



НОВЫЕ ИДЕИ  
В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

**В.И. Арнольд**

# **Теория катастроф**



Серия

**НОВЫЕ**

**ИДЕИ**

**В ЕСТЕСТВО-**

**ЗНАНИИ**

**В. И. Арнольд**

---

**Теория  
катастроф**

---

Издание второе,  
дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
1983



Арнольд В. И. Теория катастроф. — 2-е изд., доп. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 80 с. — (Новые идеи в естествознании).

Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Источниками теории катастроф являются теория особенностей гладких отображений и теория бифуркаций динамических систем. Их применения к конкретным задачам в разных областях науки вызвали много споров.

В брошюре (1-е издание вышло в 1981 г. в издательстве «Знание») рассказывается о том, что же такое теория катастроф и почему она вызывает такие споры.

Для научных работников, преподавателей, студентов и всех, кто интересуется современной математикой.

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ АРНОЛЬД  
ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ

---

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*  
Редактор *А. А. Локшин*  
Художник *О. А. Виноградов*  
Художественный редактор *Б. С. Вехтер*  
Мл. редактор *О. Е. Силантьева*  
Технический редактор *З. С. Кондрашова*  
Корректор *Л. С. Клочкова*

---

Тематический план 1983 г. № 73. ИБ № 1610. Сдано в набор 29.03.83. Подписано к печати 12.07.83. Л-95399. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип. № 3. Гарнитура Литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 4,20. Уч.-изд. л. 4,05. Тираж 28 000 экз. Заказ 71. Цена 10 коп. Изд. № 3028. Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета, 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

А  $\frac{1702040000-146}{077(02)-83}$  73-83

© Издательство «Знание», 1981 г.  
© Издательство Московского университета, 1983 г.  
с изменениями

1983 г.



**Особенности,  
бифуркации и катастрофы**

Первые сведения о теории катастроф появились в западной печати лет десять назад. В журналах типа «Ньюс уик» сообщалось о перевороте в математике, сравнимом разве что с изобретением Ньютоном дифференциального и интегрального исчисления. Утверждалось, что новая наука — теория катастроф — для человечества гораздо ценнее, чем математический анализ: в то время как ньютоновская теория позволяет исследовать лишь плавные, непрерывные процессы, теория катастроф дает универсальный метод исследования всех скачкообразных переходов, разрывов, внезапных качественных изменений. Появились сотни научных и околонучных публикаций, в которых теория катастроф применяется к столь разнообразным объектам, как например, исследования биения сердца, геометрическая и физическая оптика, эмбриология, лингвистика, экспериментальная психология, экономика, гидродинамика, геология и теория элементарных частиц. Среди опубликованных работ по теории катастроф есть исследования устойчивости кораблей, моделирования деятельности мозга и психических расстройств, восстаний заключенных в тюрьмах, поведения биржевых игроков, влияния алкоголя на водителей транспортных средств, политики цензуры по отношению к эротической литературе.

В начале семидесятых годов теория катастроф быстро сделалась модной, широко рекламируемой теорией, напоминающей универсальностью своих претензий псевдонаучные теории прошлого века.

Математические статьи основоположника теории катастроф Р. Тома были переизданы массовым тиражом в карманной серии — событие, которого не было в математическом мире со времени возникновения кибернетики, у которой теория катастроф заимствовала многие приемы саморекламы.



Вслед за панегириками теории катастроф появились и более трезвые критические работы; некоторые из них также печатались в рассчитанных на широкого читателя изданиях под красноречивыми названиями вроде «А король-то голый». Сейчас имеется уже много статей, специально посвященных критике теории катастроф. (См., например, обзор Дж. Гуккенхеймера «Споры о катастрофах» и пародию на критику теории катастроф. \*)

Источниками теории катастроф являются теория особенностей гладких отображений Уитни и теория бифуркаций динамических систем Пуанкаре и Андронова.

*Теория особенностей* — это грандиозное обобщение исследования функций на максимум и минимум. В теории Уитни функции заменены отображениями, т. е. наборами нескольких функций нескольких переменных.

Слово «*бифуркация*» означает *раздвоение* и употребляется в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят.

*Катастрофами* называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Чтобы понять, что такое теория катастроф, нужно вначале познакомиться с элементами теории особенностей Уитни.

---

## 2.

---

### Теория особенностей Х. Уитни

В 1955 году американский математик Хаслер Уитни опубликовал работу «Об отображениях плоскости на плоскость», заложившую ос-

---

\* Guckenheimer T. The catastrophe Controversy. — The Mathematical Intelligencer, 1978, v. 1, N 1, p. 15—21; Fussbudeget H. T., Znasber R. S. Sagacity Theory: A Critique, loc. cit., 1979, v. 2, N 1, p. 56—59.



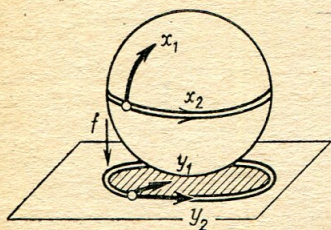


Рис.1

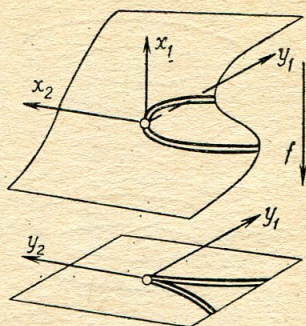


Рис.2

нову новой математической теории — теории особенностей гладких отображений.

Отображение поверхности на плоскость — это сопоставление каждой точке поверхности точки плоскости. Если точка поверхности задана координатами  $(x_1, x_2)$  на поверхности, а точка плоскости координатами  $(y_1, y_2)$  на плоскости, то отображение задается парой функций  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ . Отображение называется *гладким*, если эти функции гладкие (т. е. дифференцируемые достаточное число раз, например многочлены).

Отображения гладких поверхностей на плоскость окружают нас со всех сторон. Действительно, большинство окружающих нас тел ограничено гладкими поверхностями. Видимые контуры тел — это проекции ограничивающих тела поверхностей на сетчатку глаза. Приглядываясь к окружающим нас телам, например к лицам людей, мы можем изучить особенности видимых контуров.

Уитни заметил, что в случаях «общего положения»\* встречаются особенности лишь двух видов. Все другие особенности разрушаются при малом шевелении тел или направлений проектирования, в то время как особенности этих двух видов устойчивы

\* Т. е. для всех случаев, кроме некоторых исключительных.





Рис. 3



Рис. 4

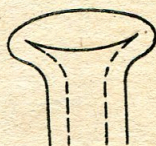


Рис. 5

и сохраняются при малых деформациях отображения.

Примером особенности первого вида — Уитни назвал ее *складкой* — является особенность, возникающая при проектировании сферы на плоскость в точках экватора (рис. 1). В подходящих координатах это отображение задается формулами  $y_1 = x_1^2$ ,  $y_2 = x_2$ . Проектирования поверхностей гладких тел на сетчатку в общих точках имеют именно такую особенность, и тут нет ничего удивительного. Удивительно то, что, кроме этой особенности — складки, мы всюду встречаем еще ровно одну особенность, но практически никогда ее не замечаем.

Эта вторая особенность названа Уитни *сборкой*, и получается она при проектировании на плоскость поверхности, изображенной на рис. 2. Эта поверхность задана формулой  $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$  в пространстве с координатами  $(x_1, x_2, y_1)$  и проектируется на горизонтальную плоскость  $(x_2, y_1)$ .

Таким образом, отображение задается в локальных координатах формулами  $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ ,  $y_2 = x_2$ .

На горизонтальной плоскости-проекции выделяется *полукубическая парабола* с точкой возврата (острием) в начале координат. Эта кривая делит горизонтальную плоскость на две части: меньшую и большую. Точки меньшей части имеют по три прообраза (в них проектируется три точки поверхности), точки большей части — лишь по одному, точки кривой — по два. При подходе к кривой из меньшей части два



прообраза (из трех) сливаются и исчезают (в этом месте особенность — складка), при подходе к острию сливаются все три прообраза.

Уитни доказал, что сборка *устойчива*, т. е. всякое близкое отображение имеет в подходящей близкой точке подобную же особенность (т. е. такую особенность, что продеформированное отображение в подходящих координатах в окрестности указанной точки записывается теми же формулами, какими записывалось исходное отображение в окрестности исходной точки). Уитни также доказал, что *всякая особенность гладкого отображения поверхности на плоскость после подходящего малого шевеления рассыпается на складки и сборки*.

Таким образом, видимые контуры гладких тел общего положения имеют точки возврата в местах, где проектирования имеют сборки и не имеют других особенностей: приглядевшись, мы можем найти эти точки возврата в чертах каждого лица или тела. Рассмотрим, например, поверхность гладкого тора (скажем, надутой шины). Тор обычно рисуют так, как это изображено на рис. 3. Если бы тор был прозрачным, мы увидели бы видимый контур, изображенный на рис. 4: соответствующее отображение тора на плоскость имеет четыре сборки. Таким образом, концы линии видимого контура на рис. 3 — это точки возврата, в этих точках линия видимого контура имеет полукубическую особенность.

Прозрачный тор редко где увидишь. Рассмотрим другое прозрачное тело — бутылку (предпочтительно из-под молока). На рис. 5 видны две точки сборки. Покачивая бутылку, мы можем убедиться, что сборка устойчива. Тем самым мы получаем убедительное экспериментальное подтверждение теоремы Уитни.

После основополагающей работы Уитни теория особенностей бурно развивалась, и сейчас это одна из центральных областей математики, в которой перекрещиваются пути, связывающие самые абстрактные разделы математики (дифференциальную и алгебраическую геометрию и топологию, теорию групп, порожденных отражениями, коммутативную алгебру, теорию комплексных пространств и т. д.) с самыми прикладными (теория устойчивости дви-



жения динамических систем, теория бифуркаций положений равновесия, геометрическая и волновая оптика и т. д.). Р. Том предложил называть совокупность теории особенностей и ее приложений теорией катастроф.

---

### 3.

---

#### **Применения теории Уитни**

Поскольку гладкие отображения встречаются повсеместно, повсюду должны встречаться и их особенности. А поскольку теория Уитни дает значительную информацию об особенностях отображений общего положения, можно попытаться использовать эту информацию для изучения большого количества разнообразных явлений и процессов во всех областях естествознания. В этой простой идее и состоит вся сущность теории катастроф.

В случае, когда отображение, о котором идет речь, достаточно хорошо известно, имеется в виду более или менее прямое применение математической теории особенностей к различным явлениям природы. Такое применение действительно приводит к полезным результатам, например в теории упругости и в геометрической оптике (теория особенностей каустик и волновых фронтов, о которых мы еще будем говорить дальше).

Однако в большинстве работ по теории катастроф речь идет о куда более спорной ситуации, когда не только неизвестно изучаемое отображение, но и само его существование весьма проблематично.

Приложения теории особенностей в этих ситуациях носят характер спекуляций; чтобы дать о них представление, мы воспроизводим принадлежащий английскому математику К. Зиману пример спекулятивного применения теории Уитни к исследованию деятельности творческой личности\*.

---

\* Zeeman E. C. Catastrophe theory: a reply to Thom. — In: Dynamical Systems, Warwick, 1974. Lecture Notes in Math., 468, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, p. 373.



Будем характеризовать творческую личность (например, ученого) тремя параметрами, называемыми «техника», «увлеченность», «достижения». По-видимому, между этими параметрами должна быть зависимость. Тем самым возникает поверхность в трехмерном пространстве с координатами (Т, У, Д).

Спроектируем эту поверхность на плоскость (Т, У) вдоль оси Д. Для поверхности общего положения особенности — складки и сборки (по теореме Уитни). Утверждается, что сборка, расположенная так, как это изображено на рис. 6, удовлетворительно описывает наблюдаемые явления.

Действительно, посмотрим, как в этих предположениях будут меняться достижения ученого в зависимости от его техники и увлеченности. Если увлеченность невелика, то достижения монотонно и довольно медленно растут с техникой. Если увлеченность достаточно велика, то наступают качественно новые явления. В этом случае достижения с ростом техники могут расти скачком (такой скачок будет, например, если техника и увлеченность меняются вдоль кривой 1 на рис. 6 в точке 2). Область высоких достижений, в которую мы при этом попадаем, обозначена на рис. 6 словом «гений».

С другой стороны, рост увлеченности, не подкрепленный соответствующим ростом техники, приводит к катастрофе (на кривой 3 в точке 4, рис. 6), при которой достижения скачком падают, и мы попадаем в область, обозначенную на рис. 6 словом «маньяки». Поучительно, что скачки из состояния «гений» в состояние «маньяк» и обратно происходят на разных линиях, так что при достаточно большой увлеченности гений и маньяк могут иметь равные увлеченности и техники, различаясь лишь достижениями (и предисторией).

Недостатки описанной модели и множества ана-

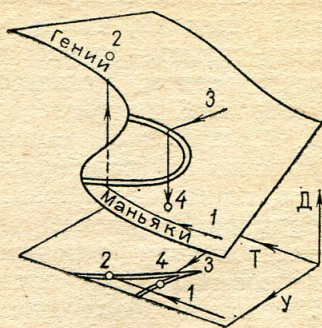


Рис. 6



логичных ей спекуляций в теории катастроф слишком очевидны, чтобы о них говорить подробно. Отмечу только, что работы по теории катастроф отличаются резкое, катастрофическое снижение уровня требований к строгости, а также к новизне публикуемых результатов. Если первое можно понять как реакцию на традиционный в математике поток строгих, но малоинтересных, эпигонских работ, то небрежное отношение катастрофистов к своим предшественникам (которым и принадлежит большинство конкретных результатов) вряд ли можно оправдать. Причина в обоих случаях скорее социальная, чем научная\*.

---

#### 4.

---

### Машина катастроф

В отличие от описанного выше примера, применения теории особенностей к исследованию бифуркаций положений равновесия в теории упругости безупречно обоснованы.

Во многих упругих конструкциях при одинаковых внешних нагрузках возможно несколько положений равновесия. Рассмотрим, например, горизонтальную линейку, концы которой шарнирно закреплены, нагруженную весом стоящего на середине линейки груза.

Наряду с положением равновесия, при котором линейка прогнута грузом, возможно также положение, при котором линейка выгнута дугой вверх, наподобие моста.

При увеличении груза в некоторый момент происходит «катастрофа» или «хлопок»: линейка скачком переходит из одного состояния в другое. Теория особенностей применима к изучению таких хлопков, и ее предсказания прекрасно оправдываются в экспериментах.

---

\* «Я так думаю, голубушка, что декадентство это самое не что иное, как просто к купечеству подход». — В. М. Дорошевич. Рассказы и очерки. М., 1966, с. 295.



Для наглядной иллюстрации применений этого рода изобретен ряд приспособлений: одно из простейших, называемое *машиной катастроф* Зимана, изображено на рис. 7.

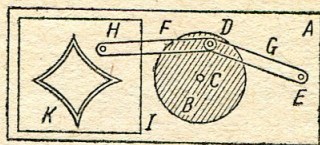


Рис. 7

Машину катастроф каждый может легко изготовить сам. Для этого нужно взять доску (A) (см. рис. 7) и, вырезав из картона диск (B), прикрепить его иглой в центре (C) к доске так, чтобы он мог свободно вращаться. Другая игла (D) втыкается только в диск на его краю, а третья (E) — только в доску. Чтобы закончить сборку машины, нужно еще две ленты из легко растяжимой резины (F, G), карандаш (H) и лист бумаги (I).

После того как игла на краю диска соединена с неподвижной иглой и с карандашом резинками, мы ставим острие карандаша в некоторой точке на листе бумаги и тем натягиваем резинки. Диск устанавливается в некотором положении. Теперь при движении острия карандаша диск будет поворачиваться. Оказывается, при некоторых положениях острия карандаша малое изменение его положения способно вызвать «катастрофу», т. е. скачок диска в новое положение. Если отметить на листе бумаги места всех таких «катастроф», то получается «кривая катастроф» (K).

Оказывается, что полученная кривая катастроф сама имеет четыре точки возврата. При пересечении кривой катастроф скачок может происходить, а может и не происходить в зависимости от того, по какому пути острие карандаша обходило точки возврата кривой катастроф.

Экспериментируя с этой машиной и пытаясь найти правило, определяющее, будет ли скачок, читатель легко убедится в необходимости математической теории явления и сможет лучше оценить вклад теории особенностей в его объяснение.

Состояние машины катастроф описывается тремя числами. Действительно, положение острия карандаша задается двумя координатами (они называются



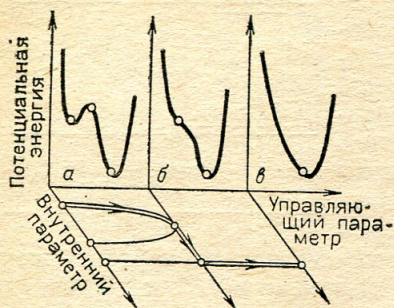


Рис. 8

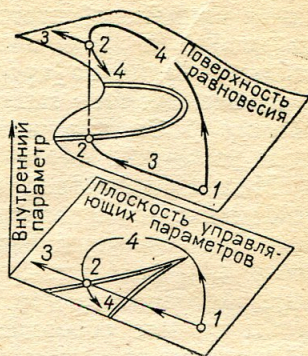


Рис. 9

управляющими параметрами). Положение диска определяется еще одним числом (углом поворота), называемым также *внутренним параметром* системы. Если все три числа заданы, то определены степени растяжения резинок и, следовательно, определена потенциальная энергия всей системы. Диск поворачивается так, чтобы эту энергию минимизировать (по меньшей мере локально). При фиксированном положении карандаша потенциальная энергия — функция от положения диска, т. е. функция, заданная на окружности. Эта функция может иметь в зависимости от значений управляющих параметров один или несколько минимумов (рис. 8, а). Если при изменении управляющих параметров положение минимума меняется плавно, то скачка не происходит. Скачок происходит при тех значениях управляющих параметров, для которых локальный минимум исчезает, слившись с локальным максимумом (рис. 8, б); после скачка диск оказывается в положении, отвечающем другому локальному минимуму (рис. 8, в).

