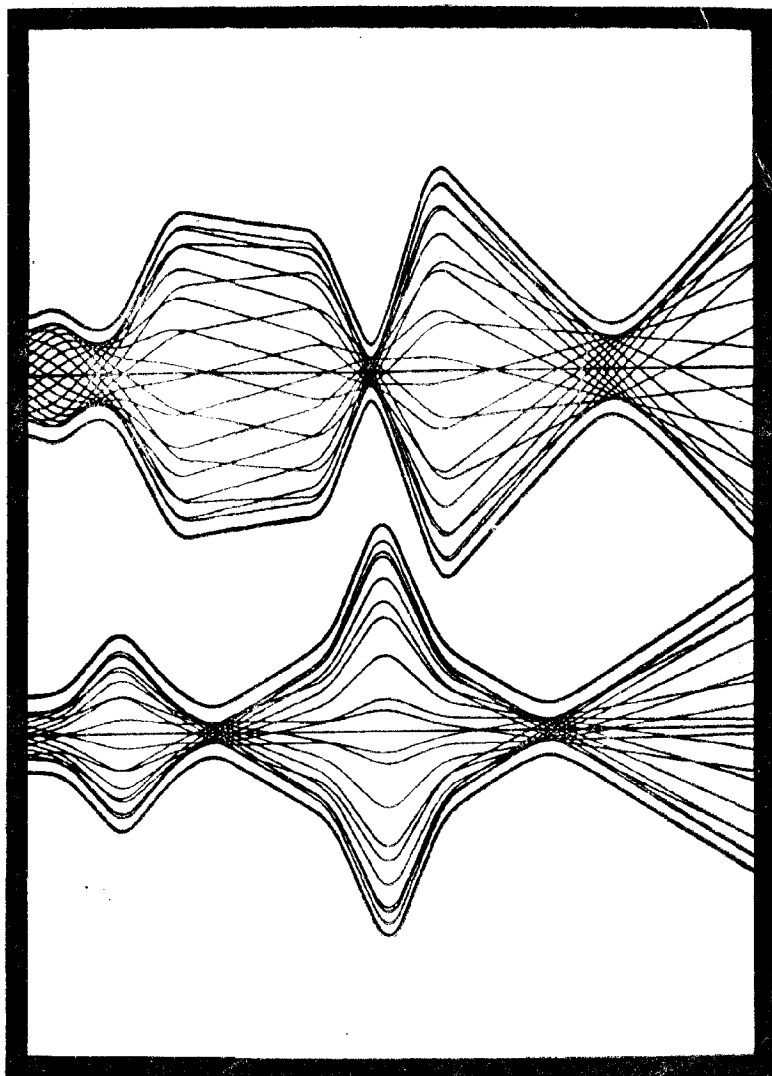


К. Штеффен **Оптика пучков  
высокой  
энергии**



# **High Energy Beam Optics**

KLAUS G. STEFFEN

DEUTSCHES ELECTRONEN-  
SYNCHROTRON, HAMBURG

**Interscience publishers**  
**New York — London — Sydney**  
**1965**

К. ШТЕФФЕН

# **Оптика пучков высокой энергии**

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
С. Я. ЯВОР

**Издательство «Мир»  
Москва 1969**

Книга представляет собой монографию по вопросам расчета и конструирования оборудования для управления пучками заряженных частиц, создаваемыми в современных ускорителях. К такому оборудованию относятся магнитные линзы для фокусировки пучка, отклоняющие магниты, а также магнитные и электростатические спектрометры и сепараторы.

Книга рассчитана на физиков-теоретиков и экспериментаторов, занимающихся разработкой ускорителей и проектированием экспериментов с пучками ускоренных частиц.

*Редакция литературы по физике*

## Предисловие редактора перевода

Оптика пучков высоких энергий — это сравнительно новая и быстро развивающаяся отрасль оптики заряженных частиц. В ней разрабатываются вопросы формирования, транспортировки и сепарации пучков частиц высоких энергий, создаваемых ускорителями. Специфической особенностью данной отрасли является необходимость применения сильных полей и стремление к максимально возможному сохранению интенсивности пучка. Как правило, при этом используются магнитные поля, поскольку достаточно сильные электрические поля в настоящее время трудно получать. Большое внимание уделяется вопросам согласования фазовых объемов пучка. Ввиду громоздкости оптических систем и большой мощности питания при их расчете и проектировании существенную роль играют экономические соображения. Зато здесь в отличие от обычной электронной оптики не всегда стоит задача создания правильного оптического изображения. Зачастую требуется лишь сконцентрировать пучок вблизи оси системы.

В связи со строительством большого числа новых ускорителей и повышением максимальной энергии пучков все острее ставится вопрос об их продуктивном использовании, и поэтому все настоятельнее становится необходимость в высококачественных оптических системах. Этим объясняется появление в последние годы многочисленных оригинальных работ и обзоров по данной теме. Но до последнего времени мы не имели монографии, в которой были бы сведены воедино все вопросы, относящиеся к данной области. Предлагаемая вниманию читателей книга К. Штеффена в известной мере восполняет пробел. Автор книги проф. Штеффен — известный специалист в этой области, работающий в ускорительном центре DESY<sup>1)</sup> (Гамбург, ФРГ).

Эта книга вышла в США в серии монографий и учебников по физике и астрономии, выпускаемой под редакцией

---

<sup>1)</sup> Сокращение от слов Deutsches Elektronen-Synchrotron (немецкий электронный синхротрон).

известного американского физика проф. Маршака. В книге последовательно излагаются основы расчета и конструирования элементов, используемых при работе с пучками частиц высоких энергий. К таким элементам относятся квадрупольные линзы и отклоняющие магниты. Рассматриваются также способы построения из таких элементов различных систем, в том числе бездисперсионных и изохронных. Кратко освещаются вопросы, связанные с разделением частиц по импульсам и массам. К достоинствам книги относится и то, что особое внимание в ней уделяется описанию пучков заряженных частиц методом огибающих при учете их фазового объема.

