. Выбрались пары следов частиц длиной  $4—6 \text{ см}$ , расходящиеся в плоскости эмульсии не более чем на  $20 \text{ мк}$  и по глубине не более чем на  $10 \text{ мк}$ . Среднеквадратическая величина второй разности многократного кулоновского рассеяния определялась по формуле (66.4), а значение  $K$  — по формуле (59.4). Найденные таким образом  $K$  оказались значительно меньше теоретических значений (рис. 36) и несколько меньше, чем  $K$ , определенные на следах частиц с энергией до  $27 \text{ Гэв}$ . Столь малые значения  $K$ , по-видимому, не могут быть объяснены условиями выбора пар, так как  $\sqrt{D_i^2}$ , непосредственно измеренные на отдельных следах и включающие в себя кроме кулоновского рассеяния ложное рассеяние, шумы и дисторсии, на больших ячейках одного порядка с кулоновским рассеянием, измеренным на парах, и также значительное меньше теоретического значения кулоновского рассеяния (рис. 37). Измеренные среднеквадратические значения вторых разностей многократного кулоновского рассеяния изменяются с длиной ячейки как  $l^{1,35 \pm 0,04}$ , в то время как теория дает зависимость  $l^{1,5}$ .

Таким образом, значение постоянной многократного

115

то кулоновского рассеяния, определенной различными способами для частиц с различной природой и энергией, оказывается значительно меньше расчетного, особенно в области больших длин ячеек.

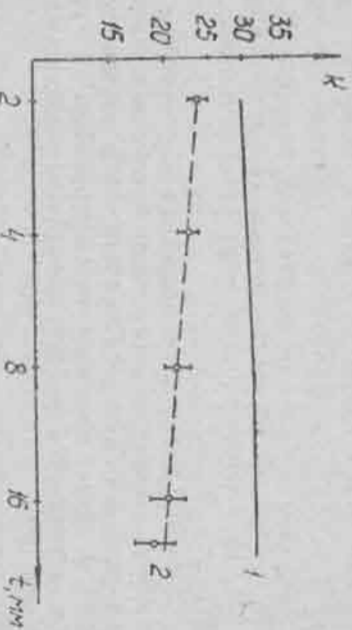


Рис. 36. Зависимость  $K$  от длины ячеек: 1 — теория; 2 — эксперимент (относительное рассеяние).

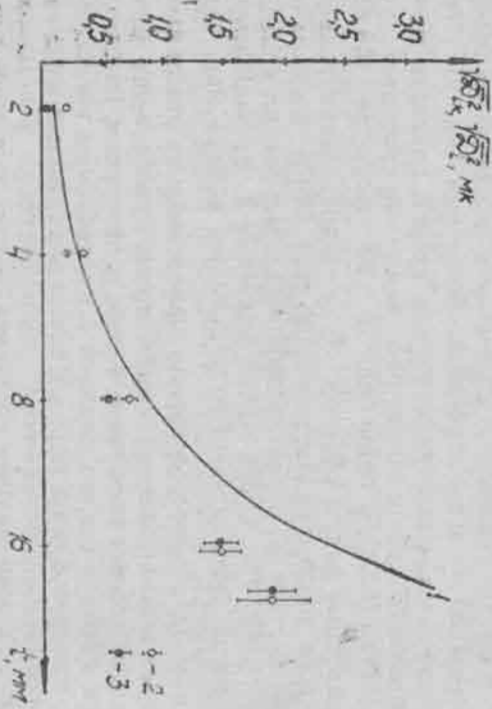


Рис. 37. Зависимость  $\sqrt{D^2/D_0^2}$  и  $\sqrt{D_1^2/D_0^2}$  от длины ячейки  $t$ : 1 — теория; 2 и 3 — эксперимент, индивидуальное и относительное рассеяние соответственно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение экспериментальных данных с выводами различных вариантов теории многократного кулоновского рассеяния заряженных частиц, сделанное во второй и пятой главах, показало, что при малых ячейках данные теории и эксперимента удовлетворительно согласуются, в области же больших длин ячеек наблюдаются заметное расхождение. Возможными причинами такого расхождения могут быть незнание точного распределения заряда в ядре, приближенный учет экранирования поля ядра атомными электронами, несправедливость кинетического уравнения при описании многократного рассеяния, приближенный расчет постоянной рассеяния для сложного состава вещества, квантовомеханические эффекты и т. д. Чтобы более точно указать причины такого расхождения, необходимо детально исследовать зависимость этого эффекта от энергии частиц и свойств рассеивателя. Согласно имеющимся в настоящее время экспериментальным данным (§ 2, гл. V), учет протяженности размеров ядер, по-видимому, не может полностью объяснить наблюдаемое различие теоретического и экспериментального значений постоянной рассеяния, так как он уменьшает величину  $K$  при больших  $t$  не более чем на 5%.