Рассмотрим трехмерное *пространство состояний* машины. Состояния, при которых диск находится в равновесии, образуют в этом пространстве гладкую поверхность. Будем проектировать эту поверхность на плоскость управляющих параметров вдоль оси внутреннего параметра (рис. 9). Это проектирование



имеет складки и сборки. Проекция точек складок и есть кривая катастроф. На рис. 9 ясно видно, почему переход управляющих параметров через линию катастроф иногда вызывает, а иногда не вызывает скачок (это зависит от того, какой части нашей поверхности отвечает положение диска). Пользуясь этим рисунком, можно переходить с одного места поверхности равновесий на другое без скачков.

Схема большинства применений теории катастроф такая же, как в описанных примерах. Предполагается, что изучаемый процесс описывается при помощи некоторого числа управляющих и внутренних параметров. Состояния равновесия процесса образуют поверхность того или иного числа измерений в этом пространстве. Проекция поверхности равновесий на плоскость управляющих параметров может иметь особенности. Предполагается, что это — особенности общего положения. В таком случае теория особенностей предсказывает геометрию «катастроф», т. е. перескоков из одного состояния равновесия в другое при изменении управляющих параметров. В большинстве серьезных приложений особенность — это сборка Уитни, а результат был известен до провозглашения теории катастроф.

Приложения описанного типа бывают более или менее обоснованными в зависимости от степени обоснованности исходных посылок. Например, в теории хлопков упругих конструкций и в теории опрокидывания кораблей предсказания теории полностью подтверждаются экспериментом. С другой стороны, в биологии, психологии и социальных науках (скажем, в приложениях к теории поведения биржевых игроков или к изучению нервных болезней) как исходные предпосылки, так и выводы имеют скорее эвристическое значение.

---

## 5.

---

### **Бифуркации положений равновесия**

*Эволюционный процесс* математически описывается векторным полем в фазовом пространстве. Точка фазового пространства задает





Рис. 11

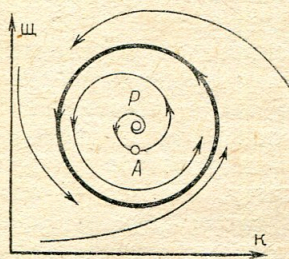


Рис. 10

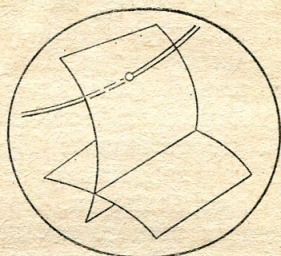


Рис. 12

состояние системы. Приложенный в этой точке вектор указывает скорость изменения состояния.

В некоторых точках вектор может обращаться в нуль. Такие точки называются *положениями равновесия* (состояние не меняется с течением времени). На рис. 10 изображено фазовое пространство системы, описывающей взаимоотношение хищника и жертвы (скажем, щук и карасей). Фазовое пространство — положительный квадрант плоскости. По оси абсцисс отложено число карасей, по оси ординат — щук.  $P$  — положение равновесия. Точка  $A$  соответствует равновесному количеству карасей при количестве щук, меньшем равновесного. Видно, что с течением времени в системе устанавливаются колебания; равновесное состояние рис. 10 *неустойчиво*. Установившиеся колебания изображаются замкнутой кривой на фазовой плоскости. Эта кривая называется *предельным циклом*.

Кривые в фазовом пространстве, образованные последовательными состояниями процесса, называются *фазовыми кривыми*. В окрестности точки, не яв-



ляющейся положением равновесия, разбиение фазового пространства на фазовые кривые устроено так же, как разбиение на параллельные прямые: семейство фазовых кривых можно превратить в семейство параллельных прямых гладкой заменой координат. В окрестности положения равновесия картина сложнее. Как показал еще А. Пуанкаре, поведение фазовых кривых в окрестности положения равновесия на фазовой плоскости в системе общего положения такое, как изображено на рис. 11. Все более сложные случаи превращаются в указанные при общем малом изменении системы.

Системы, описывающие реальные эволюционные процессы, как правило, общего положения. Действительно, такая система всегда зависит от параметров, которые никогда не бывают известны точно. Малое общее изменение параметров превращает систему необщего положения в систему общего положения.

Таким образом, все более сложные, чем указанные выше, случаи, вообще говоря, не должны встречаться в природе, и их на первый взгляд можно не рассматривать. Эта точка зрения обесценивает большую часть теории дифференциальных уравнений и вообще математического анализа, где традиционно основное внимание уделяется малоценным, но трудным для исследования случаям не общего положения.

Дело, однако, обстоит совсем иначе, если нас интересует не индивидуальная система, а система, зависящая от одного или нескольких параметров. Действительно, рассмотрим *пространство всех систем* (рис. 12), разделенное на области, образованные системами общего положения. Поверхности раздела отвечают вырожденным системам; при малом изменении параметров вырожденная система становится невырожденной. Однопараметрическое семейство систем изображается на рис. 12 кривой. Эта кривая может трансверсально (под ненулевым углом) пересекать границу раздела разных областей невырожденных систем.

Таким образом, хотя при каждом индивидуальном значении параметра систему малым шевелением можно превратить в невырожденную, этого нельзя сделать одновременно при всех значениях параметра.



ра: всякая кривая, близкая к рассматриваемой, пересекает границу раздела при близком значении параметра (вырождение, устраненное малым шевелением при данном значении параметра, вновь возникает при некотором близком значении).

Итак, *вырожденные случаи неустранимы, если рассматривается не индивидуальная система, а целое семейство*. Если семейство однопараметрическое, то неустранимы лишь простейшие вырождения, изображаемые границами коразмерности один (т. е. задающимися одним уравнением) в пространстве всех систем. От более сложных вырожденных систем, образующих множество коразмерности два в пространстве всех систем, можно избавиться малым шевелением однопараметрического семейства.

Если мы интересуемся *двупараметрическим семейством*, то можно не рассматривать вырожденных систем, образующих множество коразмерности 3, и т. д.

Тем самым возникает *иерархия вырождений* по коразмерностям и *стратегия* их исследования: вначале следует изучать случаи общего положения, затем вырождения коразмерности один, затем два и т. д. При этом *исследование вырожденных систем не должно ограничиваться изучением картины в момент вырождения, но должно включать описание перестроек, происходящих, когда параметр, меняясь, проходит через вырожденное значение*.

Изложенные выше общие соображения принадлежат А. Пуанкаре и применимы не только к исследованию положений равновесия эволюционных систем, но к большей части всего математического анализа. Хотя они были высказаны уже сто лет назад, успехи в реализации намеченной Пуанкаре программы теории бифуркаций остаются в большинстве областей анализа довольно скромными, отчасти в силу больших математических трудностей, отчасти же вследствие психологической инерции и засилья аксиоматико-алгебраического стиля.

Вернемся, однако, к положениям равновесия эволюционных систем. К настоящему времени решенным можно считать лишь вопрос о перестройках фазовых кривых при бифуркациях положений равновесия в *однопараметрических* семействах общего поло-



жения; уже случай *двух* параметров выходит за рамки возможностей сегодняшней науки.

Результаты исследования общего однопараметрического семейства суммированы на рис. 13—18. На рис. 13 изображено однопараметрическое семейство эволюционных процессов с одномерным фазовым пространством (по оси абсцисс отложено значение параметра  $\epsilon$ , по оси ординат — состояние процесса  $x$ ).

Для однопараметрического семейства общего положения равновесия при всевозможных значениях параметра образуют гладкую кривую ( $\Gamma$  на рис. 13, в более общем случае размерность многообразия состояний равновесия равна числу параметров). В частности, это означает, что изображенные на рис. 14 слева бифуркации в семействе общего положения не встречаются: при малом изменении семейства  $\Gamma$  превращается в гладкую кривую одного из изображенных на рис. 14 справа типов.

Проектирование кривой  $\Gamma$  на ось значений параметра в случае однопараметрического семейства имеет лишь особенности типа складки (при большем числе параметров появляются и более сложные особенности теории Уитни: например, в общих двухпараметрических семействах проектирование поверхности равновесий  $\Gamma$  на плоскость значений параметров может иметь точки сборки, где сливаются три положения равновесия).

Таким образом, при изменении параметра выделяются особые или бифуркационные значения параметра (критические значения проекции  $a, b, c, d$  на рис. 13). Вне этих значений положения равновесия

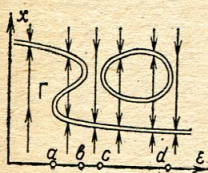


Рис. 13

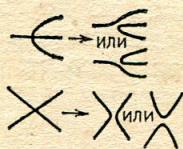


Рис. 14

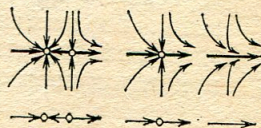


Рис. 15



гладко зависят от параметров. При подходе параметра к бифуркационному значению положение равновесия «умирает», слившись с другим (или же «из воздуха» рождается пара положений равновесия).

Из двух рождающихся (или умирающих) вместе положений равновесия одно устойчиво, другое неустойчиво.

В момент рождения (или смерти) оба положения равновесия движутся с бесконечной скоростью: когда значение параметра отличается от бифуркационного на  $\varepsilon$ , оба близких положения равновесия удалены друг от друга на расстояние порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

На рис. 15 изображена перестройка семейства фазовых кривых на плоскости в общем однопараметрическом семействе. Устойчивое положение равновесия («узел») сталкивается при изменении параметра с неустойчивым («седлом»), после чего оба исчезают. В момент слияния на фазовой плоскости наблюдается картина необщего положения («седло — узел»).

На рис. 15 видно, что перестройка, в сущности, одномерная: вдоль оси абсцисс происходят те же явления, что на оси  $x$  на рис. 13, а вдоль оси ординат перестройки нет вовсе. Таким образом, перестройка через седло — узел получается из одномерной перестройки «надстраиванием» оси ординат. Оказывается, вообще все перестройки положений равновесия в общих однопараметрических системах получаются из одномерных перестроек аналогичным надстраиванием.

Если устойчивое положение равновесия описывает установившийся режим в какой-либо реальной системе (скажем, экономической, экологической или химической), то при его слиянии с неустойчивым положением равновесия система должна совершить скачок, перескочив на совершенно другой режим: при изменении параметра равновесное состояние в рассматриваемой окрестности исчезает. Скачки этого рода и привели к термину «теория катастроф».



## Потеря устойчивости равновесных и автоколебательных режимов

Потеря устойчивости состояния равновесия при изменении параметра не обязательно связана с бифуркацией самого состояния равновесия: оно может терять устойчивость, не только сталкиваясь с другим, но и самостоятельно.

Соответствующая перестройка фазового портрета на плоскости изображена на рис. 16. Возможны два варианта.

А. При изменении параметра из положения равновесия *рождается предельный* цикл (радиуса порядка  $\sqrt{\epsilon}$ , когда значение параметра отличается от бифуркационного на  $\epsilon$ ). Устойчивость равновесия переходит к циклу, само же равновесие становится неустойчивым.

Б. В положении равновесия *умирает неустойчивый предельный цикл*; область притяжения положения равновесия уменьшается с ним до нуля, после чего цикл исчезает, а его неустойчивость передается равновесному состоянию.

А. Пуанкаре заметил, а А. А. Андронов и его ученики еще до войны (в 1939 г.) доказали\*, что, кроме описанной выше (п. 5) потери устойчивости положений равновесия, сливающихся с неустойчивыми, и только что описанных способов потери устойчивости типа А или Б в общих однопараметрических семействах систем с двухмерным фазовым пространством никаких иных видов потери устойчивости не встречается. Позже было доказано, что и в системах с фазовым пространством большей размерности потеря устойчивости положений равновесия при изменении одного параметра происходит каким-либо из описанных выше способов (по направлениям

---

\* Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров. Ученые записки Горьковского государственного университета. Вып. 6, 1939, с. 3—24.



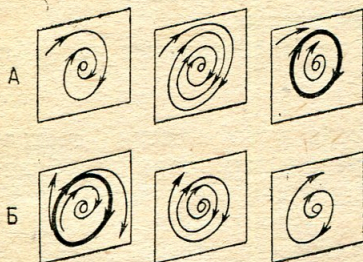


Рис. 16

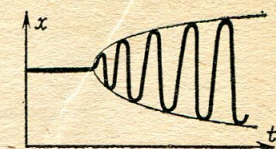


Рис. 17

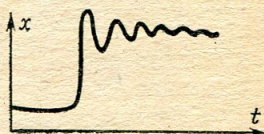


Рис. 18

всех дополнительных осей координат при изменении параметра равновесие остается притягивающим).

Если наше положение равновесия — установившийся режим в реальной системе, то при изменении параметра в случаях А и Б наблюдаются следующие явления.

А. После потери устойчивости равновесия *установившимся режимом оказывается колебательный периодический режим* (рис. 17); амплитуда колебаний пропорциональна квадратному корню из закритичности (отличия параметра от критического значения, при котором равновесие теряет устойчивость).

Этот вид потери устойчивости называется *мягкой* потерей устойчивости, так как устанавливающийся колебательный режим при малой закритичности мало отличается от состояния равновесия.

Б. Перед тем как установившийся режим теряет устойчивость, область притяжения этого режима становится очень малой и всегда присутствующие случайные возмущения выбрасывают систему из этой области еще до того, как область притяжения полностью исчезает.

Этот вид потери устойчивости называется *жесткой* потерей устойчивости. При этом *система уходит со стационарного режима скачком* (см. рис. 18) и *перескакивает на иной режим движения*. Этот режим может быть другим устойчивым стационарным режи-



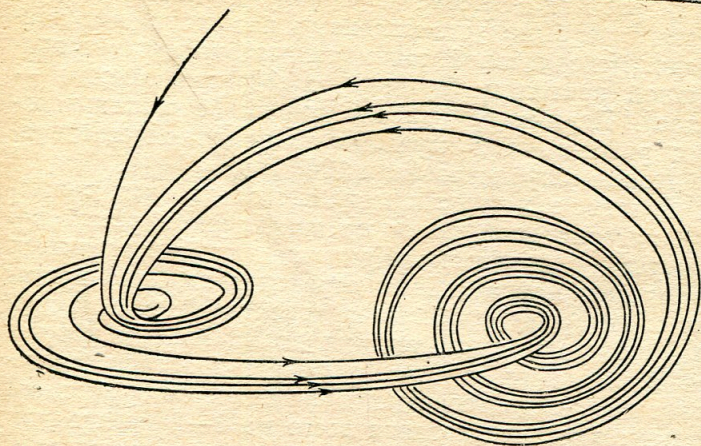


Рис. 19

мом, или устойчивыми колебаниями, или более сложным движением.

Установившиеся режимы движения получили в последние годы название аттракторов, так как они «притягивают» соседние режимы (переходные процессы). [Аттрактор, т. е. притягатель, — это притягивающее множество в фазовом пространстве. Аттракторы, отличные от состояний равновесий и строго периодических колебаний, получили название *странных аттракторов* и связываются с проблемой турбулентности.]

Существование аттракторов с экспоненциально расходящимися фазовыми кривыми на них и устойчивость такого рода явлений были установлены в самом начале шестидесятых годов в работах С. Смейла, Д. В. Аносова и Я. Г. Синая по структурной устойчивости динамических систем.

Независимо от этих теоретических работ метеоролог Лоренц в 1963 году описал наблюдавшийся им в численных экспериментах по моделированию конвекции аттрактор в трехмерном фазовом пространстве с разбегающимися по нему в разные стороны фазовыми кривыми (рис. 19) и указал на связь этого явления с турбулентностью.



В работах Аносова и Синая экспоненциальное разбегание было установлено, в частности, для движения материальной точки по поверхности отрицательной кривизны (пример такой поверхности — седло). Первые применения теории экспоненциального разбегания к изучению гидродинамической устойчивости опубликованы в 1966 году.

Движение жидкости можно описать как движение материальной точки по искривленной бесконечномерной поверхности. Кривизна этой поверхности по многим направлениям отрицательна, что приводит к быстрому разбеганию траекторий, т. е. к плохой предсказуемости течения по начальным условиям. В частности, из этого вытекает практическая невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды: для предсказания всего на 1—2 месяца вперед нужно знать начальные условия с погрешностью  $10^{-5}$  от погрешности предсказания.

Вернемся, однако, к режиму, установившемуся после потери устойчивости равновесного состояния, и предположим, что этот режим — странный аттрактор (т. е. не равновесие и не предельный цикл).

Переход системы на такой режим означает, что в ней наблюдаются сложные непериодические колебания, детали которых очень чувствительны к малому изменению начальных условий, в то время как усредненные характеристики режима устойчивы и не зависят от начального условия (при его изменении в некоторой области). Экспериментатор, наблюдающий за движением такой системы, назвал бы его турбулентным. По-видимому, неупорядоченные движения жидкости, наблюдаемые при потере устойчивости ламинарного течения с увеличением числа Рейнольдса (т. е. с уменьшением вязкости), математически описываются именно такими сложными аттракторами в фазовом пространстве жидкости. Размерность этого аттрактора, по-видимому, конечна при любом числе Рейнольдса (для двухмерных течений жидкости Ю. С. Ильяшенко недавно получил оценку этой размерности сверху величиной порядка  $Re^4$ ), но стремится к бесконечности при  $Re \rightarrow \infty$ .

Переход от устойчивого состояния равновесия процесса («ламинарного течения жидкости») к странному аттрактору («турбулентности») может совер-





Рис. 20



Рис. 21

Рис. 22



Рис. 23

Рис. 24



Рис. 25

шаться как скачком (при жесткой или катастрофической потере устойчивости), так и после мягкой потери устойчивости (рис. 20). В последнем случае родившийся цикл сам теряет устойчивость. Потеря устойчивости цикла в общем однопараметрическом семействе систем возможна несколькими способами: 1) столкновение с неустойчивым циклом (рис. 21), 2) удвоение (рис. 22), 3) рождение или смерть тора (рис. 23) (в терминологии Андронова: с цикла слезает шкура). Детали последних процессов зависят от резонансов между частотами движения вдоль меридиана тора и вдоль его оси, т. е. от того, будет ли отношение этих частот рациональным или иррациональным числом. Интересно, что рациональные



числа со знаменателем 5 и больше ведут себя практически как иррациональные.