Монография написана на высоком научном уровне и вполне современна. За время, истекшее с момента ее опубликования, развитие науки не внесло принципиальных изменений в изложенный в книге материал. Поэтому редактор мог ограничиться исправлением опечаток и мелких неточностей, а также некоторыми добавлениями к списку литературы. Добавлены в основном вышедшие за последнее время монографии, в которых затрагиваются близкие вопросы, а также некоторые оригинальные статьи, дополняющие изложенный материал. В книге был исправлен ряд ошибок английского издания, на которые нам любезно указал сам автор.

Перевод книги был выполнен сотрудниками Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе АН СССР Е. В. Шпак (гл. 1 и 4) и Л. П. Овсянниковой (гл. 2 и 3).

*С. Я. Явор*

## Предисловие автора

В последние десять лет очень много средств и усилий ученых было затрачено на разработку проектов больших ускорителей. Значительная часть таких средств и усилий идет на решение проблем фокусировки, разделения и транспортировки вторичных заряженных частиц, выходящих из ускорителя. Поэтому становится все более настоятельным требование оптимизации не только схемы самого ускорителя, но и схем экспериментальных систем, связанных с ускорителем. Высокий уровень конструктивной разработки, который стал обычным при проектировании ускорителей, постепенно достигается и в области проектирования пучков частиц, спектрометров и систем, управляющих пучком.

Техника и понятия, характерные для оптики пучков высоких энергий, т. е. оптики частиц с импульсом, превышающим несколько сотен  $Mэв/c$ , во многом отличаются от техники и понятий оптики частиц низких энергий. Дело в том, что из-за необходимости в сильных фокусирующих и отклоняющих полях ряд типов линз и дефлекторов не могут быть применены в области высоких энергий. Фокусировка, отклонение и разделение по импульсам при высоких энергиях осуществляются исключительно поперечными магнитными полями, а электростатические поля используются только для разделения по массам. Кроме того, из-за малых сечений реакций при высоких энергиях и ограниченного времени работы с пучком необходимы большие апертуры в системах, транспортирующих пучок, и в спектрометрических системах. Учитывая же высокую стоимость устройств, обеспечивающих сильные поля в больших объемах, приходится тщательно оптимизировать аксептанс системы. При проектировании систем для частиц низких энергий подобные соображения значительно менее существенны.

В данной монографии я ставил себе целью последовательно изложить основные понятия оптики пучков высоких энергий и дать описание приборов и методов, используемых при проектировании пучков и спектрометров. Но в мои

намерения не входило излагать большое количество детальных работ в этой области. Поэтому список основных монографий и обзоров в конце книги и списки литературы в конце каждой главы ни в коей мере нельзя считать полными; в них указываются лишь основные обзорные статьи и, кроме того, те статьи, которые имеют прямое отношение к теме главы.

В первых трех главах рассматриваются оптические свойства систем из квадрупольных линз и отклоняющих магнитов на основе понятия траекторий частиц. Такое приближение особенно полезно при проектировании спектрометров, когда существенны определенные фокусирующие свойства. При изучении же вопросов разделения пучков частиц, транспортировки и согласования их в фазовом пространстве часто удобнее представлять их с помощью огибающих. Такой метод описывается в гл. 4. Он дает более прямую информацию об аксептансе, требуемых апертурах и сепарационных отношениях. В принципе оба подхода, конечно, эквивалентны, но они выявляют разные свойства системы.

Одна из главных трудностей при оптимизации системы для управления пучком состоит в том, что большое число свободных параметров обычно не позволяет систематически проанализировать все возможные их комбинации. Здесь требуется вычислительная техника, чтобы ориентировать и дополнять интуицию проектировщика. В этом отношении весьма перспективными представляются аналоговые вычислительные машины, и я специально останавливаюсь на данном методе, который превратился в точный и многообещающий метод расчета.

Подготовить такую книгу было бы невозможно без сотрудничества и помощи большого количества людей, которым я чрезвычайно благодарен за их содействие. В особенности я благодарен за постоянный интерес и поддержку д-ру Енчке и д-ру Штейлину, предоставившим мне возможность продолжать работу над книгой даже в трудный период завершения строительства и пуска ускорителя DESY.

Я получил много ценных идей и предложений в беседах с коллегами из многих лабораторий. Среди моих коллег по DESY я особенно обязан д-ру Керну за то, что он очень внимательно и критически прочитал рукопись книги, несмотря на другую неотложную работу. Многие его ценные предложения были использованы в окончательном варианте текста. Кроме того, он вместе с Крольцигом и его группой электроники создал аналоговую вычислительную машину для расчета транспортировки пучка DESY. В этой группе весьма способных специалистов по электронике, осуществивших идеи



Керна и Крольцига, особая заслуга принадлежит Хюблеру и Нордмайеру.

Я благодарю также д-ра Вюстера за его ценный вклад, особенно за расчеты коэффициентов преобразования третьего порядка для квадрупольных линз. И наконец, приношу глубокую благодарность И. Борхардт, подготовившей кривые, полученные на аналоговой вычислительной машине, В. Мангольд, напечатавшей рукопись, и И. Ромкопф, сделавшей рисунки.

*Клаус Г. Штеффен*

Август 1964 г.  
Гамбург, ФРГ

## Оптика заряженных частиц в системах из квадрупольных линз

### § 1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Движение частицы с зарядом  $e$  в электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  и наложенном на него магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ <sup>1)</sup> описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \quad (1.1)$$

в котором правая часть представляет собой силу Лоренца. Здесь  $m$  — масса и  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  — скорость частицы. В случае когда отклоняется релятивистская частица с  $v \approx c$ , на основании уравнения (1.1) можно заключить, что поперечное магнитное поле, равное  $10 \text{ кэс}$ , эквивалентно поперечному электрическому полю порядка  $3 \text{ Мв/см}$ .