С увеличением энергии частицы и длины ячейки расхождение теории с экспериментом увеличивается. Чтобы понять это явление, необходимы экспериментальные данные о зависимости величин  $D_k$  и  $\rho$  от длины ячейки  $t$  и энергии частиц. Так как данные теории и эксперимента не совпадают, то при определении энер-

лин быстрых частиц по их многократному кулоновскому рассеянию нужно пользоваться значением постоянной рассеяния, полученной из каллибровочных измерений на следах частиц с известной энергией.

Измерениям истинного кулоновского рассеяния, как правило, сопутствуют различного рода ошибки, связанные с историей, шумами и ложным рассеянием. На практике обычно преобладают историсин второго порядка, которые легко устраняются из измеренных значений вторых разностей любым из описанных способов (§ 2, гл. III). Ложное рассеяние и шумы наиболее надежно исключаются с помощью метода, использующего их корреляционные свойства (§ 4, гл. II; § 1, 2, гл. III; § 5, гл. IV). Этим методом рекомендуется пользоваться при измерении рассеяния на микроскопах с автоматической записью информации и последующей обработкой ее на электронных вычислительных машинах. При измерении рассеяния и обработке данных вручную предпочтительнее пользоваться более простым, но достаточно надежным методом  $\rho$  (§ 3, гл. IV).

Корреляционный метод исключения помех, аналогичных ложному рассеянию и шумам, в принципе может применяться при измерении любых физических величин с известными корреляционными свойствами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Программа вычисления импульсов заряженных частиц методом корреляционных моментов на электронной вычислительной машине БЭСМ-3М.*

Исходные данные для определения  $\rho_{fc}$  — корреляционные моменты  ${}^n D_{in}$ ,  ${}^n D_{(i+j)n} = a_j$ . Числовой матрица располагается в ячейках с 305 ÷ 1537: в ячейках 305 ÷ 327 — необходимые для вычислений константы; в ячейках 330 ÷ 1416 — вторые моменты  $a_j$  и в ячейках 1417 ÷ 1537 — номера групп  $a_j$ . Расчет проводится по формулам (56.4) — (59.4) и по формуле (7.4).

№ ачел-  
ки

A<sub>1</sub>

A<sub>2</sub>

A<sub>3</sub>

Примечание

1	2	3	4	5	6	7	8
0020							
1	56	0	0022	0	0	КА	
2	00	0022	0	0	0		
3	50	0010	0001	0022	7767		
4	70	7500	0022	0	0		
5	16	0025	7501	7610	7610		
6	52	0805	0042	1537	0		
7	16	0030	0	7501	7610		
0030	72	1417	0027	1417	1417		
1	05	0831	0805	2001	2001		
2	02	0832	2001	2005	2005		
3	05	0831	0806	2001	2001		
4	02	0838	2001	2006	2006		
5	05	0831	0307	2001	2001		
6	02	0835	2001	2007	2007		
7	05	0806	2005	2001	2001		
0040	05	0805	2006	2002	2002		
1	02	2002	2001	2010	2010		
2	05	0807	2005	2001	2001		
3	05	0805	2007	2002	2002		
4	02	2002	2001	2011	2011		
5	52	0	0	0802	0		
6	00	0314	0	2222	0		
7	05	2222	0	0055	0		
0050	02	7756	7761	2001	2001		
1	16	0053	7501	2001	2001		
2	75	2001	0005	7610	7610		
3	12	0002	0050	2012	2012		
4	00	0	0	0001	0		
5	05	2222	0811	2001	2001		
6	02	7756	2001	2001	2001		
7	16	0061	7501	7610	7610		
0060	05	2001	0005	2015	2015		
1	05	2012	2010	2001	2001		
2	05	2014	2005	2002	2002		
3	05	2002	0812	2002	2002		
4	01	2002	2001	2001	2001		
5	05	2013	2006	2002	2002		
6	05	2002	0810	2002	2002		
7	02	2002	2001	2001	2001		
0070	05	2012	2010	2002	2002		
1	05	2014	2005	2003	2003		
2	01	2003	2002	2002	2002		
3							