Поведение фазовых кривых, близких к циклу, можно приближенно описывать при помощи эволюционного процесса, для которого цикл является положением равновесия. Возникающие таким образом приближенные системы на сегодняшний день исследованы для всех случаев, кроме случаев, близких к сильному резонансу с отношением частот 1:4 (Р. И. Богданов, Э. И. Хорозов). На рис. 24 изображены перестройки семейства фазовых кривых приближенной системы, соответствующие перестройкам расположения фазовых кривых в окрестности цикла; предполагается, что потеря устойчивости происходит вблизи резонанса 1:3. На рис. 25 изображена одна из возможных последовательностей событий вблизи резонанса 1:4. Основные результаты об этом резонансе получены не строгими математическими рассуждениями, а комбинированием догадок и вычислительных экспериментов на ЭВМ (Ф. С. Березовская и А. И. Хибник, А. И. Нейштадт).

Изложенная выше теория Пуанкаре — Андронова потери устойчивости состояний равновесия имеет так много приложений во всех областях теории колебаний (как систем с конечным числом степеней свободы, так и сплошных сред), что нет никакой возможности их здесь перечислить: механические, физические, химические, биологические и экономические системы теряют устойчивость на каждом шагу.

В работах по теории катастроф мягкая потеря устойчивости положения равновесия обычно называется бифуркацией Хопфа (отчасти по моей «вине», так как, рассказывая о теории Пуанкаре — Андронова Р. Тому в 1965 году, я особенно подчеркивал работу Э. Хопфа, перенесшего часть этой теории на многомерный случай).

В теории бифуркаций, как и в теории особенностей, основные результаты и приложения получены независимо от теории катастроф. Несомненной заслугой теории катастроф является введение термина аттрактор и широкая пропаганда знаний о бифуркациях аттракторов. Разнообразные аттракторы обнаружены теперь во всех областях теории колебаний; высказывалась, например, гипотеза, что различные



фонемы речи — это различные аттракторы звукообразующей динамической системы.

Еще лет десять назад всякий экспериментатор, обнаружив, скажем, в химической реакции сложные аperiodические колебания, отказывался от их исследования, ссылаясь на нечистоту эксперимента, случайные внешние воздействия и т. п. Сейчас уже многим ясно, что эти сложные колебания могут быть связаны с самим существом дела, могут определяться основными уравнениями задачи, а не случайными внешними воздействиями; они могут и должны изучаться наравне с классическими стационарными и периодическими режимами протекания процессов.

---

## 7.

---

### **Особенности границы устойчивости и принцип хрупкости хорошего**

Рассмотрим положение равновесия системы, зависящей от нескольких параметров, и предположим, что (в некоторой области изменения параметров) это положение равновесия не бифурцирует.

Будем изображать систему, соответствующую какому-либо значению параметров, точкой на оси значений параметра (на плоскости, если параметров два, в пространстве параметров, если их три, и т. д.).

Исследуемая область в пространстве параметров разобьется тогда на две части в соответствии с тем, устойчиво или нет положение равновесия. Мы получаем таким образом на плоскости (в пространстве) параметров область устойчивости (составленную значениями параметров, при которых равновесие устойчиво), область неустойчивости и разделяющую их границу устойчивости.

В соответствии с общей стратегией Пуанкаре (см. п. 5) мы ограничимся семействами систем, зависящих от параметров общим образом. Оказывается, граница устойчивости может иметь особенности,





Рис. 26

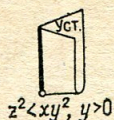
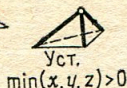
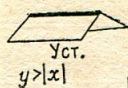
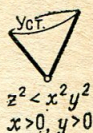


Рис. 27



которые не исчезают при малом шевелении семейства.

На рис. 26 изображены все особенности границы устойчивости положений равновесия в общих двухпараметрических семействах эволюционных систем (с фазовым пространством любой размерности), на рис. 27 — в трехпараметрических. Формулы на рисунках описывают область устойчивости (при подходящем выборе координат на плоскости или в пространстве параметров, вообще говоря, криволинейных).

Заметим, что область устойчивости во всех случаях располагается «углами наружу», вклиниваясь в область неустойчивости. Таким образом, для системы, принадлежащей особой части границы устойчивости, при малом изменении параметров более вероятно попадание в область неустойчивости, чем в область устойчивости. Это проявление общего принципа, согласно которому все хорошее (например, устойчивость) более хрупко, чем плохое.

По-видимому, все хорошие объекты удовлетворяют нескольким требованиям *одновременно*, плохим же считается объект, обладающий *хотя бы одним* из ряда недостатков.

В случае четырех параметров к перечисленным выше особенностям границы добавляются еще две.

При увеличении числа параметров число типов особенностей границы устойчивости семейства общего положения быстро растет, однако, как доказал Л. В. Левантовский, оно остается конечным (с точностью до гладких замен параметров) при любом конечном числе параметров, сохраняется и принцип хрупкости.



## Каустики, волновые фронты и их метаморфозы

Один из наиболее важных выводов теории особенностей состоит в *универсальности* нескольких простых образов вроде складки, сборки и точки возврата, которые должны встречаться повсеместно и которые полезно научиться распознавать. Кроме перечисленных особенностей, часто встречается еще несколько образов, которые также получили собственные имена: «*ласточкин хвост*», «*пирамида*», «*кошелек*» и др.

Пусть в какой-либо среде распространяется некоторое возмущение (например, ударная волна, свет или эпидемия).

Для простоты начнем с плоского случая. Допустим, в начальный момент времени возмущение имелось на кривой  $a$  (рис. 28), и пусть скорость его распространения равна 1. Чтобы узнать, где будет возмущение через время  $t$ , нужно отложить по каждой нормали к кривой отрезок длины  $t$ . Получающаяся кривая называется *волновым фронтом*.

Даже если начальный волновой фронт не имел особенностей, через некоторое время особенности начнут возникать. Например, при распространении возмущения внутрь эллипса возникают особенности, изображенные на рис. 29. Эти особенности устойчивы (неустранимы малым шевелением начального фронта). Для гладкого начального фронта общего положения с течением времени будут образовываться лишь стандартные особенности такого же типа.

Все иные особенности (например, особенность в центре сжимающейся окружности) при малом шевелении начального фронта рассыпаются на несколько особенностей стандартного вида.

В трехмерном пространстве на гладком волновом фронте общего положения с течением времени возникают лишь ребра возврата и стандартные особенности типа «*ласточкин хвост*», изображенные на рис. 30 (попытайтесь разобраться в особенностях фронта, распространяющегося внутрь трехосного эллипсоида).



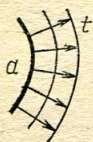


Рис. 28

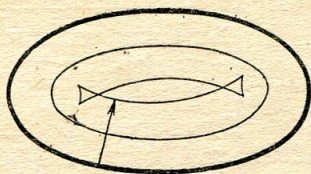


Рис. 29

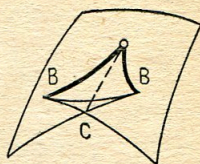


Рис. 30

Все более сложные особенности при малом шевелении фронта рассыпаются на соединенные ребрами возврата и линиями самопересечения ласточкины хвосты.

Ласточкин хвост можно определить как множество всех точек  $(a, b, c)$ , таких, что многочлен  $x^4 + ax^2 + bx + c$  имеет кратный корень. У этой поверхности есть ребро возврата ( $B$  на рис. 30) и линия самопересечения ( $C$  на рис. 30).

Ласточкин хвост можно получить из пространственной кривой  $A=t^2, B=t^3, C=t^4$ : он образован всеми ее касательными.

Рассмотрим пересечения ласточкиного хвоста параллельными плоскостями общего положения (см. рис. 31).

Эти пересечения являются плоскими кривыми. При поступательном движении плоскости указанные кривые перестраиваются в момент, когда плоскость проходит через вершину хвоста. Перестройка (*метаморфоза*), происходящая при этом, в точности такая же, как метаморфоза волнового фронта на плоскости (например, при распространении возмущения внутрь эллипса).

Мы можем описать метаморфозы волновых фронтов на плоскости следующим образом. Рассмотрим наряду с основным пространством (в данном случае плоскостью) еще *пространство-время* (в данном случае трехмерное). Распространяющийся на плоскости волновой фронт замечает в пространстве-времени не-

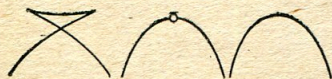


Рис. 31



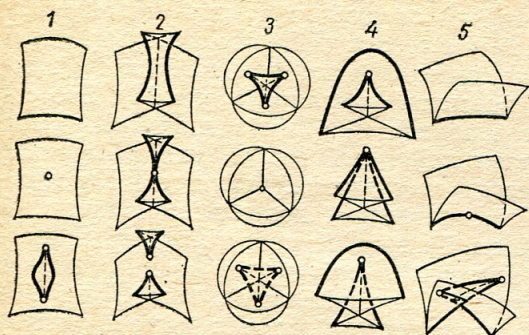


Рис. 32

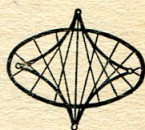


Рис. 33

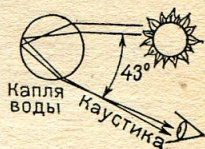


Рис. 34

которую поверхность. Оказывается, саму эту поверхность всегда можно рассматривать как волновой фронт в пространстве-времени («большой фронт»). В случае общего положения особенностями большого фронта будут ласточкины хвосты, ребра возврата и самопересечения, расположенные в пространстве-времени общим образом относительно изохрон (образованных «одновременными» точками пространства-времени). Теперь уже нетрудно сообразить, какие метаморфозы могут испытывать мгновенные волновые фронты на плоскости в случае общего положения: это перестройки сечений большого фронта изохронами.

Изучение метаморфоз волнового фронта при его распространении в трехмерном пространстве сводится таким же образом к исследованию сечений большого (трехмерного) волнового фронта в четырехмерном пространстве-времени трехмерными изохронами. Возникающие метаморфозы изображены на рис. 32.

Изучение метаморфоз волновых фронтов было одной из задач, из которых возникла теория катастроф, однако даже в случае трехмерного пространства катастрофисты не сумели с ней справиться; рис. 32 появился лишь в 1974 году, когда в теории особенностей были разработаны новые методы (основанные на теории кристаллографических групп симметрий).



Наряду с волновыми фронтами процесс распространения возмущений описывается при помощи *систем лучей*. Например, распространение возмущений внутрь эллипса можно описать при помощи семейства внутренних нормалей к эллипсу (рис. 33). Это семейство имеет огибающую. Огибающая семейства лучей называется *каустикой* (т. е. «жгущей», так как в этих местах свет концентрируется). Каустика хорошо видна на внутренней поверхности чашки, освещенной солнцем. Радуга на небе также объясняется каустикой системы лучей, прошедших с полным внутренним отражением через каплю воды (рис. 34).

Каустика эллиптического фронта имеет четыре точки возврата. Эти особенности *устойчивы*: близкий к эллипсу фронт определит каустик с такими же особенностями. Все более сложные особенности каустик при малом шевелении рассыпаются на стандартные особенности: точки возврата (локальное уравнение —  $x^2=y^3$ ) и точки самопересечения.

Система нормалей к поверхности в трехмерном пространстве также имеет каустик. Эту каустик можно построить, отложив на каждой нормали к поверхности радиус кривизны (поверхность, вообще говоря, имеет в каждой точке два различных радиуса кривизны, так что на нормали получается две точки каустики).

Нелегко представить себе, как выглядят каустики даже простейших поверхностей, например трехосного эллипсоида.

Каустики общего положения в трехмерном пространстве имеют лишь стандартные особенности. Эти особенности называются «*ласточкин хвост*», «*пирамида*» и «*кошелек*» и изображены на рис. 35.

Пирамида имеет три ребра возврата, касающиеся в вершине. Кошелек имеет одно ребро возврата и состоит из двух симметричных носов лодки, пересекающихся по двум линиям. Эти особенности устойчивы.

*Все более сложные особенности каустик в трехмерном пространстве при малом шевелении рассыпаются на эти стандартные элементы.*

Рассмотрим для одного и того же начального фронта (например, эллипса на плоскости) его каустик и фронты распространяющегося возмущения.



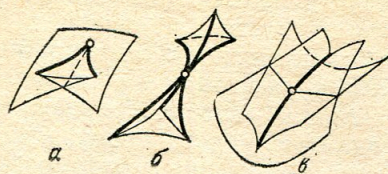


Рис.35

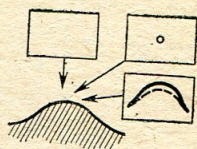


Рис.37

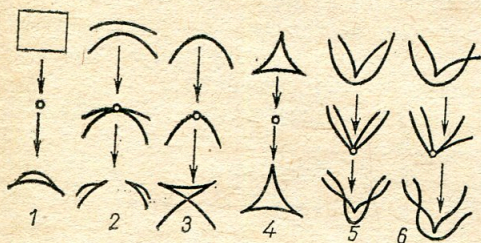


Рис.36

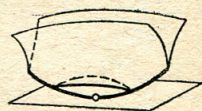


Рис.38

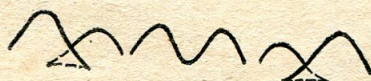


Рис.39

Нетрудно понять, что особенности распространяющегося фронта скользят по каустике и заполняют ее.

Например, метаморфоза волнового фронта 5 на рис. 32 соответствует ласточкиному хвосту на каустике. Ребро возврата движущегося в трехмерном пространстве волнового фронта замечает поверхность каустики (ласточкин хвост). Однако это разбиение каустики на кривые — не то разбиение поверхности ласточкиного хвоста на плоские кривые, с которым мы встречались выше (на рис. 31). Ребро возврата движущегося фронта не имеет самопересечений. Через точку линии самопересечения каустики ребро возврата движущегося фронта проходит два раза. Интервал времени между этими прохождениями очень мал (порядка  $\varepsilon^{5/2}$ , где  $\varepsilon$  — расстояние от вершины хвоста).

Точно так же при перестройках 3 и 4 (см. рис. 32) ребра возврата движущихся фронтов замечают пирамиду и кошелек.



Если исходный фронт движется (зависит от параметра), то его каустика также движется и при своем движении способна испытывать метаморфозы. *Метаморфозы движущихся каустик на плоскости можно изучить, рассматривая сечения большой каустики в пространстве-времени*, подобно тому, как мы это делали для фронтов. Полученные метаморфозы изображены на рис. 36. (Это метаморфозы плоских сечений ласточкиного хвоста, кошелька и пирамиды.) Все более сложные метаморфозы рассыпаются на последовательности перечисленных при малом шевелении однопараметрического семейства.

Обратим внимание на метаморфозу 1 рождения каустики «из воздуха». Новорожденная каустика имеет вид серпика с полукубическими острями на концах («губы», по терминологии Р. Тома). Аналогичным образом рождается «из воздуха» видимый контур поверхности при изменении направления проектирования (рис. 37). Глядя на бугор сверху, мы не видим контура. Когда луч зрения наклоняется, появляется вначале точечная особенность, которая затем быстро растет (пропорционально  $\sqrt{t-t_0}$ , где  $t_0$  — момент появления особенности) и имеет вид «губ». Описанную здесь перестройку можно реализовать как перестройку плоского сечения поверхности с ребром возврата при поступательном движении плоскости (в момент перестройки плоскость касается ребра возврата (рис. 38)).

Метаморфозу 3 также можно увидеть на видимом контуре, для этого достаточно посмотреть на двугорбого верблюда, проходя мимо него (рис. 39). В момент метаморфозы профиль имеет такую же особенность, как кривая  $y^3 = x^4$ .

Все перестройки видимых контуров поверхностей в общих однопараметрических семействах исчерпываются первыми тремя изображенными на рис. 36, 1—3.

*Метаморфозы каустик, движущихся в трехмерном пространстве*, получают сечениями больших (трехмерных) каустик в четырехмерном пространстве-времени трехмерными изохронами. Эти метаморфозы изображены на рис. 40 и 41.

Одна из этих метаморфоз (1) описывает рождение новой каустики «из воздуха». Мы видим, что



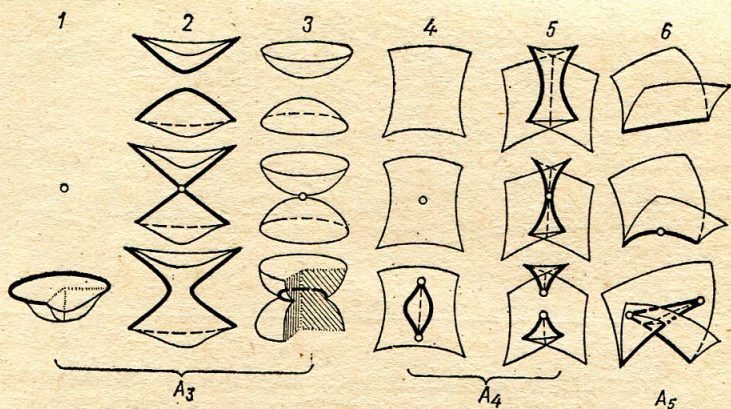


Рис. 40

вновь родившаяся каустика имеет вид блюда с заостренными краями. Через время  $t$  после рождения длина и ширина блюда порядка  $\sqrt{t}$ , глубина порядка  $t$ , а толщина порядка  $t/\sqrt{t}$ .