Поскольку максимальная достижимая в настоящее время напряженность электрического поля составляет примерно  $100 \text{ кв/см}$ , электрические поля совершенно неэффективны для отклонения частиц высокой энергии. Поэтому на практике для управления пучками частиц больших энергий пользуются только магнитными полями. Единственное исключение — электростатический масс-сепаратор, который будет описан в гл. 4.

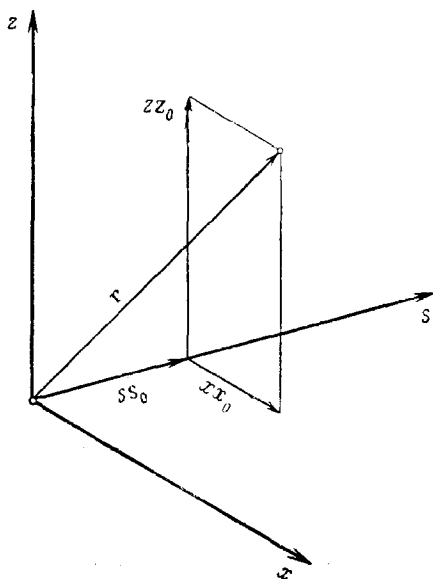
Выведем из уравнения (1.1) дифференциальные уравнения, описывающие в декартовых координатах траекторию частицы, движущейся в магнитном поле. Допустим, что задана неподвижная система декартовых координат  $\{z, x, s\}$  (фиг. 1.1). Тогда радиус-вектор частицы и его первую и вторую производные по времени можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{z}_0 + x\mathbf{x}_0 + s\mathbf{s}_0, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{z}\mathbf{z}_0 + \dot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{s}\mathbf{s}_0, \\ \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{z}\mathbf{z}_0 + \ddot{x}\mathbf{x}_0 + \ddot{s}\mathbf{s}_0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем там, где это не может привести к недоразумениям, мы, следуя автору, часто будем называть магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  магнитным полем. — *Прим. ред.*

Подставляя  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$  в уравнение (1.1) и принимая во внимание, что масса релятивистской частицы в магнитном поле не меняется, находим

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= \frac{e}{m} (\dot{x}B_s - \dot{s}B_x), \\ \ddot{x} &= \frac{e}{m} (\dot{s}B_z - \dot{z}B_s), \\ \ddot{s} &= \frac{e}{m} (\dot{z}B_x - \dot{x}B_z).\end{aligned}\quad (1.2)$$



Фиг. 1.1. Неподвижная декартова система координат  $\{z, x, s\}$ .

Чтобы получить уравнения траектории, введем вместо  $t$  независимую переменную  $s$ .

Принимая во внимание, что

$$\dot{z} = \frac{dz}{ds} \dot{s} = z' \dot{s}, \quad \ddot{z} = z'' \dot{s}^2 + z' \ddot{s}$$

и

$$\dot{s}^2 + \dot{z}^2 + \dot{x}^2 = v^2, \quad \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + z'^2 + x'^2},$$

и подставляя третье уравнение (1.2) в два первых, получаем уравнения траектории

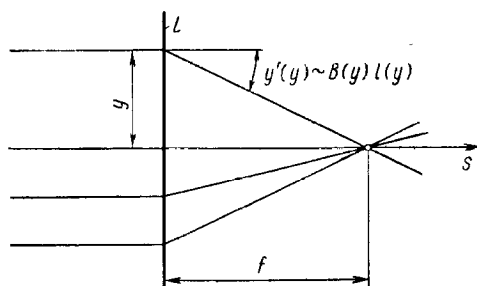
$$\begin{aligned} z'' &= \frac{e}{p} \sqrt{1 + z'^2 + x'^2} [x' B_s - (1 + z'^2) B_x + x' z' B_z], \\ x'' &= - \frac{e}{p} \sqrt{1 + z'^2 + x'^2} [z' B_s - (1 + x'^2) B_z + x' z' B_x], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $p = mv$  — импульс частицы. Эти уравнения справедливы при любом магнитном поле, так как при их выводе не было сделано никаких упрощающих предположений.

## § 2. ТИПЫ МАГНИТНЫХ ЛИНЗ

Для фокусировки пучков заряженных частиц высоких энергий с помощью магнитных линз в принципе могут быть использованы поля различной конфигурации.

Мы кратко опишем некоторые из них и начнем с простого числового примера, который даст нам возможность оценить



Фиг. 1.2. Фокусное расстояние магнитной линзы.

$L$  — линза с полем  $B(y)$  и длиной  $l(y)$ .

величины основных параметров линзы. По аналогии со световой оптикой рассмотрим тонкую магнитную линзу, фокусирующую в точку узкий параллельный пучок заряженных частиц (фиг. 1.2). В этом случае тангенс угла  $y'$ , на который отклоняется каждая траектория в линзе, должен быть пропорционален расстоянию  $y$  от траектории до оси:

$$y' = - \frac{1}{f} y,$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы.

Чтобы удовлетворить этому условию, предположим, что отклоняющая составляющая магнитного поля  $B$  и протяженность

этого поля  $l$  являются функциями  $y$ . Угол отклонения траектории в первом приближении пропорционален произведению  $B(y)l(y)$ . Это можно показать, если проинтегрировать одно из уравнений (1.3) по  $s$ , предполагая, что всеми членами с  $x'$  и  $z'$  в нем можно пренебречь и что  $y$  не меняется внутри линзы. При таком упрощении интегрирование дает

$$y' = \pm \frac{eB}{p} l.$$

Следовательно, произведение  $B \cdot l$  в линзе должно расти линейно с расстоянием  $y$  от оси:

$$Bl = \pm \frac{p}{ef} y. \quad (1.4)$$

В качестве примера рассмотрим линзу с фокусным расстоянием  $f=2$  м и апертурой  $2y_{\text{макс}}=20$  см. Из формулы (1.4) следует, что для фокусировки частиц с импульсом  $6$  Гэв/с необходимо, чтобы на краю апертуры линзы произведение  $Bl$  было равно  $1 \text{ в} \cdot \text{сек}/\text{м}^2 \cdot \text{м} = 10 \text{ кгс} \cdot \text{м}$ . Таким образом, поперечная составляющая магнитной индукции должна быть равна  $10 \text{ кгс}$  при длине линзы  $1$  м.