Вызов ИС-2  
Перегор число-  
вых данных 10=  
=>2  
Печатать  
N\N\N

a<sub>21</sub>

a<sub>31</sub>

a<sub>51</sub>

a<sub>23</sub>

a<sub>25</sub>

β<sub>0</sub> > β<sub>i</sub> - а.

cos β<sub>i</sub>, i=1,2,3

cos β<sub>5</sub>

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
4	05	2013	2006	2003	2003		
5	02	2008	2002	2002	2002		
6	04	2002	2001	2001	2001		
7	05	2012	2011	2002	2002		
0100	05	2015	2005	2003	2003		
1	05	2008	0818	2008	2008		
2	01	2008	2002	2002	2002		
3	05	2013	2007	2003	2003		
4	05	2003	0810	2003	2003		
5	02	2008	2002	2002	2002		
6	05	2012	2011	2003	2003		
7	05	2015	2005	2004	2004		
0110	05	2013	2007	2004	2004		
1	02	2004	2003	2003	2003		
2	04	2008	2002	2002	2002		
3	02	2001	2002	3000	3000		
4	02	2222	0815	2222	2222		
5	12	0202	0047	0001	0001		
6	00	0	0	0	0		
7	00	0	0	0	0		
0120	03	3000	5801	0	2001		
1	36	0	0125	0	0		
2	01	7761	2001	2001	2001		
3	12	0202	0121	0001	0001		
4	05	2001	0815	2001	2001		
5	02	0814	2001	2016	2016		
6	16	0130	7501	7610	7610		
7	02	2016	0027	2016	2016		
0130	05	2016	7761	2001	2001		
1	16	0135	7501	7610	7610		
2	02	2001	0005	2012	2012		
3	05	2001	0132	0001	0		
4	12	0002	0	0	0		
5	05	2012	2010	2001	2001		
6	05	2014	2005	2002	2002		
7	05	2002	0812	2002	2002		
0140	01	2002	2001	2001	2001		
1	05	2013	2006	2002	2002		
2	05	2002	0310	2002	2002		
3	02	2002	2001	2001	2001		
4	05	2012	2010	2002	2002		
5	05	2014	2005	2003	2003		
6	05	2003	2002	2002	2002		
7	05	2014	2005	2003	2003		
0150							

f (β<sub>i</sub>) см (56.4)  
(β<sub>0</sub>-Δβ) => β<sub>0</sub>

В сечении => 0

β<sub>min</sub>

Печатать β<sub>min</sub>

cos β<sub>i</sub>, i=1,2,3

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
1		01	2008	2002	2002		
2		05	2013	2006	2008		
3		02	2003	2002	2002		
4		04	2002	2001	2017		
5		16	0156	7501	7610		
6		72	2017	0027	2017		
7		02	7761	2017	2001		
0160		05	2001	2012	2001		
1		05	2601	0805	2001		
2		05	0810	2017	2002		
3		02	7761	2002	2602		
4		05	2002	2013	2002		
5		02	2002	2001	2001		
6		04	2005	2001	2020		
7		01	2002	2001	0		
0170		36	0	0205	0		
1		02	7761	2017	2001		
2		05	2001	2012	2001		
3		05	2020	2001	2001		
4		02	0831	2001	2001		
5		04	2001	0826	2021		
6		01	2021	0	0		
7		36	0	0205	0		
0200		44	2021	0	2021		
1		04	0827	2021	2022		
2		16	0203	7501	7610		
3		72	2022	0027	2022		
4		16	0	0207	0		
5		16	0206	7501	7610		
6		72	0	0027	0		
7		05	7765	0833	2001		
0210		05	7765	0836	2002		
1		02	2002	2001	2001		
2		02	0835	2001	2023		
3		02	0834	2023	2001		
4		08	2001	0	2001		
5		05	2001	0816	2001		
6		02	0830	2001	2024		
7		05	2024	0821	2001		
0220		01	2001	2023	2001		
1		05	0832	0820	2002		
2		02	2002	2001	2025		
3		05	2024	2024	2001		
4		05	2001	0823	2001		