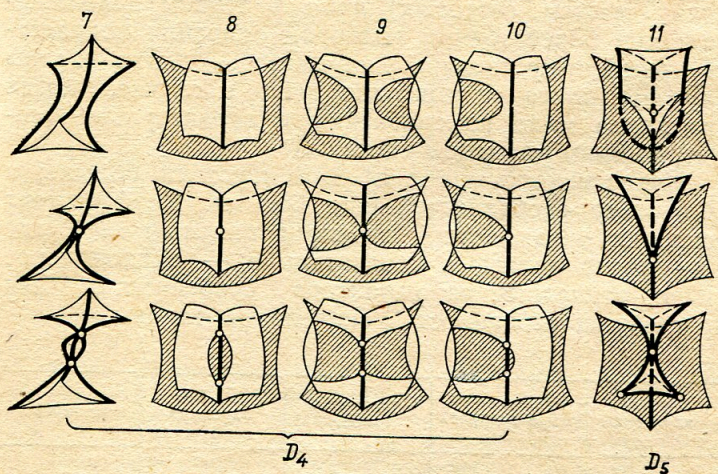


Рис. 41



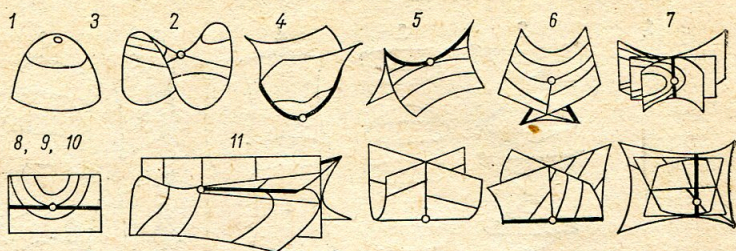


Рис. 42.

Каустика может сделаться видимой, если на пути светового пучка имеется рассеивающая среда (пыль, туман). В. М. Закалюкин предположил, что каустики этого вида наблюдатели описывают как летающие блюда.

Ребра возврата движущихся в трехмерном пространстве каустик заматают поверхность *бикаустики*. Особенности бикаустик общего положения, соответствующих различным метаморфозам рис. 40, 41, изображены на рис. 42.

Как известно, лучи описывают распространение волн (скажем, световых) лишь в первом приближении; при более точном волновом описании появляется новый существенный параметр — длина волны (лучевое описание пригодно лишь в случае, когда эта длина мала по сравнению с характерным геометрическим размером системы).

Интенсивность света вблизи каустики больше, а вблизи ее особенностей еще больше. Коэффициент усиления оказывается пропорциональным  $l^{-\alpha}$ , где  $l$  — длина волны, а показатель  $\alpha$  — рациональное число, зависящее от характера особенности. Для простейших особенностей значения  $\alpha$  таковы:

каустика	ребро возврата	ласточкин хвост	пирамида	кошелек
1/6	1/4	3/10	1/3	1/3



Таким образом, ярче всего светятся точечные особенности типа пирамиды и кошелька. В случае движущейся каустики в отдельные моменты времени могут возникать более яркие особенности \*  $A_5$ ,  $D_5$  (см. рис. 40, 41;  $\alpha = 1/3$  для  $A_5$ ,  $3/8$  для  $D_5$ ).

Если свет настолько интенсивен, что способен разрушать среду, то разрушение начнется в точках наибольшей яркости, поэтому показатель  $\alpha$  определяет зависимость интенсивности разрушающего среду света от частоты.

Аналогичная описанной выше классификация особенностей каустик и волновых фронтов проведена в многомерных пространствах до размерности 10 (В. М. Закалюкин).

Предсказания теорией особенностей геометрии каустик, фронтов и их перестроек получили полное подтверждение в экспериментах, и сейчас даже кажется странным, почему эта теория не была построена лет двести назад. Дело, однако, в том, что соответствующий математический аппарат не тривиален\*\* и связан с такими разделами математики, как классификация простых алгебр Ли, кристаллографических групп Кокстера, теорией кос, теорией ветвления интегралов, зависящих от параметров, и т. д. — он даже связан (довольно таинственным образом) с классификацией правильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве.

Катастрофисты пытаются избежать серьезной математики. Например, в составленной К. Зиманом в 1980 году обширной библиографии по теории катастроф опущены ссылки на математические работы, вышедшие после 1976 года. Таким образом, катастрофисты продолжают попытки экспериментально нащупать ответы в задачах, давно решенных математиками. Например, в работе 1980 года о ветровых полях и движении льда можно найти полуудачные

---

\* Все перечисленные особенности классифицируются по типам  $A_k$ ,  $D_k$ , о которых подробнее рассказано на с. 61.

\*\* Первоначальное доказательство теоремы Уитни, с которой мы начали, занимало около 40 страниц; хотя окончательные геометрические результаты теории особенностей легко могут быть поняты и использованы, доказательства продолжают оставаться сложными.



попытки угадать список метаморфоз каустик в трехмерном пространстве (см. рис. 40, 41), опубликованный математиками еще в 1976 году.

---

## 9.

---

### Крупномасштабное распределение вещества во Вселенной

В настоящее время распределение вещества во Вселенной крайне неоднородно (существуют планеты, Солнце, звезды, галактики, скопления галактик и т. д.). Современная астрофизика считает, что на ранних этапах развития Вселенной таких неоднородностей не было. Как же они образовались? Я. Б. Зельдович в 1970 году предложил объяснение образования скоплений пылевидной материи, математически эквивалентное анализу возникновения особенностей каустик.

Рассмотрим *бесстолкновительную* среду, т. е. среду настолько разреженную, что ее частицы проходят друг «сквозь» друга, не сталкиваясь. Предположим, для простоты, что частицы не взаимодействуют и движутся по инерции: через время  $t$  частица, находившаяся в точке  $x$ , перейдет в точку  $x + vt$ .

Предположим, что в начальный момент скорость частицы, находящейся в точке  $x$ , была  $v_0(x)$ ; векторное поле  $v_0$  называется *начальным полем скоростей* среды. С течением времени частицы будут двигаться

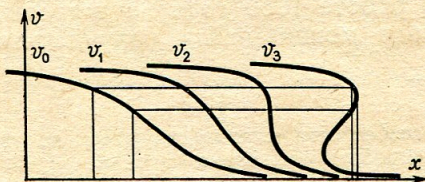


Рис. 43

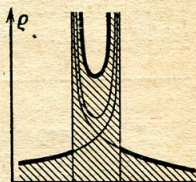


Рис. 44



и поле скоростей будет меняться (хотя скорость каждой частицы и не меняется, в следующий момент времени эта частица находится на новом месте).

На рис. 43 изображено начальное поле скоростей одномерной среды  $v_0$  и получающиеся из него через время  $t=1, 2$  и  $3$  поля  $v_1, v_2, v_3$ . Мы видим, что, начиная с некоторого момента, *более быстрые частицы начинают обгонять более медленные*; в результате поле скоростей становится трехзначным: через одну точку пространства проходят с разными скоростями три потока частиц.

Движение нашей среды можно описать как *однопараметрическое семейство отображений прямой на прямую*. Именно для каждого  $t$  определено отображение  $g_t$ , переводящее начальное положение частицы ( $x$ ) в конечное:  $g_t(x) = x + v_0(x)t$ .

Отображение  $g_0$  есть тождественное преобразование, оставляющее каждую точку на месте. Отображения, соответствующие моментам  $t$ , близким к 0, взаимно однозначны и не имеют особенностей. После момента первого обгона отображение  $g_t$  имеет две складки.

Пусть в начальный момент плотность среды в точке  $x$  была  $\rho_0(x)$ . С течением времени плотность будет меняться. Нетрудно сообразить, что после обгона график плотности будет иметь вид, изображенный на рис. 44 (на расстоянии  $\varepsilon$  от точки складки плотность оказывается порядка  $1/\sqrt{\varepsilon}$ ).

Таким образом, небольшие отличия начального поля скоростей от постоянного приводят через достаточно большое время к образованию скоплений частиц (в местах бесконечно большой плотности).

Этот вывод сохраняется при переходе от одномерной среды к среде, заполняющей пространство любой размерности, и при учете влияния на движение ее частиц внешнего силового поля или поля, созданного средой, а также при учете эффектов теории относительности и расширения Вселенной.

Если силовые поля потенциальны (т. е. их работа на любом пути зависит лишь от начала и конца пути) и начальное поле скоростей тоже потенциально, то задача описания особенностей отображений  $g_t$  и их метаморфоз при изменении  $t$  математически тождественна задаче об особенностях кустиков и их



метаморфоз (то и другое составляет предмет теории так называемых *лагранжевых особенностей*).

Точки бесконечной плотности образуют в случае двухмерной среды кривые на плоскости. Эти кривые образованы критическими значениями отображения  $g_t$ , т. е. его значениями в критических точках (для отображения рис. 1 критические точки — это точки экватора сферы, критические значения — точки видимого контура на горизонтальной плоскости).

Линия критических значений отображения  $g_t$  называется его *каустикой*. Ее можно определить как место пересечений бесконечно близких лучей (траекторий частиц), т. е. так же, как обычную оптическую каустикку.

Таким же образом описание метаморфоз оптических каустик доставляет нам описание перестроек скоплений частиц (мест бесконечной плотности среды) при потенциальном движении.

Первая особенность на плоскости выглядит как серпик с полукубически заостренными вершинами (в трехмерном пространстве новорожденная каустика имеет вид блюда). Я. Б. Зельдович назвал такую каустикку *блином* (первоначально блины интерпретировались как галактики, позже — как скопления).

При дальнейшем движении среды рождаются новые блины. Кроме того, имеющиеся блины начинают перестраиваться и могут взаимодействовать друг с другом. Одна из типичных последовательностей событий в двухмерной среде изображена на рис. 45.

Все возможные в трехмерной среде элементарные перестройки изображены на рис. 40, 41 (получение этих результатов уже требует сложной математической теории лагранжевых особенностей).

В результате перестроек плотность имеет особенности различных порядков на поверхностях блинов, на линиях и в отдельных точках. Будем характеризовать особенность *средней плотностью* в  $\varepsilon$ -окрестности рассматриваемой точки (т. е. отношением массы, попавшей в  $\varepsilon$ -окрестность, к объему окрестности).

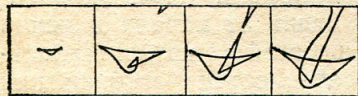


Рис. 45

В точках каустики



средняя плотность стремится к бесконечности, когда радиус окрестности  $\epsilon$  стремится к нулю.

Порядок величины средней плотности в различных точках каустик таков:

каустика	ребро возврата	ласточкин хвост	кошелек, пирамида
$\epsilon^{-1/2}$	$\epsilon^{-2/3}$	$\epsilon^{-3/4}$	$\epsilon^{-1}$

При изменении времени в отдельные моменты появляются особенности  $A_5$  со средней плотностью порядка  $\epsilon^{-4/5}$  и  $D_5$  ( $\epsilon^{-1} \ln 1/\epsilon$ ).

Согласно астрофизикам, в те времена, когда радиус Вселенной был раз в тысячу меньше нынешнего, крупномасштабное распределение вещества во Вселенной было практически однородным, а поле скоростей — практически потенциальным. Дальнейшее движение частиц привело к образованию каустик, т. е. особенностей плотности и скоплений частиц. До образования блинов плотность остается достаточно малой, чтобы считать среду бесстолкновительной. После этого момента среду можно считать бесстолкновительной, если предполагать, что значительная часть массы Вселенной сосредоточена в массивных нейтрино; если же большая часть массы приходится на протоны и нейтроны, то к выводам из геометрии каустик и их перестроек следует относиться с осторожностью, так как среда перестает быть бесстолкновительной.

Выводы о скоплении вещества на поверхностях с преимущественным скоплением вдоль некоторых линий (шнуров), соединяющихся в особых точках (узлах), по-видимому, соответствуют астрономическим наблюдениям, по крайней мере в общих чертах (С. Ф. Шандарин).



### Особенности в задачах оптимизации: функция максимума

Многочисленные особенности, бифуркации и катастрофы (скачки) возникают во всех задачах о нахождении экстремумов (максимумов, минимумов), задачах оптимизации, управления и принятия решений. Представим себе, например, что мы должны выбрать  $x$  так, чтобы обеспечить наибольшее значение функции  $f(x)$  (рис. 46). При плавном изменении функции оптимальное решение меняется скачком, перескакивая с одного из двух конкурирующих максимумов ( $A$ ) на другой ( $B$ ).

Ниже мы рассмотрим несколько задач такого рода; все они далеки от полного решения, хотя в некоторых классификация особенностей проведена достаточно далеко.

Рассмотрим *семейство*  $f(x, y)$  функций переменной  $x$ , зависящих от параметра  $y$ . При каждом фиксированном значении параметра  $y$  вычислим максимум функции, обозначим его через

$$F(y) = \max_x f(x, y).$$

Функция  $F$  непрерывная, но не обязательно гладкая, даже если  $f$  — многочлен.

**Пример 1.** Пусть  $y$  — азимут луча зрения,  $x$  — дальность,  $f$  — угловая высота ландшафта на расстоянии  $x$  при азимуте  $y$  (рис. 47). Тогда  $F$  определяет *линию горизонта*. Ясно, что *линия горизонта гладкой поверхности может иметь изломы и они неустранимы малым шевелением*.

Переменная  $x$  и параметр  $y$  могут быть точками пространств любой размерности; наряду с максимумами встречаются и минимумы.

**Пример 2.** Пусть  $x$  — точка плоской кривой  $\gamma$ ,  $y$  — точка области, ограниченной этой кривой,  $f(x, y)$  — расстояние от  $y$  до  $x$ .

Будем рассматривать  $f$  как функцию точки кривой, зависящую от точки области как от параметра.



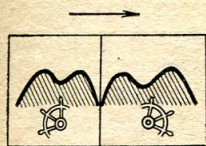


Рис. 46

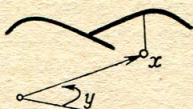


Рис. 47

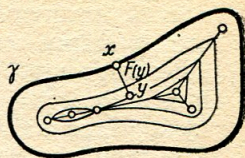


Рис. 48

Тогда функция минимума семейства,  $F(y)$ , есть кратчайшее расстояние от точки  $y$  до кривой  $\gamma$  (рис. 48). Ясно, что эта функция непрерывна, но не всюду гладкая.

Мы можем представить себе *лопату*, ограниченную кривой  $\gamma$ ; насыпем на эту лопату возможно большую кучу сухого песка. Поверхность кучи будет тогда графиком функции  $F$ . Ясно, что для *лопаты* общего положения поверхность кучи имеет хребет (линию излома).

Линии уровня функции  $F$  — не что иное, как передние фронты распространяющегося внутрь кривой  $\gamma$  возмущения.

Теория особенностей позволяет перечислить особенности функций максимума  $F$  как в описанном примере, так и для семейств общего положения функций любого числа переменных при условии, что число параметров  $y$  не больше 10 (Л. Н. Брызгалова). Рассмотрим простейшие случаи одного и двух параметров.

Выбирая координаты на оси (плоскости) значений параметра  $y$  и вычитая из  $F$  гладкую функцию параметров, мы можем привести функцию максимума семейства общего положения в окрестности каждой точки к одной из следующих нормальных форм:

один параметр:  $F(y) = |y|$ ;

два параметра:  $F(y) = \begin{cases} |y_1| \text{ или} \\ \max(y_1, y_2, y_1 + y_2) \text{ или} \\ \max_x (-x^4 + y_1 x^2 + y_2 x). \end{cases}$

Формула, относящаяся к случаю одного параметра, означает, в частности, что линия горизонта глад-



кого ландшафта общего положения не имеет особенностей, отличных от простейших изломов. Особенности функции максимума, описанные формулами для двух параметров, дают следующие особенности функции минимума (например, особенности поверхности кучи песка на лопате): линия хребта, точка соединения трех хребтов и конец хребта (см. рис. 48).

В последнем случае график функции минимума есть часть поверхности ласточкиного хвоста (см. рис. 30), получающаяся удалением прилежащей к ребру возврата пирамиды (*BCB*) (и еще отражением поверхности рис. 30 в горизонтальной плоскости).

При 3, 4, 5 и 6 параметрах число различных особенностей равно соответственно 5, 8, 12 и 17; начиная с 7 параметров, число типов несводимых друг к другу особенностей становится бесконечным: нормальные формы неизбежно содержат «модули», являющиеся функциями от параметров.

Топологически функция максимума (минимума) семейства общего положения устроена как гладкая функция общего положения (В. И. Матов).

---

## 11.

---

### Особенности границы достижимости

*Управляемая система* в фазовом пространстве задается так: в каждой точке пространства дан не один вектор скорости (как в обычной эволюционной системе), а целое множество векторов, называемое *индикатрисой допустимых скоростей* (рис. 49).

Задача управления состоит в том, чтобы, выбирая в каждый момент времени вектор скорости из предоставляемого индикатрисой набора допустимых скоростей, достичь заданной цели (например, прийти за кратчайшее время на заданное подмножество фазового пространства).

Зависимость кратчайшего времени достижения цели от начальной точки может иметь особенности. Рассматривавшиеся в п. 10 особенности функции ми-



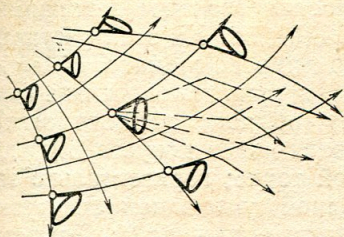


Рис.49

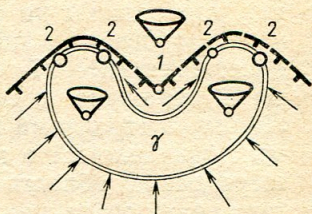


Рис.50

нимума расстояния до кривой — частный случай (индикатриса — окружность, а цель — кривая). В отличие от этого частного случая особенности кратчайшего времени в общей задаче управления изучены весьма слабо.

В общем случае достичь цели можно не при любом начальном условии. Точки фазового пространства, из которых можно достичь цели (за любое время), называются *областью достижимости*.

Граница области достижимости может иметь особенности даже в том случае, когда ни цель, ни поле индикатрис в различных точках фазового пространства особенностей не имеют. Мы приводим ниже классификацию особенностей границы достижимости в общей управляемой системе на фазовой плоскости в случае, когда индикатрисы и цель — гладкие кривые (по А. А. Давыдову).