Поскольку для фокусировки необходимо сильное поперечное поле, мы рассмотрим четыре типа магнитных линз, поля которых составляют с направлением пучка углы, близкие к  $90^\circ$ , благодаря чему сила поля может быть использована полностью. Конфигурации поля в первых двух линзах (*a* и *б*) симметричны относительно оси  $s$  и поэтому описываются в цилиндрических координатах

$$r = \sqrt{z^2 + x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{z}.$$

а) *Линза, образованная линейными проводниками с током.*

Поле:  $B_r = 0,$

$$B_\varphi = gr, \quad \text{где} \quad g = \frac{dB_\varphi}{dr} = \text{const.}$$

Длина:  $l = l_0 = \text{const.}$

Силовые линии представляют собой окружности с центром на оси, и поле возрастает линейно с радиусом.

Из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = \mu_0 j_s, \quad (1.5)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  в·сек/а·м, мы находим осевую составляющую плотности тока

$$j_s = \frac{2g}{\mu_0 \mu}. \quad (1.6)$$

Таким образом, чтобы получить нужное нам распределение поля, необходимо создать по всей используемой апертуре линзы ток с постоянной плотностью  $j_s$ . Этого можно добиться, применяя газовый разряд или (приблизительно) ряд параллельных проводников с током. Линзы такого типа были созданы [1, 2]. Но у них имеется ряд недостатков, в частности они настолько слабы, что фокусировка частиц больших энергий возможна только в импульсном режиме работы. Чтобы создать поле напряженностью 10 кгс на расстоянии  $r = 10$  см, как требуется в нашем примере, для линзы длиной 1 м необходима плотность тока  $j_s \approx 16$  а/мм<sup>2</sup>. Это следует из выражения (1.6) при  $\mu = 1$ :

$$j_s = \frac{2 \cdot 1 \text{ в} \cdot \text{сек/м}^2}{0,1 \text{ м} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ в} \cdot \text{сек/а} \cdot \text{м}} = 16 \text{ а/мм}^2.$$

Если сконцентрировать полный ток, например, на 10% площади поперечного сечения линзы, то плотность тока возрастет до 160 а/мм<sup>2</sup>. Это по крайней мере в 5 раз превышает допустимую при непрерывном режиме работы величину в случае полых медных проводников, охлаждаемых водой.

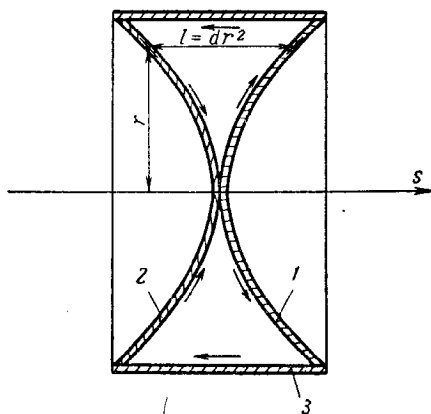
б) *Линза, образованная параболическими поверхностями с током.*

$$\begin{aligned} \text{Поле:} \quad & B_r = 0, \\ & B_\varphi = \frac{c}{r}, \quad \text{где } c = \text{const.} \\ \text{Длина:} \quad & l = dr^2, \quad \text{где } d = \text{const.} \end{aligned}$$

Силовые линии представляют собой окружности с центром на оси, и при удалении от нее напряженность поля уменьшается как  $1/r$ . Такое распределение поля может быть создано линейным током, направленным вдоль оси. Длина линзы равна нулю на оси и возрастает с радиусом квадратично. Чтобы точно задать длину линзы как функцию  $r$ , поле ограничивают со стороны входа и выхода линзы поверхностями с током в форме параболоидов, имеющих общую вершину и симметрично расположенных относительно оси  $s$ <sup>1)</sup>. Осевой разрез такой линзы схематически показан на фиг. 1.3.

<sup>1)</sup> Н. G. Hereward, M. G. Hine, частное сообщение. (Такие линзы описаны в работах [33, 34]. — Прим. ред.)

Ток проходит радиально от оси по поверхности 1, затем по внешней цилиндрической стенке 3, которая ограничивает апертуру линзы, и возвращается радиально к оси по поверхности 2. Недостаток такой линзы в том, что частицам приходится проходить сквозь две поверхности с током и их взаимодействие с поверхностями сказывается на характеристиках пучка.



Фиг. 1.3. Поперечное сечение линзы, образованной параболическими поверхностями с током.

Полный ток, необходимый для создания поля  $B(r)$ , определяется путем интегрирования уравнения Максвелла (1.5) по круговому контуру радиусом  $r$ , совпадающему с силовой линией:

$$I = \oint \mathbf{H} ds = \frac{2\pi r}{\mu_0 \mu} B_\varphi(r). \quad (1.7)$$

Если длина линзы  $l = 10$  см, то для того чтобы на расстоянии от оси  $r = 10$  см произведение  $Bl$  было равно  $10$  кгс·м, как это требуется в нашем примере, необходим полный ток  $I = 5 \cdot 10^6$  а.

Линзы такого типа могут представлять значительный интерес, если их изготавливать из сверхпроводящего материала. В настоящее же время они, по-видимому, применимы только в тех случаях, когда короткий рабочий цикл допускает работу в импульсном режиме и требуются большие апертуры и большие фокусные расстояния линз.