$z$  min

Печать  $z$  min

$n D_{1n}^2$

$n D_{1n}^2$

$p$  p/c, МКМ

Печать  $p$  p/c, МКМ

Печать \*0\*

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
5		05	0832	0832	2002		
6		05	2002	0822	2002		
7		02	2001	2002	2001		
0230		05	2023	2024	2002		
1		01	2002	2001	2026		
2		05	0810	2026	2001		
3		05	2001	0817	2001		
4		05	2025	2025	2002		
5		02	2002	2001	2001		
6		01	2001	0	0		
7		36	0	0254	0		
0230		44	2001	0	2001		
1		02	0	2025	2002		
2		02	2002	2001	2001		
3		05	7762	0817	2002		
4		04	2001	2602	2001		
5		01	2001	0	0		
6		36	0	0254	0		
7		44	2001	0	2001		
0250		04	0827	2001	2001		
1		16	0252	7501	7610		
2		72	2001	0027	2001		
3		16	0	0256	0		
4		16	0255	7501	7610		
5		72	0	0027	0		
6		04	0834	0830	2001		
7		02	7761	2001	2001		
0260		05	2001	7762	2001		
1		02	0824	2001	2001		
2		04	2001	0825	2001		
3		01	2001	0	0		
4		36	0	0274	0		
5		44	2001	0	2001		
6		44	0830	0	0830		
7		05	2001	0830	2001		
0270		04	0827	2001	2001		
1		16	0272	7501	7610		
2		72	2001	0027	2001		
3		16	0	0276	0		
4		16	0276	7501	7610		
5		72	0	0027	0		
6		52	0	0	0		
7		00	0837	0	0830		
0800		12	0006	0277	0001		
1		13	0277	1541	0277		
2		00	0	0	0		

$p$  p/c, p

Печать  $p$  p/c, p

Печать \*0\*

$a_1 \Rightarrow a_1$

1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	12	0120	0027	0001	00	78298
4		16	0	1530	+	00	51490
5					+	00	11489
6					+	01	4
7					+	01	5
0810					+	01	9
1					+	02	25
2					+	00	7854231
3					+	02	$\frac{4}{A_5}$
4					+	00	
5					+	02	3
6					+	01	15
7					+	00	16341
0830					+	01	226155
1					+	01	17023
2					+	01	157325
3					+	00	72615
4					+	01	289
5					+	01	139
6					+	01	91797
7					+	00	
0830					+	К	
1					+	а <sub>0</sub>	
2					+	а <sub>1</sub>	
3					+	а <sub>2</sub>	
4					+	а <sub>3</sub>	
5					+	а <sub>4</sub>	
6					+	а <sub>5</sub>	
7					+	а <sub>6</sub>	
0840					+	а <sub>1</sub>	
1					+	а <sub>2</sub>	
1540		17	0	0	0		
1		00	0007	0	0		

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мысленский Д. В., Чижов П. И. — \*Z. Phys.\*<sup>\*</sup>, 1927, 44, 408.
2. Жданов А. П. — \*J. Phys. et Radium.\*<sup>\*</sup>, 1935, 6, 234.
3. Пауэлл С., Фаулер П., Перкинс Д. Исследование элементарных частиц фотографическим методом. М., ИЛ, 1964.
4. Варкас В. Н. — \*Nuclear Research Emulsions\*, 1963, vol. I, N. Y.
5. Каргужанский А. Л. — \*Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр.\*<sup>\*</sup>, 1968, 13, 57.
6. Богомолов К. С., Вахтанова Л. П. — \*Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр.\*<sup>\*</sup>, 1967, 12, 349.
7. Родичева М. Ф. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962, 218.
8. Физика космических лучей (под редакцией Дж. Вайсо-на), т. 2. М., ИЛ, 1956.
9. Бонетти А., Диавора С., Пелл С. Р., Скарелл Л. Ядерные эмульсии. М., Физматгиз, 1961.
10. Успехи научной фотографии, т. 12. М., Наука, 1966.
11. Даныш М., Уекитлей Г. — \*Phil. Mag.\*<sup>\*</sup>, 1951, 42, 1185.
12. Такибаев Ж. С. — \*ЖЭТФ\*, 1953, 24, 238.
13. Жданов А. П., Ермакова С. — \*ДАН СССР\*, 1950, 70, 211.
14. Жданов А. П. — \*J. Phys. et Radium.\*<sup>\*</sup>, 1935, 6, 233.
15. Bernheim A., Doriot G., Fayolle I. C., Vedel I. P., Merand M. — \*Nucl. Instr. and Methods.\*<sup>\*</sup>, 1965, 34, 345.
16. Barbier I. P., Bernheim A., Fayolle I. C., Merand M. — \*Nucl. Instr. and Methods.\*<sup>\*</sup>, 1967, 49, 38.
17. Duff M. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
18. Cox I., Duff M., Townsend L. — \*Nucl. Instr. and Methods.\*<sup>\*</sup>, 1966, 41, 195.
19. Воронков А. Е., Мурын И. Д., Сухов Л. В., Штранг И. В. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962, 309.