Из четырех типов особенностей границы три записываются простыми формулами (при подходящем выборе локальных координат на плоскости):

1)  $y = |x|$ , 2)  $y = x|x|$ , 3)  $y = x^2|x|$ .

Нормальная форма особенности четвертого типа содержит произвольную гладкую функцию  $B$  двух переменных  $x, y$  и параметры  $a, b; \alpha > 1$ :

$$4) \begin{cases} a(x - \sqrt{y})^\alpha = \frac{x}{a} + yB - \sqrt{y}, & x \geq 0; \\ b(|x| - \sqrt{y})^\alpha = \frac{x}{a} + yB + \sqrt{y}, & x < 0. \end{cases}$$



Примеры управляемых систем и целей, приводящих к указанным особенностям границы достижимости, изображены на рис. 50, 51, 52. На этих рисунках цель  $\gamma$  обозначена двойной линией, граница, области, достижимости — Т-образным пунктиром (ножка буквы Т обращена в сторону области достижимости). Линии со стрелками касаются краев конусов допустимых направлений в каждой точке; горизонтально заштрихована область «полной управляемости» (выпуклая оболочка индикатрисы окружает 0). Рассматривая рис. 50—52, читатель может проверить неустраиваемость особенностей 1—4.

Чтобы разобраться в этих рисунках, мы построим сеть *предельных линий*, определяемую следующим образом.

В каждой точке вне области полной управляемости направления допустимых скоростей расположены внутри угла, меньшего  $180^\circ$ .

Стороны этого угла определяют направления *предельных скоростей* в данной точке. Таким образом, в каждой точке вне области полной управляемости возникают два предельных направления. Интегральные кривые полей предельных направлений (т. е. кривые, имеющие предельное направление в каждой своей точке) называются *предельными линиями*.

Сеть предельных линий изображена на рис. 49 вместе с индикатрисами допустимых скоростей (они имеют вид эллипсов) и с опирающимися на индикатрисы углами, образованными допустимыми направлениями движения.

Граница области достижимости состоит из отрезков предельных линий (и, быть может, отрезков линии цели, если цель не лежит в области полной управляемости, см. рис. 50). Эти отрезки соединяются между собой в точках, которые и составляют особенность границы области достижимости.

На рис. 50 цель имеет вид контура лежащей на спине буквы С. Допустимые скорости во всех точках плоскости одинаковы и направлены вверх под углом, составляющим не более  $45^\circ$  с вертикалью.

Наклон всех предельных линий  $\pm 45^\circ$ . Граница достижимости обозначена Т-образным пунктиром. Видны особые точки границы двух типов: 1 и 2.

В точке 1 *соединяются отрезки двух разных предельных линий*. Они пересекаются под ненулевым углом. Ясно, что из точек, расположенных выше указанной на рис. 50 границы, при движении по направлению, образуемому с вертикалью угол  $45^\circ$  или меньше, попасть на цель нельзя, а из точек, расположенных ниже, — можно. Интересно отметить, что вершина 1 занимает на границе области достижимости: область недостижимости вклинивается в этом месте в область достижимости. Таким образом, в смысле п. 7 хорошим оказывается именно недостижимое.

В точке 2 на границе достижимости *соединяется отрезок предельной линии и отрезок линии-цели*. В этой точке направление линии-цели предельное, так что граница достижи-



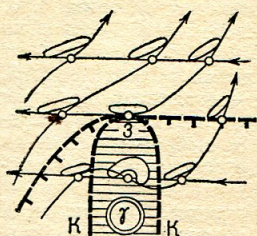


Рис. 51

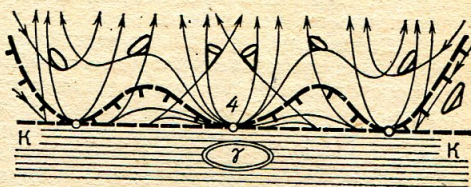


Рис. 52

мости имеет касательную. Кривизна границы, однако, меняется в точке 2 скачком при переходе с предельной линии на линию-цель.

Заменяем теперь цель на рис. 50 любой близкой гладкой кривой (близость кривых предполагает близость их касательных, кривизн и т. д.) и заменим поле индикатрис допустимых скоростей на рис. 50 близким полем. Тогда ясно, что граница допустимости новой системы по-прежнему будет иметь вблизи точки 1 точку излома (где под ненулевым углом соединяются отрезки двух предельных линий). Точно так же вблизи каждой из точек 2 возникнет точка аналогичного характера для новой системы.

Таким образом, ситуация, изображенная на рис. 50, устойчива относительно малых шевелений системы. Подобным свойством устойчивости обладают и ситуации, изображенные на рис. 51 и 52. События, приводящие к указанным на этих рисунках особенностям сети предельных линий, состоят в следующем.

На рис. 51 кривая  $K$  ограничивает заштрихованную область полной управляемости: в заштрихованной области движение в любом направлении возможно (если допускать так называемые смешанные стратегии, т. е. движения быстро сменяющимися галсами). Цель на рис. 51 лежит в области полной управляемости. Следовательно, вся ограниченная кривой  $K$  область достижима.

На границе  $K$  области полной управляемости угол между допустимыми направлениями составляет ровно  $180^\circ$ . Граница  $K$  образована теми точками плоскости, для которых двойная касательная, делающая выпуклой индикатрису допустимых скоростей, проходит через начало координат плоскости скоростей (двойная касательная — это прямая, касающаяся кривой в двух точках).

На рис. 51 эта двойная касательная в каждой точке кривой  $K$  горизонтальна. Событие, приводящее к образованию изображенной на рис. 51 особенности, состоит в том, что кривая  $K$  сама касается проходящей через нуль двойной касательной к индикатресе.

Для систем общего положения такое событие происходит лишь в отдельных точках границы  $K$  области полной управляемости. На рис. 51 оно происходит в точке 3, где касательная к  $K$  горизонтальна.



Из сказанного выше ясно, что описанное событие реализуется устойчивым образом: при малом шевелении системы, т. е. цели и поля индикатрис допустимых скоростей, точка 3 несколько сместится, но не исчезнет.

Рассмотрим теперь сеть предельных линий вблизи точки 3. Оба поля предельных направлений вблизи нее гладкие. Выбором соответствующей системы координат одно из них можно выпрямить. На рис. 51 система координат так и выбрана: первое из двух семейств предельных линий состоит из горизонтальных прямых (направленных влево).

Линии второго семейства — гладкие кривые. На кривой  $K$  они касаются линий первого семейства. В интересующей нас точке 3 оба семейства касаются линии  $K$ . Из этих соображений уже нетрудно усмотреть, что сеть предельных линий вблизи точки 3 выглядит так, как указано на рис. 51: выше кривой  $K$  линии второго семейства поднимаются при движении вдоль допустимого направления, ниже — опускаются (выбор направлений линий сети допускает еще несколько вариантов, аналогичных изображенному; разобравшись в рис. 51, читатель легко разберется в них сам).

Теперь на рис. 51 видно, что левее точки 3 граница области достижимости идет по линии второго предельного направления, а правее — первого (горизонтального). В точке 3 обе линии имеют второй порядок касания (как прямая и кубическая парабола). В окрестности этой точки граница достижимости диффеоморфна\* графику функции  $y = x^2|x|$ .

Таким образом, точки 1 и 2 на рис. 50 и точка 3 на рис. 51 дают примеры устойчиво реализуемых событий на границе области достижимости, вызывающих особенности первых трех видов стр. 38. Особенности четвертого вида возникают в ситуации рис. 52.

На этом рисунке, как и на рис. 51, цель находится внутри заштрихованной области полной управляемости. На границе  $K$  этой области расположены точки плоскости, в которых выпуклая индикатриса проходит через нуль. Ясно, что в управляемых системах общего положения это явление — прохождение индикатрисы через 0 — реализуется на линии. По одну сторону этой линии  $K$  лежит область полной управляемости (индикатриса окружает 0), по другую — область с двумя предельными направлениями. На разделяющей их границе  $K$  оба эти поля направлений сливаются в одно — поле направлений касательных к индикатрисам в нуле.

В общей точке кривой  $K$  направление этого поля составляет с  $K$  ненулевой угол. Событие, приводящее к особенности четвертого типа на границе области достижимости, — это *касание кривой  $K$  с предельным направлением*. Для систем общего положения такое касание реализуется в отдельных точках границы области полной управляемости  $K$ . На рис. 52 таких точек на кривой  $K$  три; средняя из них обозначена цифрой 4.

Чтобы изучить сеть предельных линий в окрестностях этих особых точек, полезно рассмотреть наше двузначное поле пре-

---

\* Диффеоморфизм — это замена координат, гладкая вместе с обратной заменой.



дельных направлений как однозначное поле направлений на поверхности, двулистно накрывающей область выше кривой  $K$ .

С этой целью рассмотрим множество всех направлений линейных элементов на плоскости. Это множество является трехмерным многообразием, так как направление определяется точкой приложения линейного элемента (2 координаты) и еще своим азимутом (одна угловая координата).

Множество всех предельных направлений составляет подмножество множества всех направлений. Это подмножество — гладкая поверхность в трехмерном многообразии всех направлений. Трехмерное многообразие всех направлений проектируется на исходную плоскость (линейный элемент проектируется в свою точку приложения). Поверхность, образованная предельными направлениями, проектируется при этом в часть плоскости, расположенную выше кривой  $K$ . Это отображение проектирования поверхности на плоскость над кривой  $K$  имеет особенность, а именно складку Уитни.

Двузначное поле предельных направлений на плоскости определяется на построенной поверхности однозначное поле направлений всюду, кроме тех самых особенных точек кривой  $K$  (где индикатриса в  $0$  касается  $K$ ), которые мы хотим изучать.

Предельные линии обоих полей предельных направлений после перехода на построенную поверхность образуют систему фазовых кривых гладкого векторного поля с особенностями в интересующих нас точках. Эти особые точки могут быть узлами, фокусами или седлами (на рис. 52 средняя точка — узел, а обе крайние — седла). Таким образом, расположение предельных линий на исходной плоскости получается из расположения фазовых кривых векторного поля в окрестности особой точки при отображении складки Уитни. Хотя это отображение Уитни и фазовые кривые не вполне независимы (в частности, над  $K$  фазовые кривые касаются ядра проектирования), сказанного достаточно, чтобы исследовать расположение предельных линий вблизи особой точки (между прочим, такую же картину образуют асимптотические линии вблизи параболической кривой на поверхности).

На рис. 52 изображен один из вариантов этого расположения. На рисунке видно, что обозначенная T-образным пунктиром граница области достижимости образована проекциями сепаратрис седел (крайних особых точек) при отображении двулистно накрывающей поверхности на плоскость. Над точкой 4 на накрывающей лежит особая точка типа «узел». В этот узел входят с разных сторон две сепаратрисы седел.

В узле эти две кривые имеют общую касательную и (в случае общего положения) могут быть заданы уравнениями парабол степени  $\alpha > 1$  вида

$$y = A|x|^\alpha \text{ при } x \leq 0, \quad y = B|x|^\alpha \text{ при } x > 0$$

в подходящей системе координат.

Четвертая особенность границы области достижимости получается из этой пары парабол степени  $\alpha$  на накрывающей поверхности при отображении складки Уитни. Хотя как эти кривые, так и отображение складки задаются простыми формулами, получаемая особенность простыми формулами не задается.

Дело в том, что системы координат, нормализующие кривые и отображение складки, различны. А. А. Давыдов показал, что



нормальная форма изучаемой особенности неизбежно должна содержать произвольную функцию двух переменных (в то время как особенности предыдущих трех типов приводятся к простым нормальным формам при помощи подходящего выбора систем координат).

Это обстоятельство показывает, между прочим, ошибочность чрезвычайно распространенного среди катастрофистов вульгарного истолкования деклараций Р. Тома о том, что «в природе встречаются только устойчивые явления и потому при изучении каждой задачи следует изучать устойчивые случаи, отбрасывая остальные как нереализуемые». В данном случае особенности первых трех типов устойчивы (с точностью до диффеоморфизмов), а четвертого нет. В то же время все 4 типа особенностей встречаются одинаково часто и изучение последней ничуть не менее важно, чем исследование остальных трех.

Об особенностях области достижимости, функции времени и оптимальной стратегии в управляемых системах общего положения с фазовым пространством большей размерности известно удивительно мало — лишь в 1982 г. доказано, что область достижимости является топологическим многообразием с краем.

Одним из промежуточных вопросов при исследовании управляемых систем оказывается вопрос об особенностях выпуклых оболочек гладких многообразий (кривых, поверхностей...).

*Выпуклой оболочкой* множества называется пересечение всех содержащих его полупространств. Индикатриса управляемой системы может быть невыпуклой.

Однако оказывается, что невыпуклую индикатрису можно заменить ее выпуклой оболочкой.

Например, индикатриса скоростей яхты при встречном ветре невыпукла (рис. 53). Против ветра можно, однако, двигаться *галсами*, применяя *смешанную стратегию*, т. е. перемежая участки движения с разными скоростями, принадлежащими индикатрисе.

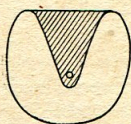


Рис. 53

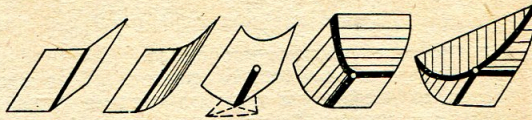


Рис. 54



Средняя скорость движения при смешанной стратегии принадлежит множеству средних арифметических используемых векторов индикатрисы, т. е. выпуклой оболочке.

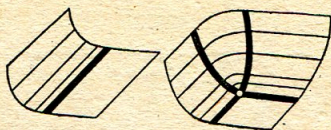


Рис. 55

Особенности выпуклых оболочек кривых и поверхностей общего положения в трехмерном пространстве исследованы В. Д. Седых и В. М. Закалюкиным. В случае кривых с точностью до гладкой замены переменных оболочка задается в окрестности каждой своей точки одной из шести формул:

$$\begin{aligned} z \geq 0, \quad z \geq |x|, \quad z \geq x|x|, \\ z \geq \min(u^4 + xu^2 + yu), \quad z \geq \min^2(x, y, 0), \\ \{z \geq \min^2(x, y, 0), \quad x + y \geq 0\} \end{aligned}$$

(рис. 54). В случае поверхностей — одной из трех формул  $z \geq 0$ ,  $z \geq x|x|$ ,  $z \geq \rho^2(x, y)$ , где  $\rho(x, y)$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до угла  $y \geq c|x|$  (рис. 55). Число  $c > 0$  является модулем (инвариантом): оболочка, соответствующая разным  $c$ , не сводятся одна к другой гладким преобразованием.

Особенности выпуклых оболочек в пространстве большей размерности мало изучены. Согласно В. Д. Седых, выпуклая оболочка общего  $k$ -мерного многообразия в пространстве размерности выше  $k+2$  имеет модули, являющиеся функциями  $k$  переменных.

Много новых интересных особенностей возникает в оптимизационных задачах с ограничениями, например в задаче об обходе препятствия. Их исследование привело к новым результатам в одной из самых классических областей математики — геометрии гладких поверхностей в трехмерном пространстве.

## 12.

### Гладкие поверхности и их проектирования

Гладкая кривая на плоскости может иметь касательную со сколь угодно большим числом точек касания (рис. 56), но это не в случае



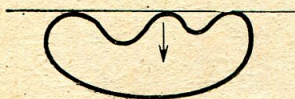


Рис. 56

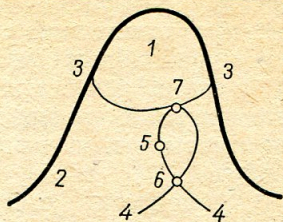


Рис. 57

общего положения. Малым шевелением кривой можно добиться того, что никакая прямая не будет касаться ее более чем в двух точках.

В скольких точках может касаться прямой поверхность общего положения? Немного подумав или поэкспериментировав, читатель может убедиться, что *наибольшее число точек касания равно четырем*; сохраняя три точки касания, прямую можно двигать, две — двигать в двух направлениях.

*Порядок касания* прямой с кривой или поверхностью также может быть различным (например, порядок касания оси  $x$  с графиком  $y=x^2$  первый,  $x^3$  — второй и т. д.). Плоская кривая общего положения не имеет касательных выше второго порядка (второй порядок касания встречается в отдельных точках кривой, называемых *точками перегиба*).

Для поверхности в пространстве дело обстоит уже не так просто. В точках, близ которых поверхность не выпукла, имеются касательные выше первого порядка (они называются *асимптотическими касательными*). Для поверхности общего положения касательные третьего порядка имеются на некоторой линии, а четвертого — в отдельных точках; касательных выше четвертого порядка общая поверхность не имеет.

Все точки поверхности общего положения делятся по порядкам касательных на следующие 7 классов (рис. 57):

- 1) область эллиптических точек (все касательные порядка 1);
- 2) область гиперболических точек (две асимптотические касательные).

Эти две области разделяет общая граница:



3) линия параболических точек (одна асимптотическая касательная).

Внутри области гиперболичности выделяется особая линия:

4) кривая перегиба асимптотических линий (есть касательная третьего порядка).

Наконец, на этой кривой выделены еще особые точки трех типов:

5) точка двойного перегиба (касательная четвертого порядка);

6) перегиб обеих асимптотических линий (две касательные третьего порядка);

7) общие точки линий 3) и 4).

Для поверхностей общего положения в точках 6) происходит пересечение двух ветвей линии перегибов под ненулевым углом, а в точках 7) — касание (первого порядка) линий 3) и 4).

Описанная классификация точек поверхности (О. А. Платонова, Е. Е. Ландис) следующим образом связана с классификацией особенностей волновых фронтов.

Математики называют точками объекты любой природы. Рассмотрим, например, множество всех не-вертикальных прямых на плоскости  $(x, y)$ .