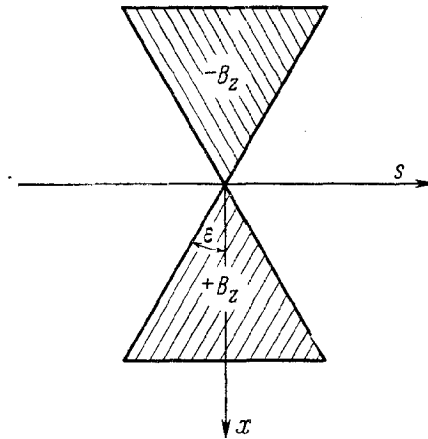
в) *Магнитная клинообразная линза* (фиг. 1.4).

$$\text{Поле:} \quad B_x = \begin{cases} +B = +\text{const} & \text{при } x > 0, \\ -B = -\text{const} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Длина:  $l = cx$ , где  $c = \text{const}$ .

Однородное вертикальное поле<sup>1)</sup> положительно с одной стороны от оси и отрицательно с другой. Его протяженность возрастает линейно с расстоянием от оси, причем границы образуют двойной клин.

Если бы поле резко обрывалось на границах, такая линза обеспечивала бы только горизонтальную фокусировку и не



Ф и г. 1.4. Схема магнитной клинообразной линзы.

действовала бы на вертикальную составляющую скорости частиц. Но на практике поля рассеяния, образующие угол  $\varepsilon$  с нормалью<sup>2)</sup>, вызывают вертикальную дефокусировку того же порядка. Это будет показано в гл. 2, где мы воспользуемся моделью магнитного клина для определения фокусирующих свойств отклоняющих магнитов.

Если вернуться к рассмотренному ранее примеру, то мы получим, что при длине  $l = 10$  см на расстоянии от оси  $r = \pm 10$  см необходимо создать поле в 100 кэс. Это показывает, почему магнитная фокусировка с помощью клина названа «слабой фокусировкой» в противоположность «сильной

<sup>1)</sup> Вертикальная плоскость перпендикулярна плоскости чертежа. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Здесь автор имеет в виду угол между горизонтальной составляющей поля рассеяния (перпендикулярной границе) и нормалью ко второй границе. — Прим. ред.



фокусировке» в квадрупольных линзах, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем<sup>1)</sup>.

г) Квадрупольная линза [3].

$$\begin{aligned} \text{Поле:} \quad B_z &= gx, \quad \text{где} \quad g = \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \text{const}, \\ B_x &= gz, \\ B_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{Длина:} \quad l = l_0 = \text{const.}$$

Магнитную индукцию квадрупольной линзы  $\mathbf{B}$  можно найти из выражения для потенциала

$$\Phi = -gzx,$$

пользуясь соотношением

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi. \quad (1.9)$$

Эквипотенциальные линии  $\Phi = -gzx = \text{const}$  представляют собой симметричные гиперболы, расположенные в плоскости  $xz$ . Четыре такие гиперболы, являющиеся границами четырех ферромагнитных полюсов чередующейся полярности, изображены на фиг. 1.5. Там же проведены и гиперболические силовые линии поля, ортогональные к эквипотенциальным линиям.

Магнитная индукция линейно возрастает с расстоянием от оси:

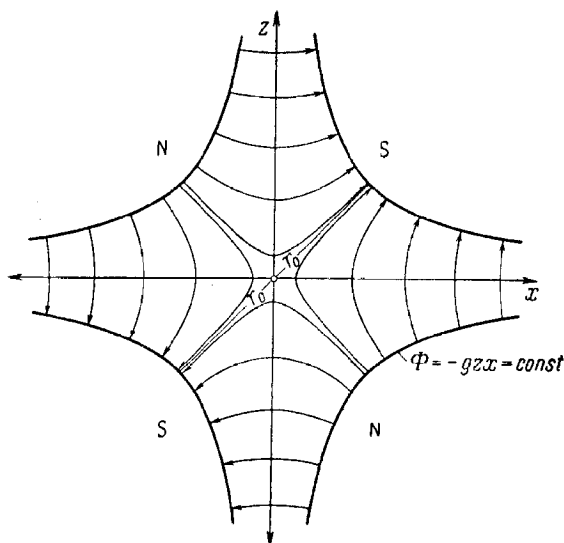
$$\mathbf{B}^2 = B_z^2 + B_x^2 = g^2(x^2 + z^2) = (gr)^2.$$

Из уравнения (1.1) следует, что при расположении полюсов, указанном на фиг. 1.5, положительные частицы, входящие сверху в плоскость чертежа, фокусируются в вертикальном направлении и дефокусируются в горизонтальном. При изменении направления поля на противоположное плоскости фокусировки и дефокусировки меняются местами. Фокусировку в обеих плоскостях можно обеспечить только с помощью нескольких последовательно расположенных квадрупольных линз с противоположно направленными полями. Этот случай будет нами рассмотрен в следующих параграфах.

Фокусирующую силу квадрупольной линзы с диаметром апертуры  $2r_0 = 20$  см нетрудно вычислить. В случае железных

<sup>1)</sup> Этот и следующий примеры показывают различную природу фокусировки (в клине — за счет разных длин траекторий в поле, в квадрупольной линзе — за счет наличия градиента поля). Однако разница в требуемой величине поля  $B$  на данном расстоянии от оси получается здесь только за счет различия в длинах линз. — *Прим. ред.*

полюсных наконечников поле у центра полюса может превышать  $10 \text{ кгс}$ . Это означает, что при фокусировке пучка частиц с импульсом  $p=6 \text{ Гэв}/c$  (см. пример, приводившийся выше) фокусное расстояние линзы длиной менее  $1 \text{ м}$  равно  $2 \text{ м}$ .



Фиг. 15. Конфигурация поля квадрупольной линзы.

Сильное фокусирующее действие квадрупольных линз и возможность создания их полей с большой степенью точности являются важными преимуществами, благодаря которым такие линзы чаще других применяются для фокусировки частиц высоких энергий. Различные типы магнитных квадрупольных линз и некоторые варианты их конструкций будут рассмотрены в § 11 и 15.