20. Belovitsky G. E., Voronkov A. E., Zdanov G. B., Kolesnikova L. N., Marenkov V. S., Sukhov L. V., Solovjeva M. F., Tretyakova M. I., Chernjavskiy M. M. Vth. Int. Conf. on Nucl. Phys., Geneva, CERN, 1964.

21. Воронков А. Е., Жданов Г. В., Сухов Л. В., Солыева М. Ф., Третьякова М. И., Чернявский М. М.—Успехи научн. физ., 1966, 12, 137.

22. Долженский М. М., Рагузин Р. М., Шарыгин Н. В., Федорова Н. Н.—ИТЭ, 1966, 4, 51.

23. Goudsmit S. A., Saunderson J. L.—Phys. Rev., 1940, 57, 24.

24. Goudsmit S. A., Saunderson J. L.—Phys. Rev., 1940, 58, 36.

25. Mollère G.—Z. Naturforsch., 1947, 2a, 133.

26. Fermi E.—Z. Physik, 1928, 48, 73.

27. Scott W. T.—Rev. Mod. Phys., 1963, 35, 231.

28. Majewski M., Tietz T.—Phys. Rev., 1957, 108, 193.

29. Thomas L. H., Umeda K.—J. Chem. Phys., 1957, 26, 293.

30. Williams E. J.—Phys. Rev., 1940, 58, 292.

31. Hofstadter R.—Rev. Mod. Phys., 1956, 28, 214.

32. Oibert S.—Phys. Rev., 1952, 87, 319.

33. Annis M., Bridge H. S., Oibert S.—Phys. Rev., 1953, 89, 1216.

34. Cooper L. N., Kalinwater J.—Phys. Rev., 1955, 97, 492.

35. Тер-Микаэлян М. Л.—ЖЭТФ, 1959, 36, 253.

36. Williams E. J.—Proc. Roy. Soc., 1939, A169, 531.

37. Россен В. Частицы больших энергий. М., Гостехиздат, 1955.

38. Rossi B., Greisen K.—Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 240.

39. Компанеен А. С.—ЖЭТФ, 1945, 15, 235.

40. Mollère G.—Z. Naturforsch., 1948, 3a, 78.

41. Snyder H. S., Scott W. T.—Phys. Rev., 1949, 76, 220.

42. Lewis H. W.—Phys. Rev., 1950, 78, 526.

43. Scott W. T.—Phys. Rev., 1952, 85, 245.

44. Solntseff N.—Nucl. Phys., 1957, 4, 337.

45. Nigam B. P., Sundaresan M. K., Wu T. Y.—Phys. Rev., 1959, 115, 491.

46. Bethe H. A.—Phys. Rev., 1953, 89, 1256.

47. Mukherjee S.—Phys. Rev., 1967, 162, 254.

48. Hanson A. O., Lanzi L. H., Lyman E. M., Scott H. B.—Phys. Rev., 1951, 84, 634.

49. Андреевский А. И., Кузиченский А. А., Лавышев Г. Д.—ЖЭТФ, 1942, 12, 16.

50. Андреевский А. И., Кузиченский А. А., Лавышев Г. Д.—ЖЭТФ, 1943, 6, 279.

51. Voyvodic L., Pickup E.—Phys. Rev., 1952, 85, 91.

52. Berger M. J.—Phys. Rev., 1952, 88, 59.

53. Gottstein K., Menon M. G. K., Mulvey J. H., O'Connell C., Rochat O.—Phil. Mag., 1951, 42, 708.

54. Лурин Ю. Т., Такибаев Ж. С., Часников И. Я.—ИТЭ, 1957, 4, 27.