Такие прямые задаются уравнениями вида  $y = ax + b$ . Следовательно, одна прямая определяется парой чисел  $(a, b)$  и может рассматриваться как точка плоскости с координатами  $(a, b)$ . Эта плоскость называется двойственной к исходной плоскости. Ее точки — это прямые исходной плоскости.

Если на исходной плоскости дана гладкая кривая, то в каждой ее точке имеется касательная прямая. При движении точки вдоль кривой касательная меняется, следовательно, движется точка двойственной плоскости. Таким образом, на двойственной плоскости возникает кривая — множество всех касательных исходной кривой. Эта кривая называется двойственной к исходной.

Если исходная кривая гладкая и выпуклая, то двойственная кривая тоже гладкая, если же исходная кривая имеет точку перегиба, то на двойственной кривой ей соответствует точка возврата (рис. 58).

Кривые, двойственные к гладким кривым общего положения, имеют такие же особенности, как волно-



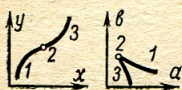


Рис.58

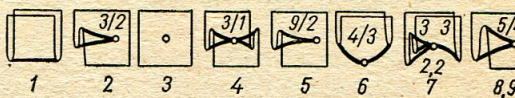


Рис.59

вые фронты общего положения на плоскости, и так же перестраиваются при общей гладкой деформации исходной кривой, как перестраивается распространяющийся общим образом по плоскости общий фронт.

Точно так же плоскости в трехмерном пространстве образуют *двойственное трехмерное пространство*, и все касательные плоскости к гладкой поверхности образуют *двойственную поверхность*. Особенности поверхности, двойственной к поверхности общего положения, такие же, как у волнового фронта, т. е. ребра возврата с ласточкиными хвостами.

Линии параболических точек исходной поверхности соответствует на двойственной поверхности ребро возврата. Особые точки на этой линии (где она касается линии перегиба асимптотических) соответствуют ласточкиным хвостам. Линия самопересечения ласточкиного хвоста состоит из двойных касательных плоскостей исходной поверхности. Следовательно, в точке 7) сливаются две точки касания плоскости с исходной поверхностью, чем и заканчивается однопараметрическое семейство двойных касательных плоскостей.

Классы точек на поверхности общего положения проявляются также в виде различных особенностей видимого контура. Если направление проектирования — общего положения, то особенности — лишь складки и сборки, по теореме Уитни. Однако, выбрав направление проектирования специальным образом, можно получить и некоторые не общие проекции поверхности общего положения. Оказывается, все такие проектирования локально приводятся к проектированим перечисленных ниже 9 поверхностей  $z=f(x, y)$  вдоль оси  $x$ :



тип	1	2	3,4	5
$f$	$x^2$	$x^3 + xy$	$x^3 \pm xy^2$	$x^3 + xy^3$
6	7		8,9	
$x^4 + xy$	$x^4 + x^2y + xy^2$		$x^5 + x^3y \pm xy$	

(поверхности проектируются на плоскость  $(y, z)$ , приведение осуществляется заменой  $X(x, y, z)$ ,  $Y(y, z)$ ,  $Z(y, z)$ ).

Видимые контуры, соответствующие этим проекциям, изображены на рис. 59.

Соответствие между классификацией проектирований и точек на поверхности состоит в следующем. 1 — это проектирование по неасимптотическому направлению (складка Уитни).

Проектирование по асимптотическому направлению в общей точке гиперболической области принадлежит типу 2. Это проектирование имеет особенностью сборку Уитни. При малом шевелении направления проектирования особая точка лишь немного перемещается по поверхности: новое направление оказывается асимптотическим в близкой точке. Таким образом, чтобы увидеть сборку, достаточно взглянуть на общую поверхность по асимптотическому направлению.

При движении поверхности или наблюдателя в отдельные моменты появятся особенности 3, 4 и 6.

Проектирования 6 (и 8 или 9) соответствуют гиперболической области (а именно асимптотическим касательным третьего и четвертого порядков соответственно).

По спине двугорбого верблюда (см. рис. 39) проходит линия перегиба асимптотических. Касательные третьего порядка, приложенные в ее точках, образуют поверхность. Проходя мимо верблюда, мы дважды пересекаем эту поверхность. В момент пересечения видимый контур спины имеет особенность типа  $y^3 = x^4$ , а проектирование — тип 6.



Остальные особенности возникают при проектировании по направлению, асимптотическому в параболической точке. Простейшие из них — особенности 3 и 4. Проектирование 3 реализуется в момент, когда мы, спускаясь с бугра, начинаем видеть его контур (см. рис. 37). Первая появляющаяся точка контура параболическая.

При прохождении особенности 4 происходит слияние или разделение двух компонент видимого контура. Особенности 5, 7, 8 и 9 реализуются лишь при изолированных направлениях проектирования, и их нужно специально искать. (8 и 9 — проектирование вдоль касательной четвертого порядка, 7 — вдоль параболической касательной третьего порядка, 5 — точка «параллельности асимптотических в бесконечно близких параболических точках».) При проектированиях из отдельных точек реализуются еще 4 особенности:  $z = x^3 \pm xy^4$ ,  $z = x^5 + xy$ ,  $z = x^4 + x^2y + xy^3$ .

---

### 13.

---

#### **Задача об обходе препятствия**

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве препятствие, ограниченное гладкой поверхностью (рис. 60). Ясно, что кратчайший путь из  $x$  в  $y$  в обход препятствия состоит из отрезков прямых и отрезков геодезических (кратчайших линий) на поверхности препятствия. На геометрию кратчайших путей сильно влияют различные перегибы поверхности препятствия.

Предположим, что начальная точка пути,  $x$ , зафиксирована, и рассмотрим кратчайшие пути, ведущие из  $x$  во всевозможные точки  $y$ . Пути в загроможденные препятствием точки начинаются с отрезков касающихся препятствия прямых. Продолжения этих путей образуют пучок (однопараметрическое семейство) геодезических на поверхности препятствия. Следующие участки путей представляют собой новые отрезки прямых, касательных к геодезическим; они



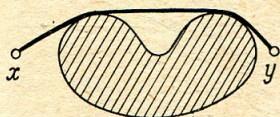


Рис. 60

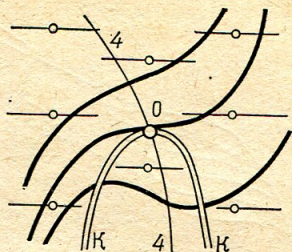


Рис. 61

могут заканчиваться в концевой точке  $y$  или снова касаться поверхности препятствия и т. д.

Рассмотрим простейший случай пути, состоящего из начального и конечного отрезков прямой с отрезком геодезической между ними. Близкие геодезические пучка заполняют на поверхности препятствия некоторую область. В каждой точке этой области геодезическая пучка имеет определенное направление. В точках общего положения это направление не асимптотическое. Условие касания геодезической пучка с асимптотическим направлением — это одно условие на точку поверхности. Для поверхности и пучка общего положения это условие выполняется на некоторой кривой на поверхности (зависящей от пучка). На рис. 61 асимптотические направления изображены горизонтальными отрезками, а кривая касания обозначена буквой  $K$ ; геодезические — жирные линии.

В отдельных точках (0 на рис. 61) эта кривая  $K$  сама будет иметь асимптотическое направление — это точки пересечения  $K$  с кривой 4 перегиба асимптотических (см. п. 12).

Таким образом возникает *двупараметрическое семейство путей*: один параметр нумерует геодезические линии пучка, другой — точку срыва касательной, уходящей с поверхности препятствия. Вдоль каждого пути определена функция времени (отсчитываемая от начальной точки  $x$ ). Время достижения конечной точки  $y$  по такому пути определено не однозначно (в одну конечную точку может вести несколько таких путей), и вдобавок не все наши пути обходят препят-



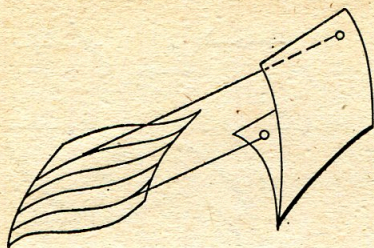


Рис. 62

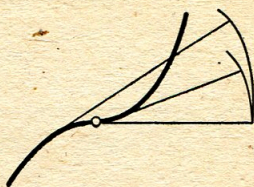


Рис. 63

стве. Тем не менее ясно, что исследование полученной многозначной функции времени составляет необходимый этап изучения особенностей системы кратчайших путей.

Расположим за препятствием еще одну поверхность (стенку) общего положения и рассмотрим отображение срыва поверхности препятствия на стенку, сопоставляющее каждой точке препятствия точку пересечения срывающейся в ней касательной к геодезической пучка со стенкой.

Когда стенка удаляется на бесконечность, отображение срыва переходит в гауссово отображение пучка: каждой точке поверхности препятствия сопоставляется точка единичной сферы, а именно конец вектора длины 1, параллельного касательной к геодезической.

Отображение срыва и гауссово отображение пучка имеют особенности в точности на той линии, где направление геодезической пучка асимптотическое. Эти особенности оказываются складками в общих точках и сборками в особых точках, где направление кривой асимптотическое (О. А. Платонова).

Многозначная функция времени также имеет особенность в точках, соответствующих асимптотическому срыву. При подходящем выборе системы гладких координат функция времени приводится к виду  $T = x - y^{5/2}$  в окрестности общей точки особой поверхности  $y=0$ . Иными словами, если отметить на каждом срывающемся луче точку, отвечающую пути длины  $T$ , то эти точки образуют поверхность фронта с ребром



возврата, локально задающуюся уравнением  $x^2=y^5$  (рис. 62).

Аналогичный результат получается в плоской задаче (в этом случае фронты называются эвольвентами и имеют особенность типа  $x^2=y^5$  в точках касательной перегиба (рис. 63)).

Как устроены функция времени и фронты пространственной задачи в особых точках (точках сборки гауссова отображения пучка), известно лишь качественно; не полностью проанализированы в этом случае и особенности истинной функции времени скорейшего обхода (с большим числом переключений).

Здесь, как и в других вопросах теории особенностей, много еще остается сделать.

---

## 14.

---

### **Симплектическая и контактная геометрии**

Многие вопросы теории особенностей (например, классификация особенностей каустик и волновых фронтов, а также исследование всевозможных особенностей в задачах оптимизации и вариационного исчисления) становятся понятными только в рамках геометрии симплектических и контактных многообразий, освежающе непохожей на обычные геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Начнем с трех примеров особенностей специального вида.

1. **Градиентное отображение.** Рассмотрим в евклидовом пространстве гладкую функцию. *Градиентным отображением* называется отображение, сопоставляющее точке значение градиента функции в ней. Градиентные отображения — весьма специальный класс отображений пространств одинаковой размерности.

Особенности градиентных отображений общего положения отличны от общих особенностей отображений пространств одинаковых размерностей: их «меньше» потому, что не всякое отображение можно реализовать как градиентное, но «больше» потому,



что явление, не типичное для общих отображений, может быть типичным для градиентных.

2. *Нормальное отображение.* Рассмотрим множество всех векторов нормалей к поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Сопоставим каждому вектору его конец (вектору  $p$ , приложенному в точке  $q$ , сопоставляем точку  $p+q$ ). Мы получаем отображение трехмерного многообразия векторов нормалей в трехмерное пространство ( $n$ -мерного в  $n$ -мерное, если начать с подмногообразия любой размерности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве).

Это отображение называется *нормальным отображением* исходного многообразия. Особенности нормальных отображений подмногообразий общего положения составляют специальный класс особенностей отображений пространств одинаковой размерности. Критические значения нормального отображения образуют *каустику* (геометрическое место центров кривизны) исходного подмногообразия: см. рис. 33, где исходное многообразие — эллипс.

3. *Гауссово отображение.* Рассмотрим двустороннюю поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Перенесем единичные векторы положительных нормалей из каждой точки поверхности в начало координат. Концы этих векторов лежат на единичной сфере. Полученное отображение поверхности на сферу называется *гауссовым отображением*.

Гауссовы отображения составляют еще один специальный класс отображений многообразий одинаковой размерности ( $n-1$ , если начинать с гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве).

И вот оказывается, что *типичные особенности отображений всех этих трех классов* (градиентных, нормальных и гауссовых) *одинаковы*: все три теории — частные случаи общей теории лагранжевых особенностей в симплектической геометрии.

Симплектическая геометрия — это геометрия фазового пространства (пространства координат и импульсов классической механики). Она явилась итогом длительного развития механики, вариационного исчисления и т. д.

В прошлом веке эту область геометрии называли аналитической динамикой, и Лагранж гордился, что изгнал из нее чертежи. Чтобы проникнуть в симплек-



тическую геометрию, минуя длинный исторический путь, проще всего воспользоваться аксиоматическим методом, имеющим, как заметил Б. Рассел, много преимуществ, подобных преимуществам воровства перед честным трудом.

Сущность этого метода состоит в том, чтобы превращать теоремы в определения. Содержательная часть теоремы становится тогда *мотивировкой* определения, и алгебраисты ради повышения авторитета своей науки ее обычно опускают (понять немотивированное определение невозможно, но многие ли из пассажиров самолета знают, как и почему он изготовлен?).

*Теорема* Пифагора, бывшая в свое время высшим достижением математической культуры, низведена в современном аксиоматическом изложении евклидовой геометрии до малозаметного *определения*: *евклидовой структурой* в линейном пространстве называется линейная по каждому аргументу симметрическая функция пары векторов (*скалярное произведение*), для которой скалярный квадрат любого ненулевого вектора положителен.

Определение *симплектической структуры* в линейном пространстве аналогично: это линейная по каждому аргументу кососимметрическая функция пары векторов (*кососкалярное произведение*), которая невырождена (любой ненулевой вектор не всем векторам косоортогонален, т. е. его кососкалярное произведение с некоторыми векторами ненулевое).

*Пример.* Назовем кососкалярным произведением двух векторов на ориентированной плоскости ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы (т. е. определитель матрицы, составленной из компонент векторов). Это произведение — симплектическая структура на плоскости.

В трехмерном пространстве (и вообще в нечетномерном пространстве) симплектических структур нет. Симплектическую структуру в четырехмерном (и вообще в четномерном) пространстве легко построить, представив пространство в виде суммы двухмерных плоскостей: кососкалярное произведение распадается в сумму площадей проекций на эти плоскости.

Все симплектические пространства фиксированной размерности изоморфны (как и все евклидовы). Мы



будем называть кососкалярное произведение двух векторов «площадью» натянутого на них параллелограмма. Каждое линейное пространство в евклидовом пространстве имеет *ортогональное дополнение*, его размерность равна коразмерности исходного подпространства.

В симплектическом пространстве определено *косоортогональное дополнение* к линейному подпространству: оно состоит из всех векторов, кососкалярные произведения которых со всеми векторами подпространства равны нулю. Размерность косоортогонального дополнения также равна коразмерности исходного подпространства. Например, косоортогональное дополнение к прямой на плоскости — сама эта прямая.

Линейное подпространство, являющееся своим собственным косоортогональным дополнением, называется *лагранжевым подпространством*. Его размерность равна половине размерности исходного симплектического пространства.

*Риманова структура* на многообразии задается выбором евклидовой структуры в пространстве, касательном к многообразию в любой точке.

Точно так же *симплектическая структура на многообразии* задается выбором симплектической структуры в каждом его касательном пространстве; однако в отличие от риманова случая эти структуры не произвольны, а связаны между собой, как это объяснено ниже.

Риманова структура на многообразии позволяет измерять длины кривых на нем, суммируя длины малых векторов, составляющих кривую. Точно так же симплектическая структура позволяет измерять «площади» ориентированных двумерных поверхностей, лежащих в симплектическом многообразии (суммируя «площади» составляющих поверхность малых параллелограммов). Дополнительное условие, связывающее симплектические структуры в разных касательных пространствах, состоит в следующем: «площадь» всей границы любой трехмерной фигуры равна 0.

В линейном симплектическом пространстве можно ввести структуру симплектического многообразия, определив кососкалярное произведение приложенных в любой точке векторов как кососкалярное произведение векторов, полученных из них параллельным



переносом в начало. Легко проверить, что условие согласования здесь выполнено.

Существует много неизоморфных друг другу римановых структур в окрестности точки плоскости или пространства большего числа измерений (для различения их Риман и ввел свою кривизну).

В отличие от римановых многообразий *все симплектические многообразия фиксированной размерности в окрестности каждой своей точки изоморфны* (отображаются друг на друга с сохранением «площадей»). Таким образом, локально каждое симплектическое многообразие изоморфно стандартному симплектическому линейному пространству. В таком пространстве можно ввести координаты  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  так, что косокалярное произведение равно сумме ориентированных площадей проекций на плоскости  $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ .

Подмногообразии симплектического пространства называется *лагранжевым многообразием*, если его касательная плоскость в каждой точке лагранжева.

Расслоение симплектического пространства на подмногообразия называется *лагранжевым расслоением*, если слои лагранжевы.

Всякое лагранжево расслоение локально изоморфно стандартному расслоению фазового пространства над конфигурационным,  $(p, q) \rightarrow q$  (слои — пространства импульсов,  $q = \text{const}$ ). Конфигурационное  $q$ -пространство называется *базой* этого расслоения.

Предположим теперь, что в пространстве лагранжева расслоения дано еще одно лагранжево многообразие. Тогда возникает гладкое отображение этого лагранжева многообразия на базу лагранжева расслоения (т. е. на конфигурационное пространство с координатами  $q_i$ ): каждой точке  $(p, q)$  лагранжева многообразия сопоставляется точка  $q$  конфигурационного пространства.

Полученное отображение многообразий одинаковой размерности  $n$  называется *лагранжевым отображением*, а его особенности — *лагранжевыми особенностями*.

Это — специальный класс особенностей гладких отображений многообразий одинаковой размерности. Для этого класса построена классификационная теория, аналогичная общей теории особенностей.



При  $n=2$  лагранжевы особенности общего положения исчерпываются складками и сборками, как и общие особенности (впрочем, лагранжева сборка имеет два лагранжево неэквивалентных\* варианта).

Особенности лагранжевых отображений трехмерных лагранжевых многообразий общего положения уже не все встречаются среди обычных особенностей общего положения.