### § 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ В КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЕ

Подставив значение магнитной индукции квадрупольной линзы (1.8) в общие уравнения траектории (1.3), мы получим уравнения траектории в квадруполе

$$\begin{aligned} z'' &= -k \sqrt{1+z'^2+x'^2} [(1+z'^2)z - x'z'x], \\ x'' &= k \sqrt{1+z'^2+x'^2} [(1+x'^2)x - x'z'z], \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $k = eg/p$  — величина, характеризующая фокусирующую силу поля.

В окрестности оси  $s$  можно разложить решение  $z(s)$  в степенной ряд по четырем начальным параметрам  $z_0 = z(0)$ ,  $z'_0$ ,  $x_0$ ,  $x'_0$ :

$$z = a_1 z_0 + a_2 z'_0 + a_3 x_0 + a_4 x'_0 + b_1 z_0^2 + b_2 z_0 z'_0 + \dots \\ \dots + b_{10} x_0'^2 + c_1 z_0^3 + \dots, \quad (1.11)$$

$$z' = a'_1 z_0 + a'_2 z'_0 + \dots + b'_1 z_0^2 + \dots + c'_1 z_0^3 + \dots$$

Коэффициенты разложения  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются функциями  $s$ . Поскольку при  $s = 0$  выполняются равенства  $z = z_0$  и  $z' = z'_0$ , эти коэффициенты удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$a_1(0) = 1, \quad a_2(0) = 0, \\ a'_1(0) = 0, \quad a'_2(0) = 1, \\ a_{3,4}(0) = a'_{3,4}(0) = 0, \\ b_i(0) = b'_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, 10.$$

Подставляя ряды (1.11) и соответствующие ряды для  $x$  и  $x'$  в первое уравнение траектории (1.10), разлагая в ряд квадратный корень и сравнивая линейные члены в левой и правой частях, получаем

$$a''_i = -ka_i, \quad \text{где } i = 1, \dots, 4. \quad (1.12)$$

Коэффициенты  $a_3(s)$  и  $a_4(s)$  равны нулю, так как они удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$a_{3,4}(0) = a'_{3,4}(0) = 0.$$

Поскольку уравнение траектории после подстановки разложений в ряд не содержит членов второго порядка относительно  $z$ ,  $x$  и их производных, сравнение квадратичных членов дает равенство

$$b''_i = -kb_i, \quad \text{где } i = 1, \dots, 10. \quad (1.13)$$

Учитывая начальные условия  $b_i(0) = b'_i(0) = 0$ , из уравнения (1.13) получаем интересный результат  $b_i(s) \equiv 0$ , означающий, что все квадратичные члены рядов (1.11) равны нулю. Точно так же находим, что в разложениях (1.11) отсутствуют все члены четного порядка, поскольку дифференциальное уравнение содержит только члены нечетного порядка. Физически

это объясняется симметрией поля квадрупольной линзы. Именно

$$\mathbf{B}(-z, -x) = -\mathbf{B}(z, x),$$

и поэтому если траектория  $\{z(s); x(s)\}$  является решением уравнения (1.10), то и траектория  $\{-z(s); -x(s)\}$  также должна быть его решением.

Таким образом, разложение (1.11) принимает вид

$$z = a_1 z_0 + a_2 z_0' + c_1 z_0^3 + \dots \quad (1.11a)$$

На практике в большинстве случаев достаточно сохранить только линейные члены разложения, а членами третьего и более высоких порядков можно пренебречь. Тогда  $z(s)$  и  $x(s)$  являются решениями линейных уравнений траектории в квадруполе

$$\begin{aligned} z'' + kz &= 0, \\ x'' - kx &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отметим, что в линейном приближении проекции траектории на вертикальную и горизонтальную плоскости не зависят одна от другой. Поскольку уравнения (1.14) однородны, линейная комбинация двух решений каждого из этих уравнений также является его решением.

Чтобы найти решения в явном виде, запишем уравнения (1.14) в форме

$$y'' \pm ky = 0, \quad (1.14a)$$

причем

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0',$$

и рассмотрим два случая.

а)  $y''/y < 0$ , т. е.  $(\pm k) > 0$ . Квадрупольная линза фокусирует в этом направлении, и общее решение уравнения (1.14a) имеет вид

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 \cos s\sqrt{k} + y_0' \frac{1}{\sqrt{k}} \sin s\sqrt{k}, \\ y'(s) &= -y_0 \sqrt{k} \sin s\sqrt{k} + y_0' \cos s\sqrt{k}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где для простоты мы написали  $\sqrt{k}$  вместо  $+\sqrt{|k|}$ . В решении в качестве независимых постоянных входят начальные условия  $y_0$  и  $y_0'$ . Уравнения (1.15) соответствуют линейному преобразованию вектора  $\{y, y'\}$  между начальной точкой  $s=0$  и некоторой данной точкой  $s$  внутри квадруполя.

При приближении к краям линзы поле перестает соответствовать выражениям (1.8) и падает до нуля вне линзы. Но, как будет показано в § 14, действие краевых полей в ли-

нейном приближении можно с достаточной точностью учесть в преобразовании (1.15), если заменить реальный квадруполь идеализированной линзой с постоянным градиентом поля, резко падающим до нуля за пределами так называемой эффективной длины  $l$ . Мы будем называть такую аппроксимацию распределения поля прямоугольной моделью.

Линейное преобразование, которое производит квадрупольная линза с эффективной длиной  $l$  в фокусирующей плоскости, можно записать в матричной форме [4]

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \varphi \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0 = M^+ \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0, \quad (1.15a)$$

где  $\varphi = l\sqrt{k} > 0$ .

б)  $y''/y > 0$ , т. е.  $(\pm k) < 0$ . В этом случае квадрупольная линза дефокусирует и общее решение уравнения (1.14a) записывается так:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 \operatorname{ch} s\sqrt{k} + y'_0 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} s\sqrt{k}, \\ y'(s) &= y_0 \sqrt{k} \operatorname{sh} s\sqrt{k} + y'_0 \operatorname{ch} s\sqrt{k}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, линейное преобразование, производимое квадрупольной линзой с эффективной длиной  $l$  в дефокусирующей плоскости, в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \varphi \\ \sqrt{k} \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0 = M^- \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0, \quad (1.16a)$$

где  $\varphi = l\sqrt{k} > 0$ .