55. Алиханян А. И., Арутюнов Ф. Р.—ЖЭТФ, 1959, 36, 32.

56. Brisbout F. A., Dahanayake C., Engler A., Fowler P. H., Jones P. B.—Nuovo Cim., 1956, 3, 1400.

57. Biswas S., Prasad N., Mitra I. S.—Proc. Ind. Acad. Sci., 1957, A46, 167.

58. Hossain A., Wotruba M. F., Wataghin A.—Nuovo Cim., 1961, 22, 308, 861.

59. Sod P. M., Ahuja S. D. M.—Ind. J. of Pure. Appl. Phys., 1967, 5, 132.

60. Kamal A. A., Rao G. K., Rao Y. V.—Nuovo Cim., 1964, 32, 863.

61. Yash Pal, Ray A. K.—Nuovo Cim., 1963, 27, 960.

62. Bzoki G., Gombosi E., Jenik L., Nagy E., Szhini M. Vth Int. Conf. on Nucl. Phys., Geneva, CERN, 1964.

63. Wong E., Jain P. L.—Nuovo Cim., 1968, 56a, 922.

64. Fichtel C., Friedlander M. W.—Nuovo Cim., 1958, 10, 1032.

65. Калашников Н. П., Рязанов М. И.—ЖЭТФ, 1964, 47, 1055.

66. Калашников Н. П., Рязанов М. И.—ЖЭТФ, 1966, 50, 117.

67. Fowler P. H.—Phil. Mag., 1950, 41, 169.

68. Mollère G.—Z. Naturforsch., 1955, 10a, 177.

69. Moual J. E.—Phil. Mag., 1950, 41, 1058.

70. D'Espagnat B.—Compt. Rend., 1951, 232, 800.

71. D'Espagnat B.—J. Phys. et Radium., 1952, 13, 74.

72. Schonland D. S.—Proc. Phys. Soc., 1952, A65, 640.

73. Johnston R. H. W.—Nuovo Cim. Suppl., 1956, 4, 456.

74. Biswas S., Georg E. C., Swamy M. S.—Nuovo Cim. Suppl., 1954, 12, 361.

75. Турсунов Р. А., Часников И. Я., Шаранов К. В. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962.

76. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.

77. Яношик Л. Теория и практика обработки результатов измерений. М., Мир, 1965.

78. Волнов В. Г., Часников И. Я.—Изв. АН КазССР, серия физ.-мат., 1967, 4, 3.

79. Kiraly P. VI Int. Conf. on Nucl. Phys., Florence, 1966.

80. Biswas S., Peters B., Rama B.—Proc. Ind. Acad. Sci., 1955, A41, 154.

81. Экспонг А. Г.—Arkiv Fysik., 1954, 9, 49.

82. Скрида Н. В.—Ж. научн. и прикл. физ. и кинематоп., 1967, 12, 12.

83. Ваксенберг А. О., Смирнитский В. А., Рабин Н. В.—ИТЭ, 1957, 2, 112.