Теперь мы покажем, что *градиентные, нормальные и гауссовы особенности лагранжевы*.

1. Пусть  $F$  — гладкая функция от  $p$ . Тогда многообразии  $q = \partial F / \partial p$  лагранжево. Поэтому особенности градиентного отображения лагранжевы.

2. Рассмотрим гладкое подмногообразие в евклидовом пространстве. Рассмотрим множество всех перпендикулярных ему векторов (во всех его точках  $q$ ). Многообразие, образованное векторами  $p$ , приложенными в точках  $p+q$ , лагранжево. Нормальное отображение можно рассматривать как лагранжево отображение этого многообразия на базу,  $(p, p+q) \rightarrow (p+q)$ .

3. Рассмотрим многообразие всех ориентированных прямых в евклидовом пространстве. Это многообразие симплектическое, так как его можно рассматривать как фазовое пространство движения точки по сфере (направление прямой определяет точку на сфере, а точка пересечения прямой с перпендикулярной ей касательной плоскостью сферы — величину импульса).

Рассмотрим многообразие ориентированных нормалей к поверхности в нашем пространстве. Это подмногообразие в симплектическом многообразии прямых лагранжево. Гауссово отображение можно рассматривать как лагранжево отображение (отображение проектирования построенного подмногообразия на сферу, являющуюся базой лагранжева расщепления фазового пространства).

Таким образом, теории градиентных, нормальных и гауссовых особенностей сводятся к теории лагранжевых особенностей.

---

\* Лагранжева эквивалентность двух лагранжевых особенностей — это отображение первого лагранжева расщепления на второе, переводящее первую симплектическую структуру во вторую и первое лагранжево подмногообразие во второе.



Встретившаяся нам в конце симплектическая структура многообразия ориентированных прямых — не столь искусственное образование, как это кажется на первый взгляд. Дело в том, что множество решений любой вариационной задачи (или вообще множество решений уравнений Гамильтона с фиксированным значением функции Гамильтона) образует симплектическое многообразие, очень полезное для исследования свойств решений.

Рассмотрим, например, двухпараметрическое семейство лучей, срывающихся с геодезических на поверхности препятствия в трехмерном пространстве, как это указано на рис. 62. Это семейство оказывается двумерным лагранжевым подмногообразием четырехмерного пространства всех лучей. Но в отличие от ранее встречавшихся нам лагранжевых подмногообразий это лагранжево многообразие само имеет особенности. Особенности эти проявляются там, где срывающийся луч — асимптотический для поверхности препятствия. Такие лучи образуют ребро возврата (типа  $x^2 = y^3$ ) лагранжева многообразия срывающихся лучей.

На этом ребре возврата есть еще особые точки, в окрестности которых многообразие срывающихся лучей устроено как раскрытый ласточкин хвост (поверхность в четырехмерном пространстве многочленов  $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ , образованная многочленами с трехкратными корнями).

Эта поверхность встречается также в других задачах теории особенностей (например, при исследовании заметания каустики ребрами возврата движущихся волновых фронтов) и является, видимо, одним из основных примеров будущей теории лагранжевых многообразий с особенностями.

В евклидовой и в римановой геометрии имеется обширная теория внешней кривизны: кроме внутренних свойств подмногообразия, определяемых его метрикой, имеются еще различия в расположении подмногообразий с одинаковыми внутренними геометриями в объемлющем пространстве.

В симплектической геометрии, как недавно доказал А. Б. Гивенталь, дело обстоит проще: внутренняя геометрия (сужение симплектической структуры на множество касательных векторов к подмногообра-



зию) определяет внешнюю. Иными словами, *подмногообразия с одинаковой внутренней геометрией локально переводятся друг в друга сохраняющим симплектическую структуру диффеоморфизмом объемлющего пространства.*

Здесь открывается новая глава теории особенностей — исследование особенностей расположения подмногообразий в симплектическом пространстве, на важность которого обратил внимание Р. Мельроз в недавних работах по дифракции. Начало классификации таких особенностей получается, по теореме Гивенталья, из результатов Ж. Мартине и его последователей о вырождениях симплектической структуры. Например, двухмерное подмногообразие общего положения в четырехмерном симплектическом пространстве локально приводится сохраняющим симплектическую структуру преобразованием к одной из двух нормальных форм:

$$p_2 = q_2 = 0 \text{ или } q_1 = 0, p_2 = p_1^2.$$

На нечетномерных многообразиях не бывает симплектических структур, но зато бывают контактные. Контактная геометрия играет для оптики и теории распространения волн такую же роль, как симплектическая для механики.

Контактная структура на нечетномерном многообразии определяется выбором в касательном пространстве в каждой точке гиперплоскости (подпространства коразмерности один). Два поля гиперплоскостей на многообразии фиксированной размерности локально эквивалентны (переводятся друг в друга диффеоморфизмом), если только оба они общего положения вблизи изучаемых точек.

*Контактной структурой* называется поле гиперплоскостей, являющееся полем общего положения вблизи каждой точки нечетномерного многообразия.

Контактным является многообразие всех линейных элементов на плоскости. Оно трехмерно. Контактная структура задается так: скорость движения элемента принадлежит (гипер)плоскости поля, если скорость движения точки приложения принадлежит элементу. Точно так же определяется контактная структура в  $2n - 1$ -мерном многообразии элементов гиперплоскостей на любом  $n$ -мерном многообразии.



Роль лагранжевых многообразий в контактном случае переходит к лежандровым (интегральным подмногообразиям поля гиперплоскостей наибольшей возможной размерности, т. е. размерности  $m$  в контактном многообразии размерности  $2m+1$ ).

Особенности волновых фронтов, преобразований Лежандра, а также гиперповерхностей, двойственных к гладким, — это лежандровы особенности. Вся симплектическая теория (включая, например, теорему Гивенталья) имеет контактные аналоги, чрезвычайно полезные для исследования особенностей в вариационных задачах.

За последние годы симплектическая и контактная геометрии появляются во всех отделах математики; как у каждого жаворонка должен появиться хохлак, так всякая область математики в конце концов симплектизируется. В математике есть ряд операций разных уровней: функции действуют на числа, операторы — на функции, функторы — на операторы и т. д. Симплектизация относится к небольшому числу операций самого высшего уровня, действующих не на какие-нибудь мелочи (функции, категории, функторы), а на всю математику сразу. Хотя известно уже несколько таких операций высшего уровня (например, алгебраизация, бурбакизация, комплектификация, суперизация, симплектизация), для них нет никакой аксиоматической теории.

---

## 15.

---

### Комплексные особенности

Математики хорошо знают, что переход к комплексным числам обычно не усложняет, а упрощает задачу. Например, всякое алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет ровно  $n$  комплексных корней, в то время как нахождение числа вещественных корней — нелегкая задача.

Причина этого явления состоит в следующем. Одно комплексное уравнение — это два вещественных. Множества, заданные двумя уравнениями (скажем, линии в пространстве или точки на плоскости)



называются множествами коразмерности два. Множества коразмерности два не разделяют объемлющее пространство. Поэтому от любой точки пространства вне множества коразмерности два можно добраться до любой другой такой точки путем, обходящим это множество.

Рассмотрим пространство каких-либо комплексных объектов (скажем, многочленов фиксированной степени с комплексными коэффициентами). Особые объекты (скажем, многочлены с кратными корнями) определяются *комплексным* уравнением на коэффициенты. Следовательно, *множество особых объектов имеет коразмерность два и не делит пространство всех объектов*. Например, комплексный ласточкин хвост, образованный в пространстве комплексных многочленов  $x^4+ax^2+bx+c$  многочленами с кратными корнями, не делит пространство всех таких многочленов (вещественно шестимерное).

Поэтому от любого неособого комплексного объекта (например, многочлена без кратных корней) к любому другому можно перейти непрерывным путем, оставаясь среди неособых объектов (в примере — среди многочленов без кратных корней). Но при малой деформации неособого объекта его топология не меняется (скажем, число корней многочлена без кратных корней не меняется при достаточно малом изменении коэффициентов). Следовательно, топологические инварианты одинаковы у всех неособых объектов данного класса (например, число комплексных корней всех многочленов данной степени без кратных корней одинаково). Итак, остается изучить топологию одного неособого комплексного объекта (найти число комплексных корней одного уравнения без кратных корней) \*, чтобы узнать топологию всех. Напротив, в вещественном случае множество особых объектов делит пространство всех объектов на части. Например, обычный ласточкин хвост (рис. 30) делит пространство вещественных многочленов  $x^4+ax^2+bx+c$  на 3 части: в одной лежат многочлены с че-

---

\* Достаточно взять уравнение  $(x-1)\dots(x-n)=0$ ; к приведенным рассуждениям остается добавить очень немного, чтобы получить вполне строгое доказательство «основной теоремы алгебры», по которой всякое уравнение степени  $n$  имеет  $n$  комплексных корней.



тырьмя вещественными корнями, в другой с двумя, в третьей — без вещественных корней (сообразите, в какой части сколько корней!).

Рассмотрим теперь в качестве объектов кривые, заданные на плоскости  $(x, y)$  условием  $f(x, y) = 0$ , где  $f$  — какой-либо многочлен фиксированной степени. Например, если степень равна 2, то неособая кривая будет, как правило, эллипсом или гиперболой (все другие кривые второго порядка соответствуют исключительным, особым случаям).

Множество пар комплексных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению  $f(x, y) = 0$ , называется *комплексной кривой*. С вещественной точки зрения это двумерная поверхность в четырехмерном пространстве. Как правило (почти при любых коэффициентах многочлена  $f$ ) комплексная кривая — неособая. Из предыдущих рассуждений следует, что все неособые кривые данной степени топологически одинаковы. Чтобы найти топологию этих поверхностей, достаточно поэтому изучить одну из неособых комплексных кривых данной степени.

Ответ оказывается таким: поверхность получается из сферы приделыванием  $g = (n-1)(n-2)/2$  ручек и выкидыванием из образовавшейся поверхности  $n$  точек. Например, комплексная прямая ( $n=1$ ) — это вещественная плоскость (сфера без одной точки), комплексная окружность — вещественный цилиндр (сфера без двух точек), комплексная кривая степени 3 топологически устроена как поверхность тора, проколота в трех местах.

Самый простой способ в этом убедиться — получить неособую кривую небольшим шевелением из набора  $n$  прямых. Начнем, скажем, с  $n$  вещественных прямых, расположенных общим образом на плоскости и потому пересекающихся в  $n(n-1)/2$  точках (рис. 64). Каждая прямая задается линейным неоднородным уравнением вида  $l=0$ , где  $l = ax + by + c$ . Перемножим соответствующие  $n$  прямым линейные функции  $l$ . Произведение обращается в нуль в точности на  $ln$  прямых. Замена распадающейся на прямые кривой  $f=0$  на неособую кривую  $f=$  (малое число) и есть нужное шевеление.

При переходе к комплексным  $x$  и  $y$  каждая прямая становится в вещественном смысле плоскостью, так что кривая  $f=0$  превращается при комплексификации в набор  $n$  плоскостей. Каждая две такие плоскости в четырехмерном пространстве пересекаются по точке (ведь точки при комплексификации так и остаются точками). При описанном выше шевелении поверхность ста-





Рис. 64

новится гладкой. Сглаживание устроено так: окрестность точки пересечения на каждой из обеих пересекающихся плоскостей выкидывается и затем две образовавшихся окружности склеиваются друг с другом (так, чтобы получилась ориентируемая поверхность).

Например, из трех попарно пересекающихся по точке сфер при сглаживании трех точек пересечения получается тор (рис. 64). Точно так же из  $n$  сфер получается сфера с  $(n-1)(n-2)/2$  ручками, а из  $n$  плоскостей — сфера со столькими же ручками без  $n$  точек.

Тем самым мы решили задачу о топологическом строении неособой комплексной алгебраической кривой степени  $n$  (сфера с ручками, возникающая в этой конструкции, называется римановой поверхностью кривой)\*.

Что же касается топологического строения вещественной кривой степени  $n$ , то оно до сих пор известно лишь для кривых малой степени (неизвестно, как могут располагаться ветви кривой на плоскости).

Подобно теории кривых, теория особенностей также упрощается при переходе в комплексную область; многие явления, кажущиеся с вещественной точки зрения совершенно загадочными, в комплексной области получают прозрачное объяснение.

Рассмотрим, например, строение простейших критических точек комплексных функций (т. е. комплексификацию теории максимумов и минимумов).

Для вещественной функции критические точки связаны с перестройками линий или поверхностей уровня. Например, вещественная линия уровня  $x^2 +$

\* Между прочим, из топологических свойств тора (а именно из того, что пара меридианов делит тор на две части) следует, что периоды колебаний с одинаковой полной энергией в обоих ямах механической системы с потенциальной энергией четвертой степени одинаковы (на торической римановой поверхности множества уровня энергии — фазовые кривые обеих ям — разные меридианы).



$+y^2=c$  функции  $f=x^2+y^2$  пуста при  $c<0$  и является окружностью при  $c>0$ . Для функции  $x^2-y^2$  перестройка иная: асимптоты гиперболы  $x^2-y^2=c$  по-разному соединены ветвями этой гиперболы в зависимости от знака  $c$ . В этих примерах единственное критическое значение  $c=0$ . Многообразия критического уровня — негладкие, некритического — гладкие.

В комплексном случае ось значений функции становится плоскостью комплексного переменного  $s$ . Критические значения лежат в этой плоскости изолированно и не делят ее на части. Поэтому многообразие уровня  $s$  при всех некритических значениях  $s$  устроены топологически одинаково. Если  $s$ , изменяясь, проходит через критическое значение, то никакой перестройки не происходит: многообразии уровня, правда, становится особым в момент прохождения  $s$  через критическое значение, но затем мгновенно возвращается в первоначальное состояние.

В комплексном случае вместо того, чтобы *проходить* через критическое значение, нужно *обойти* вокруг него (проявление общего принципа, согласно которому комплексным аналогом вещественного понятия «край» является «разветвленное накрытие»).

Итак, рассмотрим на плоскости комплексного переменного  $s$  путь, обходящий критическое значение.

Каждой точке этого пути отвечает неособое многообразие уровня,  $f=s$ . При непрерывном изменении  $s$  многообразие уровня непрерывно меняется, оставаясь топологически таким же.

Иными словами, мы можем сопоставить каждой точке начального многообразия уровня близкую точку близкого многообразия уровня так, что получится взаимно-однозначное взаимно-непрерывное соответствие между обоими многообразиями уровня. Таким образом, мы получаем отождествление исходного многообразия уровня  $s$  с многообразием близкого уровня  $s$ .

При непрерывном изменении  $s$  это отождествление непрерывно меняется, и в конце концов, когда  $s$  возвращается к исходному положению, мы получаем отождествление исходного многообразия уровня  $s$  самим собой. Это отождествление называется *мондромией*.



Итак, монодромия есть взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение многообразия неособого уровня на самого себя. Оказывается, это отображение — вовсе не тождественное преобразование: когда  $s$  делает полный оборот вокруг критического значения, возвращается на место лишь многообразие уровня  $s$ , а вовсе не его отдельные точки\*.

Чтобы понять, что происходит при монодромии с точками многообразия неособого уровня, рассмотрим пример:

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Изучим прежде всего многообразие неособого уровня  $x^2 + y^2 = c$ ,  $c \neq 0$ . В вещественном случае это уравнение определяет окружность, нас же интересует «комплексная окружность» — множество точек  $(x, y)$  плоскости двух комплексных переменных, сумма квадратов (комплексных) координат которых имеет фиксированное значение.

Мы уже знаем, что эта поверхность топологически устроена как цилиндр в четырехмерном пространстве.

Оказывается, монодромия поворачивает каждую из составляющих цилиндр окружностей на свой угол, меняющийся непрерывно от нуля на одном основании до  $2\pi$  на другом. Таким образом, оба края цилиндра поточечно остаются на месте, в то время как поверхность перекручивается на целый оборот, так что, например, образующая цилиндра превращается в спираль, делающую на пути от одного основания к другому полный оборот вокруг цилиндра (рис. 65).

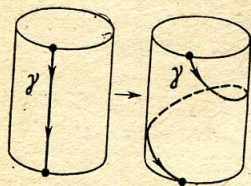


Рис. 65

Чтобы понять, почему это так, исследуем подробнее «комплексную окружность».

\* Ситуация здесь в точности такая же, как с листом Мёбиуса. При непрерывном обходе вдоль осевой окружности листа Мёбиуса мы можем непрерывно отождествлять поперечные ей отрезки. Но когда мы впервые вернемся к исходному отрезку, полученное отождествление этого отрезка с самим собой будет менять местами его концы.



Уравнение ее можно записать в виде  $y = \sqrt{c - x^2}$ . Из этой формулы видно, что каждому (комплексному) значению  $x$  соответствует пара значений  $y$ , за исключением  $x = \pm\sqrt{c}$ , — каждому из этих двух особых значений  $x$  соответствует единственное (нулевое) значение  $y$ .

Следовательно, график комплексной «двузначной функции»  $y = \sqrt{c - x^2}$  распространит над плоскостью комплексной переменной  $x$  двулистно, причем оба листа соединены только в двух точках. Однако разделить оба листа, удалив лишь эти две точки, не удастся. В самом деле, заставим  $x$  обойти одну из этих точек по малому контуру, охватывающему ее один раз. Соответствующее значение  $y$ , непрерывно меняясь, вернется не к прежнему значению, а к другому. Действительно, из формулы

$$c - x^2 = (\sqrt{c} - x)(\sqrt{c} + x)$$

видно, что при обходе  $x$  вокруг одной из точек  $\pm\sqrt{c}$ , аргумент одного из сомножителей меняется на  $2\pi$ , а другого не меняется. Значит, аргумент  $y$  меняется при указанном обходе на  $\pi$ , т. е.  $y$  меняет знак и переходит с одного листа на другой.