При числовых расчетах удобно измерять  $k$  в  $m^{-2}$ , и тогда численное значение  $k$  дается выражением

$$k(m^{-2}) = 3 \frac{g^*}{\rho^*} \frac{[\kappa_{\text{эс}}/cM]}{[\Gamma_{\text{эв}}/c]}. \quad (1.10a)$$

#### § 4. ГЛАВНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА

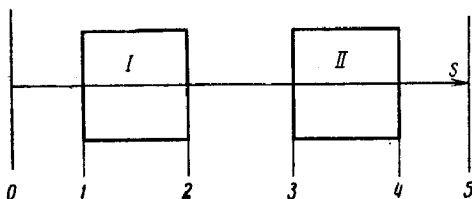
В пространстве, свободном от поля, уравнение (1.1) принимает простой вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = m\ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Траектории частиц представляют собой прямые линии, и преобразование для свободного от поля пространства длиной  $l$  в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0 = M_0 \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0. \quad (1.17)$$

Теперь, применяя в соответствующем порядке преобразования (1.15а), (1.16а) и (1.17), мы можем получить линейное преобразование всей системы, состоящей из квадрупольей и



Фиг. 1.6. Система из двух квадрупольных линз.  
В плоскости  $z_0$  линза I рассеивает, а линза II собирает.

пространств, свободных от поля. Матрица  $M$  полного преобразования системы равна произведению матриц  $M_i$ , соответствующих отдельным частям системы.

В качестве примера запишем преобразования между точками 0 и 5 в системе из двух квадрупольей (фиг. 1.6) для обеих координат  $z$  и  $x$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_5 = M_5^0 M_4^+ M_3^0 M_2^- M_1^0 \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 = M_z \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_5 = M_5^0 M_4^- M_3^0 M_2^+ M_1^0 \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = M_x \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0.$$

Произведение матриц определяется следующим образом:

$$M_k M_l = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k a_l + b_k c_l & a_k b_l + b_k d_l \\ c_k a_l + d_k c_l & c_k b_l + d_k d_l \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Из выражений (1.15а), (1.16а) и (1.17) явствует, что определители матриц, соответствующих отдельному квадруполью или пространству, свободному от поля, равны единице:

$$|M_i| = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} = a_i d_i - b_i c_i = 1.$$

Следовательно, определитель матрицы  $M=M_{z,x}$ , соответствующей полному преобразованию системы, также равен единице:

$$|M|=1.$$

Все траектории системы удобно выражать через два линейно независимых решения уравнения (1.14а), которые мы обозначим через  $C(s)$  и  $S(s)$ . Эти «главные траектории» мы определим, записав преобразование между двумя точками 0 и  $s$  в системе из квадрупольных линз следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

где

$$C'(s) = \frac{d}{ds} C(s), \quad S'(s) = \frac{d}{ds} S(s), \\ |M| = CS' - SC' = 1$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} C(0) &= 1, & S(0) &= 0, \\ C'(0) &= 0, & S'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Назовем  $C(s)$  косинусообразной траекторией, а  $S(s)$  синусообразной. Принимая такую терминологию, мы пренебрегаем тем, что  $C(s)$  — безразмерная величина. Но, поскольку при этом упрощаются формулировки и не возникает никаких неясностей, мы будем далее всюду ею пользоваться. Главные траектории, естественно, зависят от выбора начальной точки  $s=0$ , однако эта зависимость не введена явно в предыдущие уравнения, чтобы не усложнять их записи.

Равенство  $|M|=1$  является прямым следствием линейного уравнения траектории (1.14а), которое, будучи применено к  $C(s)$  и  $S(s)$ , дает уравнение

$$CS'' - C''S = \frac{d}{ds} (CS' - C'S) = 0.$$

Интегрируя и учитывая начальные условия (1.20), получаем

$$CS' - C'S = 1.$$

Преобразование, обратное преобразованию (1.19), позволяет получить начальные значения  $y_0, y'_0$  как функции конечных значений  $y(s)$  и  $y'(s)$ :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = M^{-1}(s) \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'(s) & -S(s) \\ -C'(s) & C(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}.$$

Если одна из главных траекторий, скажем  $C(s)$ , известна во всей системе, то в линейном приближении оптические свойства системы полностью определены и все матричные элементы могут быть рассчитаны. Для области  $C(s) > 0$ , например, это можно сделать, пользуясь следующими соотношениями:

$$CS' - SC' = C^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{S}{C} \right) = 1,$$

$$\frac{S(s)}{C(s)} = \int_0^s \frac{1}{C^2(\tau)} d\tau, \quad (1.21)$$

$$S = C \int_0^s \frac{1}{C^2} d\tau,$$

$$S' = C' \int_0^s \frac{1}{C^2} d\tau + \frac{1}{C}.$$

Фокусирующие свойства системы из квадрупольей для какой-либо координаты  $z$  или  $x$  можно определить, находя плоскости  $s=s_i$ , в которых один из элементов матрицы  $M(s)$  обращается в нуль, и интерпретируя эти плоскости так, как это обычно принято в оптике. Но сначала заметим, что ни  $C(s)$  и  $S(s)$ , ни  $C'(s)$  и  $S'(s)$  не могут обратиться в нуль в одной и той же точке  $s$ , ибо тогда обращался бы в нуль определитель матрицы  $M(s)$ . Величины  $C(s)$  или  $S(s)$  могут обратиться в нуль только в отдельных точках, тогда как  $C'(s)$  или  $S'(s)$  могут быть равны нулю в целом интервале значений  $s$ .

а)  $C(s_1) = 0$ . Плоскость  $s=s_1$  является фокальной плоскостью, т. е. пучок частиц, параллельный при  $s=0$ , фокусируется в точку при  $s=s_1$ .