84. Беловицкий Г. Е., Голюбин В. Н., Сухов Л. В.—*ИТЭ*, 1956, 1, 102.  
85. Часников И. Я. Материалы совещания по методике рентгеновских фотомультипликаторов. Дубна, ОИЯИ, 1957.  
86. Такибаев Ж. С., Шахворостов В. Н.—ЖЭТФ, 1954, 26, 507.  
87. Gottstein K.—*Nuovo Cim. Suppl.*, 1954, 12, 619.  
88. Greiner D. E. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
89. Déraux B.—*Ann. de Phys.*, 1961, 6, 86.  
90. Déraux B., Tsai-Chu.—*Compt. Rend.*, 1959, 249, 2187.  
91. Воинов В. Г.—Изв. АН КазССР, серия физ.-мат., 1968, 4, 61.  
92. Dentan I. P. 2nd Int. Conf. on Nucl. Phot. Montreal, 1959.  
93. Крекер U. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
94. Barkas W. H., Smith F. M., Birnbaum W.—*Phys. Rev.*, 1955, 98, 605.  
95. Apostolakis A. J., Major J. V.—*Brit. J. Appl. Phys.*, 1957, 8, 9.  
96. Такинов А. Ш., Избасаров М., Стрельцов И. С., Такибаев Ж. С., Часников И. Я.—*ИТЭ*, 1966, 3, 54.  
97. Debenedetti A., Garelli C. N., Tallone L., Vigore M.—*Nuovo Cim.*, 1956, 4, 1142.  
98. Часников И. Я., Такибаев Ж. С., Боос Э. Г.—*ИТЭ*, 1959, 1, 54.  
99. Dahl-Jensen E. *Korpuskularphotographie*, IV. München, 1963.  
100. Акопова А. Б., Меркурян Л. В., Саарман А. Г.—*Ж. научн. и прикл. фотопр. и кинематогр.*, 1967, 12, 266.  
101. Fay H.—*Z. Naturforsch.*, 1955, 10a, 572.  
102. Lohrman E., Teucher M.—*Nuovo Cim.*, 1956, 3, 58.  
103. Apostolakis A. J., Clarke J. O., Major J. V.—*Nuovo Cim.*, 1957, 5, 337.  
104. Fisher F. W., Lord J. J.—*Nuovo Cim.*, 1959, 7, 44.  
105. Часников И. Я., Такибаев Ж. С., Турсузов Р. А., Шаронов К. В.—*ИТЭ*, 1960, 5, 15.  
106. Сажокович Д. М., Вайсенберг А. О., Колчанова Э. Д., Песочная Е. А., Смирницкий В. А. *Ядерная фотография*. М., Изд-во АН СССР, 1962.  
107. Акопова А. Б.—*ИТЭ*, 1964, 2, 64.  
108. Жюлек В. *Ядерная фотография*. М., Изд-во АН СССР, 1962.  
109. Lavakare P. J., Sudarshan E. C. G.—*Nuovo Cim. Suppl.*, 1962, 26, 251.  
110. Lagiaux J. P., Renard P.—*Bull. Centre Phys. Nucleaire Univ. Libre Bruxelles.*, 1962, 3, 12.  
111. Nazzari-Chiesa A., Waterghin A.—*Nuovo Cim. Suppl.*, 1962, 26, 270.  
112. Venkateswar Rao V., Kamal A. A. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
113. Шаронов К. В., Турсунов Р. А., Такибаев Ж. С., Боос Э. Г.—Изв. АН КазССР, серия физ.-мат., 1963, 2, 94.  
114. Aditya R. K., Bhattacharya S., Sood P. M.—*Nuovo Cim.*, 1963, 29, 577.  
115. Rao G. K., Kamal A. A. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
116. Ван-Шу-Фенг, Даджаев Н., Дебердеев Р. М., Стрельцов И. С. *Препринт ОИЯИ, P-523*, Дубна, 1960.  
117. Jones J. J., Kalbach R. M.—*Nuovo Cim.*, 1964, 31, 10.  
118. Мальцева В. А., Богомолов К. С., Дебердеев Р. М., Ю. *Препринт ОИЯИ, 3501*, Дубна, 1967.  
119. Богомолов К. С., Воинов В. Г., Мальцева В. А., Часников И. Я. *Препринт ОИЯИ, 1—3974*, Дубна, 1968.  
120. Часников И. Я., Ананов В. В., Такибаев Ж. С., Стрельцов И. С.—ЖЭТФ, 1963, 45, 29.  
121. Часников И. Я.—Труды ИФФ АН КазССР, 1960, 3, 64.  
122. Kalaschnikov N. P.—*Nuovo Cim.*, 1966, 45a, 510.  
123. Jánoszy L., Lee A., Rózsa P.—*Nuovo Cim. Suppl.*, 1965, 3, 281.  
124. Баранов В. Н.—*ИТЭ*, 1967, 1.  
125. Баранов В. Н.—*ИТЭ*, 1968, 4, 219.  
126. Fowler P. H., Waddington C. S.—*Phil. Mag.*, 1956, 1, 637.  
127. Fenyes E., Gombosi E., Jánoszy L., Király P., Lee A., Rózsa P. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
128. Fenyes E., Gombosi E., Király P.—*Nuovo Cim. Suppl.*, 1965, 3, 297.  
129. Jánoszy L.—*Acta Phys. Hung.*, 1957, 7, 385.  
130. Худенко Д. *Справочник для физиков*. М., Мир, 1967.  
131. Jánoszy L., Rózsa P.—*Nuovo Cim.*, 1961, 19, 817.  
132. Koshiba M., Kaplan M. F.—*Phys. Rev.*, 1965, 97, 11.  
133. Friedlander E. M., Marcu M., Friedlander J. *Vth Int. Conf. on Nucl. Phot.* Geneva, CERN, 1964.  
134. Paton G., Khan M. R.—*Compt. Rend.*, 1967, 264, 1276.  
135. Агостеро Э., Фриджекер Э.—*ИТЭ*, 1959, 6, 39.  
136. Лодова М., Тучек И. *Препринт ОИЯИ, 1—3974*, Дубна, 1968.  
137. Lipkin H. J., Rosendorff S., Yekutieli G.—*Nuovo Cim.*, 1955, 2, 1015.  
138