При двукратном обходе  $x$  вокруг точки  $\sqrt{c}$  величина  $y$  возвращается к исходному значению. Точки  $x = \pm\sqrt{c}$  называются *точками ветвления* функции  $y = \sqrt{c - x^2}$ .

Чтобы лучше представить себе поверхность, заданную этой функцией, соединим обе точки ветвления отрезком. Если точка  $x$  гуляет по плоскости, не пересекая этого отрезка, то  $y$  возвращается к первоначальному значению всякий раз, когда  $x$  описывает замкнутый путь. Действительно, однократный обход любой из точек ветвления меняет лист  $y$ , поэтому обход всего отрезка не меняет знака  $y$ .

Ясно, что наша поверхность  $x^2 + y^2 = c$  топологически устроена как объединение двух экземпляров плоскости комплексного переменного  $x$ , разрезанной вдоль отрезка между точками ветвления, при склеивании верхнего берега разреза на каждом экземпляре с нижним берегом на другом. Топологически эта поверхность есть цилиндр. Разрез изображается на



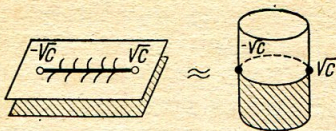


Рис. 66

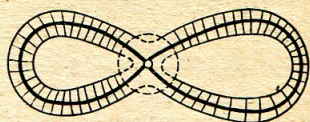


Рис. 67

этом цилиндре экваториальной окружностью (рис. 66).

При приближении  $c$  к критическому значению 0 обе точки ветвления сближаются. Соединяющий их отрезок и обходящий его путь на римановой поверхности в пределе при  $c \rightarrow 0$  исчезают в критической точке. Поэтому экваториальный цикл на цилиндре  $x^2 + y^2 = c$  называют *исчезающим циклом*.

Для  $c > 0$  этот исчезающий цикл — обычная вещественная окружность. Итак мы разобрались в строении множества неособого уровня вблизи критической точки при фиксированном значении функции, близком к критическому. Вид функции при этом не важен, лишь бы критическая точка была невырожденной. Ибо все невырожденные критические точки комплексных функций топологически локально одинаковы в соответствии с объясненным выше общим принципом (комплексное вырождение накладывает два вещественных условия). В частности, топология исчезающего цикла для гиперболического случая ( $x^2 - y^2 = c$ ) такая же, как для эллиптического,  $x^2 + y^2 = c$ , только в гиперболическом случае исчезающий цикл весь лежит в комплексной области.

Пусть теперь значение  $c$  обходит по малому контуру вокруг критического значения. Применим наш анализ комплексной линии уровня функции к исследованию монодромии. Если выкинуть малую окрестность особой точки, то все линии уровня (вещественные или комплексные), достаточно близкого к критическому, можно взаимно-непрерывно и взаимно-однозначно спроектировать на линию критического уровня (вне указанной окрестности особой точки, рис. 67).

Отсюда следует, что монодромия, т. е. отождествление линий уровня  $c$ , непрерывно зависящее от пути, пробегаемого значением  $c$  при обходе критиче-





Рис. 68

ского значения, может быть выбрана так, что вне указанной окрестности все точки линии уровня вернуться на место, когда  $c$  совершит полный оборот.

Остается разобраться, что произойдет внутри окрестности. При этом достаточно рассмотреть стандартную функцию  $f = x^2 + y^2$ . Часть комплексной линии уровня, попавшая внутрь окрестности, топологически представляет собой цилиндр, оба края которого выходят на границу окрестности. В то же время эта часть двулистно накрывает область на плоскости комплексного переменного  $x$  с ветвлением в точках  $\pm\sqrt{c}$ , как это объяснено выше (рис. 66).

Когда  $c$  совершает полный оборот вокруг нуля, отрезок между точками ветвления совершает пол-оборота, в результате чего мы возвращаемся к прежним (хотя и переставившимся) точкам ветвления. Непрерывно отождествляя между собой возникающие по дороге поверхности (так, чтобы точки краев оставались все время близкими к своему исходному положению), мы получим в конце концов отображение цилиндра на себя (монодромию), устроенное следующим образом.

Отрезок образующей цилиндра, обозначенный на рисунке 68, 1 буквой  $\gamma$ , в процессе отождествления переходит в кривые, обозначенные этой же буквой на промежуточных поверхностях (2, 3, 4). В конце концов мы возвращаемся к исходному цилиндру (5), но кривая  $\gamma$  переходит в новую кривую с теми же концами. Легко сообразить, что на поверхности цилиндра эта новая кривая делает один полный оборот вдоль направляющей окружности, как и изображено на рис. 65.

Таким образом, монодромия перекручивает цилиндрическую часть комплексной линии уровня функции, расположенную вблизи критической точки, ровно на один целый оборот. Исчезающий цикл при



таком перекручивании переходит в себя (повернувшись на  $\pi$ ). Другие же циклы на линии уровня преобразуются в, вообще говоря, новые циклы. А именно, всякий раз, когда какой-либо цикл проходил вдоль образующей нашего цилиндра (т. е. пересекал исчезающий цикл) перекручивание изменяет проходящий цикл на исчезающий, так что (с точностью до непрерывных деформаций) образ проходящего цикла при монодромии получается из проходящего цикла добавлением столько раз взятого исчезающего цикла, сколько раз проходящий цикл (с учетом знаков) пересекал исчезающий. Если это число равно нулю, то проходящий цикл называется ортогональным исчезающему. Такой цикл при монодромии не меняется.

Мы вывели, таким образом (для функций двух переменных), «формулу Пикара — Лефшеца», основную в комплексной теории критических точек функций. При переходе к функциям любого числа  $n$  переменных исчезающий цикл становится сферой размерности  $n - 1$ , а цилиндр — множеством всех его касательных векторов. Если число переменных  $n$  нечетно, то монодромия действует на классы циклов как отражение в зеркале, ортогональном исчезающему циклу (сам он при монодромии меняет знак).

Сложные критические точки функций при общих малых шевелениях распадаются на простейшие. В результате общего малого шевеления возникает несколько критических значений и около каждого из них — по исчезающему циклу. Обход каждого из критических значений определяет преобразование монодромии. Подход от некритического исходного значения к каждому критическому значению по некритическому пути переносит исчезающий цикл в многообразии исходного неособого уровня пошевеленной функции. В результате там возникает целый набор исчезающих циклов.

Например, неособая комплексная линия уровня функции  $x^3 + y^2$  — это тор без одной точки. Малое шевеление  $x^3 - \varepsilon x + y^2$  имеет два критических значения (рис. 69). Подход к ним от некритической комплексной линии уровня определяет на этом торе два исчезающих цикла: параллель и меридиан тора. Точно так же на поверхности уровня функции  $x^3 + y^2 + z^2$



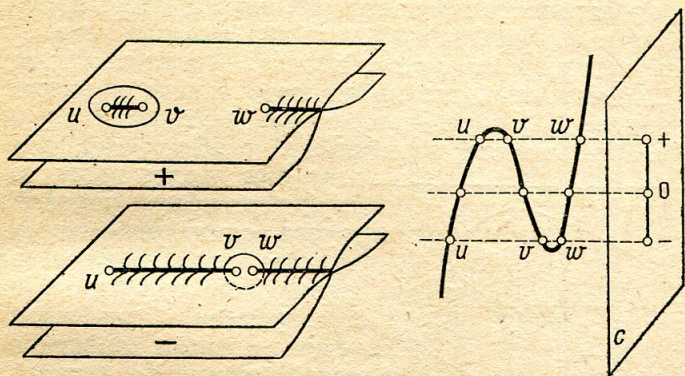


Рис. 69

лежат две исчезающих сферы, пересекающиеся в одной точке. Соответствующие им преобразования монодромии — отражения пространства классов циклов в ортогональных исчезающим циклам зеркалах.

Таким образом, в теории критических точек функций появляются группы отражений: они составляются преобразованиями монодромии при обходе вокруг критических значений.

Теория групп отражений представляет собой хорошо разработанный отдел математики. Рассмотрим, например, на плоскости два зеркала. Если угол между ними несоизмерим с  $2\pi$ , то число разных преобразований, полученных комбинированием отражений в этих зеркалах, бесконечно, а если соизмерим — то конечно. Точно так же в трехмерном пространстве найдены все расположения проходящих через 0 зеркал, порождающие конечное число преобразований; классификация таких расположений известна и при любой размерности пространства.

Вычисление групп монодромий простейших вырожденных критических точек функций вскрыло глубокие связи между теориями критических точек функций, каустик и волновых фронтов с одной стороны и теорией групп, порожденных отражениями — с другой.

Проявления этой связи иногда выглядят довольно неожиданно. Рассмотрим, например, задачу об обхо-



де препятствия, ограниченного кривой общего положения с обычной точкой перегиба на плоскости. Линии уровня времени в этой задаче — эвольвенты кривой. Эти эвольвенты имеют особенности на кривой (порядка  $3/2$ ) и на касательной перегиба (порядка  $5/2$ ). Оказывается, перестройкой особенностей эволь-

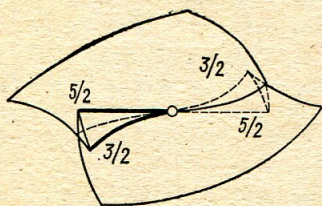


Рис. 70

вент при прохождении точки перегиба управляет группа симметрий икосаэдра. Отсюда выводится, например, что график функции времени в окрестности точки перегиба гладкой заменой координат приводится к нормальной форме вроде ласточкиного хвоста.

А именно, нормальной формой является поверхность многочленов  $x^5 + ax^4 + bx^2 + c$  с кратными корнями (или поверхность касательных к кривой  $(t, t^3, t^5)$ , рис. 70; О. В. Ляшко, О. П. Щербак).

---

## 16.

### Мистика теории катастроф

Естественнонаучные приложения теории особенностей не исчерпывают всех направлений теории катастроф: наряду с конкретными исследованиями типа работ Зимана имеются скорее философские труды математика Р. Тома, который первым осознал всеобъемлющий характер работ Уитни по теории особенностей (и предшествовавших им работ Пуанкаре и Андронова по теории бифуркаций), ввел термин «теория катастроф» и занялся широкой пропагандой этой теории.

Качественной особенностью работ Тома по теории катастроф является их своеобразный стиль: предчувствуя направление будущих исследований, Том не располагает не только доказательствами, но и точными формулировками своих результатов. Зиман, горячий поклонник этого стиля, замечает, что смысл слов



Тома становится понятным лишь после того, как вставишь 99 своих строк между каждыми двумя строками Тома.

Чтобы читатель мог составить об этом стиле собственное представление, приведу здесь образчик из обзора перспектив теории катастроф, сделанного Томом в 1974 году:

«В философском, метафизическом плане теория катастроф не может принести ответа на великие проблемы, волнующие человека. Но она поощряет диалектическое, гераклитовское видение Вселенной, видение мира как театра непрерывной борьбы между «логосами», между архетипами. Теория катастроф приводит нас к глубоко политеистическому взгляду: во всем следует различать руку Богов. И здесь, быть может, теория катастроф найдет неизбежные пределы своей практической применимости. Она разделит, быть может, участь психоанализа. Нет сомнения, что основные психологические открытия Фрейда верны. И все же знание этих фактов принесло мало практической пользы (при лечении психических заболеваний). Как герой Илиады не мог противостоять воле бога, скажем Посейдона, не опираясь на мощь другого божества, скажем Афины, так и мы не сможем ограничить действие архетипа, не противопоставляя ему архетипа-антагониста в борьбе с неопределенным исходом. Те самые причины, которые нам позволяют располагать нашими возможностями действовать в одних случаях, осуждают нас на бессилие в других. Быть может, удастся доказать неизбежность некоторых катастроф, например болезней или смерти. Познание не обязательно будет обещанием успеха или выживания: оно может вести также к уверенности в нашем поражении, в нашем конце»\*.

Прекрасные результаты теории особенностей, к счастью, не зависят от мрачной мистики теории катастроф. Но и в теории особенностей, как и во всей математике, есть нечто таинственное: это удивительные совпадения и связи между далекими на первый взгляд предметами и теориями.

Одним из примеров такого совпадения, остающе-

---

\* Thom R. Catastrophes Theory: its present state and future perspectives in: Dynamical Systems, Warwick, 1974, Lecture Notes in Math., 468, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, p. 372.



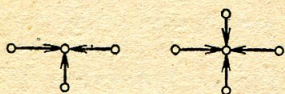


Рис. 71

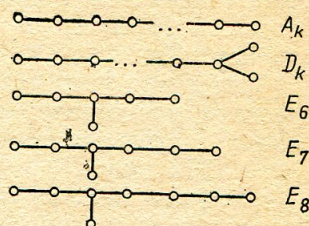


Рис. 72

гося загадочным (хотя кое-что и понято), является так называемая  $A$ ,  $D$ ,  $E$ -классификация. Она встречается в таких разных отделах математики, как, например, теории критических точек функций, алгебр Ли, категорий линейных пространств, каустик, волновых фронтов, правильных многогранников в трехмерном пространстве и кристаллографических групп, порожденных отражениями.

Общим во всех этих случаях является требование простоты, или отсутствия модулей. Простота означает следующее. Каждая классификация есть разбиение некоторого пространства объектов на классы. Объект называется простым, если все близкие к нему объекты принадлежат конечному набору классов.

Пример 1. Назовем два набора проходящих через точку  $0$  на плоскости прямыми эквивалентными, если один из них переходит в другой при линейном преобразовании  $(x, y) \rightarrow (ax+by, cx+dy)$ . Любой набор трех прямых прост (любой набор трех различных прямых эквивалентен набору  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=0$ ). Любой набор четырех проходящих через  $0$  прямых не прост (докажите!).

Пример 2. Будем классифицировать критические точки (комплексных) гладких функций, относя функции в один класс, если они сводятся одна к другой гладкой (комплексной) локальной заменой переменных. Список простых особенностей (скажем, для функций трех переменных) состоит из двух бесконечных серий и трех исключительных особенностей:

$$A_k = x^2 + y^2 + z^{k+1}, \quad k \geq 1; \quad D_k = x^2 + y^2z + z^{k-1}, \quad k \geq 4;$$

$$E_6 = x^2 + y^3 + z^4, \quad E_7 = x^2 + y^3 + yz^3, \quad E_8 = x^2 + y^3 + z^5.$$

Пример 3. Колчаном называется набор точек



и соединяющих их стрелок. Если каждой точке сопоставлено линейное пространство (точка, прямая, плоскость...), а каждой стрелке — линейное отображение (соответствующего началу стрелки пространства в соответствующее концу), то говорят, что задано *представление колчана*. Два представления называются *эквивалентными*, если одно переходит в другое при подходящих линейных преобразованиях пространств.

Колчан на рис. 71 слева прост, справа непрост (см. пример 1).

Оказывается, *все связные простые колчаны получаются произвольной расстановкой стрелок на изображенных на рис. 72 диаграммах Дынкина, образующих две бесконечные серии и три исключительные диаграммы*.

Простые особенности каустик и волновых фронтов также образуют две бесконечные серии  $A_n$  и  $D_n$  и три исключительные особенности  $E_n$  (начальные члены серий изображены на рис. 30—41).

Группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве также образуют две бесконечные серии и три исключения (исключения — группы симметрий тетраэдра ( $E_6$ ), октаэдра ( $E_7$ ) и икосаэдра ( $E_8$ ), серии — группы правильного многоугольника и правильного диэдра, т. е. двустороннего многоугольника с окрашенными в разные цвета сторонами).

На первый взгляд, функции, колчаны, каустики, фронты и правильные многогранники не связаны между собой. На самом деле соответственные объекты не случайно обозначены одинаково: например, из икосаэдра можно построить функцию  $x^2 + y^3 + z^5$ , а из нее — диаграмму  $E_8$ , а также каустику и волновой фронт того же имени.

Легко проверяемым свойствам одного из соответствующих друг другу объектов соответствуют не обязательно очевидные свойства других. Таким образом, связи между всеми  $A$ ,  $D$ ,  $E$ -классификациями используются для одновременного изучения всех простых объектов, несмотря на то, что происхождение многих из них (например, связей между функциями и колчанами) остается необъясненным проявлением загадочного единства всего сущего.



---

## ЛИТЕРАТУРА

---

- Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, 1981.
- Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977.
- Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.
- Постон Т., Стюарт Я. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
- Whitney H. Mappings of the plane into the plane, Ann. Math., 1955, v. 62, p. 374—410.
- Thom R. Stabilité structurelle et morphogénèse. N. Y., 1972.
- Zeeman E. C. Catastrophe theory: selected papers, (1972—1977), Mass., 1977.
- Арнольд В. И. Особенности систем лучей. — УМН, 1983, № 2.
- Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. — В кн.: Современные проблемы математики, т. 22. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1983.
- Джилмор Р. Теория катастроф для ученых и инженеров. — М.: Мир, 1983.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

---

1. Особенности, бифуркации и катастрофы . . . . .	3
2. Теория особенностей Х. Уитни . . . . .	4
3. Применения теории Уитни . . . . .	8
4. Машина катастроф . . . . .	10
5. Бифуркации положений равновесия . . . . .	13
6. Потеря устойчивости равновесных и автоколебательных режимов . . . . .	19
7. Особенности границы устойчивости и принцип хрупкости хорошего . . . . .	25
8. Каустики, волновые фронты и их метаморфозы . . . . .	27
9. Крупномасштабное распределение вещества во Вселенной . . . . .	36
10. Особенности в задачах оптимизации: функция максимума . . . . .	40
11. Особенности границы достижимости . . . . .	42
12. Гладкие поверхности и их проектирования . . . . .	49
13. Задача об обходе препятствия . . . . .	54
14. Симплектическая и контактная геометрии . . . . .	57
15. Комплексные особенности . . . . .	65
16. Мистика теории катастроф . . . . .	76
Литература . . . . .	80



**В.И. Арнольд**

## **Теория катастроф**

Цена 10 коп.

Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Применения теории катастроф к конкретным задачам в разных областях науки вызвали много споров. В брошюре рассказывается о том, что же такое теория катастроф и почему она вызывает такие споры.



Издательство  
Московского университета