138. Lipkin H. J., Rosendorff S., Yekutieli G. — «Bull. Research Council Israel», 1955, 5n, 88.  
 139. Dado S., Rosendorff S. — «Nuovo Cim.», 1967, 50b, 238.  
 140. Cosyus M. G. E. — «Bull. Centre Phys. Nucléaire Univ. Libre Bruxelles», 1951, 30, 1.  
 141. Berger M. J., Lord J. J., Shein M. — «Phys. Rev.», 1951, 83, 850.  
 142. Menon M. G. K., O'Connelligh C., Rochat O. — «Phil. Mag.», 1951, 42, 932.  
 143. Agnese A., Paoli G., Scotto M., Wataghin A. — «Acta Phys. Hung.», 1968, 25, 71.  
 144. Бозоки Д., Гомбоши Е. — ПТЭ, 1963, 6, 61.  
 145. Chamei B., Tsai-Chu. — «Compt. Rend.», 1959, 249, 1494.  
 146. Sood P. M., Chohan V. S. Vth Int. Conf. on Nucl. Phys. Geneva, CERN, 1964.  
 147. Aditya P. K. — «Nuovo Cim.», 1964, 31, 473.  
 148. Aditya P. K. — «Ind. J. Phys.», 1966, 40, 238.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	3
Глава I. Метод ядерных фотографических эмulsion	5
§ 1. Толстослойные ядерные фотографические эмulsion	6
§ 2. Примущества и недостатки фотометода	7
§ 3. Приборы для измерения многократного рассеяния	10
Глава II. Теория многократного кулоновского рассеяния	13
§ 1. Сечение упругого кулоновского рассеяния	19
§ 2. Многократное кулоновское рассеяние	—
§ 3. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию	30
§ 4. Корреляционные свойства вторых разностей координат	38
Глава III. Шум, дистрибуци и ложное рассеяние	48
§ 1. Шум	57
§ 2. Дистрибуци	65
§ 3. Ложное рассеяние	—
Глава IV. Методы исключения ложного и оценки кулоновского рассеяния	78
§ 1. Статистическое испытание ложного рассеяния	—
§ 2. Метод кратных ячеек	79
§ 3. Оценка кулоновского рассеяния с помощью параметра $\rho$	81
§ 4. Метод максимального правдоподобия	83
§ 5. Метод корреляционных моментов	94
§ 6. Метод относительного рассеяния	100
Глава V. Постоянная многократного кулоновского рассеяния	104
§ 1. Расчет	109
§ 2. Экспериментальные значения	117
Заключение	119
Литература	125

4Br  
50r  
11b  
19r  
4P1  
A.  
24r  
Pb

ВАСИЛИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ВОИНОВ,  
ИВАН ЯКОЛЕВИЧ ЧАСНИКОВ

**МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ  
В ЯДЕРНЫХ ФОТОЭМУЛЬСИЯХ**

*Утверждено к печати Ученым советом Института  
ядерной физики Академии наук Казахской ССР*

Редактор С. Е. Цыганова  
Худож. редактор Н. Д. Сулиц  
Обложка художника А. С. Воробьева  
Техн. редактор Я. Н. Шанкина  
Корректор М. С. Турсова

\*\*\*

Сдано в набор 2/IV 1989 г. Подписано к печати 18/VII 1989 г.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага № 2. Печ. л. 8,25.  
Уч.-изд. л. 9. Тираж 1480. УТ02861.  
Цена 1 р. 10 к.

\*\*\*

Типография издательства «Наука», г. Алма-Ата, ул. Шенгелто, 28  
Зак. 46.