б)  $S(s_2) = 0$ . Плоскость  $s=s_2$  является плоскостью изображения, т. е. изображение объекта, расположенного в плоскости  $s=0$ , создается в плоскости  $s=s_2$ . Величина  $C(s_2)$  — линейное увеличение,  $S'(s_2)$  — угловое увеличение, причем

$$C(s_2) = \frac{1}{S'(s_2)},$$

так как

$$|M| = 1.$$

в)  $C'(s_3) = 0$ . Пучок частиц, параллельный при  $s=0$ , вновь становится параллельным при  $s=s_3$ . Величина  $C(s_3)$  характеризует расширение пучка.

г)  $S'(s_4) = 0$ . Пучок, исходящий из точки  $s=0$ , становится параллельным при  $s=s_4$ .



## § 5. ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Расчеты траекторий частиц в заданной квадрупольной системе в матричной форме довольно просты и могут быть легко выполнены, например, на цифровой вычислительной машине, которая по заданным параметрам системы находит численные значения матричных элементов и производит последовательное перемножение матриц.

Применение же матричного метода при проектировании системы из нескольких квадрупольных обычно связано со значительными трудностями<sup>1)</sup>. Это объясняется в основном следующим.

1) При перемножении нескольких матриц получаются громоздкие выражения, в которых нелегко выявить зависимость интересующих нас оптических свойств от параметров системы.

2) Оптические свойства, которыми обладает система квадрупольных линз в двух взаимно перпендикулярных координатных плоскостях, существенно различны. В то же время они тесно связаны между собой, причем связь эта довольно сложна. Поэтому систему обычно трудно оптимизировать в обеих плоскостях одновременно.

Указанные трудности можно преодолеть с помощью цифровых вычислительных машин в тех случаях, когда требования, предъявляемые к системе, допускают полную и простую математическую формулировку. Такие требования могут быть включены в программу, чтобы обеспечить критерий качества полученного приближения. При расчете на вычислительной машине обычно пользуются методом итераций, при котором параметры системы изменяют до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное приближение к заданию.

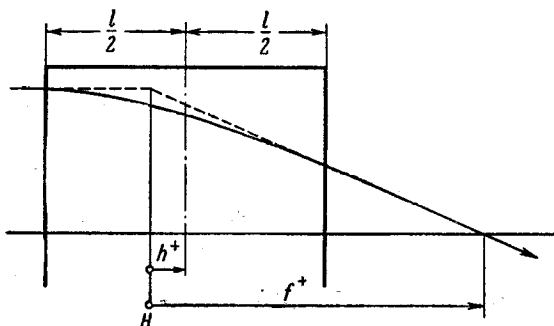
Сложные программы такого рода для систем, содержащих также отклоняющие магниты и сепараторы, разработаны в целом ряде лабораторий и с успехом применяются при решении проблемы транспортировки пучков (см. работы [5—7, 26, 29]). Вычисления по таким программам обычно начинаются с некоторой предварительной схемы оптической системы, разработанной проектировщиком. Следующие параграфы будут посвящены методам, которые могут быть использованы для расчета такого начального приближения.

---

<sup>1)</sup> В настоящее время предложен метод скобок Гаусса, несколько упрощающий поставленную задачу. Его применение к электронной оптике описано в [35—37]. — *Прим. ред.*

## § 6. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ

Фокусное расстояние  $f^+$  в собирающей плоскости квадру-польной линзы и положение главной плоскости легко найти, пользуясь определениями этих величин (фиг. 1.7) и преобразованиями (1.15а) и (1.17).



Фиг. 1.7. Главная плоскость  $H$  и фокусное расстояние  $f^+$  в собирающей плоскости квадру-польной линзы.

Принимая во внимание равенство  $\varphi = l \sqrt{k}$ , получаем

$$\frac{1}{f^+} = \sqrt{k} \sin \varphi = |k|l \frac{\sin \varphi}{\varphi}, \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{f^+} \approx |k|l \quad \text{при } \varphi \ll 1$$

и

$$h^+ = l \frac{1}{\varphi} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

где  $h^+$  — расстояние от главной плоскости до центра квадру-польной линзы (фиг. 1.7).

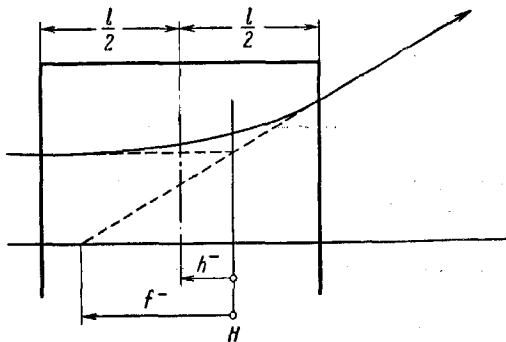
Введем идеализированное понятие тонкой линзы, которая не изменяет расстояние  $y$  траектории от оси, но скачком меняет наклон траектории на величину  $-y/f$ . Тогда из приведенных выше выражений следует, что квадру-польная линза в той плоскости, в которой она фокусирует, эквивалентна бесконечно тонкой линзе с оптической силой  $1/f = \sqrt{k} \sin \varphi$ , окруженной с двух сторон пространствами, свободными от поля, длиной

$$\frac{l}{2} + h^+ = \frac{l}{2} \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\varphi/2} > \frac{l}{2}.$$

Перемножив соответствующие матрицы, мы получим матрицу преобразования (1.15а)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{2} \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\varphi/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{2} \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\varphi/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \varphi \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Для квадрупольной линзы в рассеивающей плоскости фокусное расстояние  $f^-$  и положение главной плоскости  $h^-$



Фиг. 1.8. Главная плоскость  $H$  и фокусное расстояние  $f^-$  в рассеивающей плоскости квадрупольной линзы.

относительно центра линзы (фиг. 1.8) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^-} &= -\sqrt{k} \operatorname{sh} \varphi = -|k|l \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\varphi}, \\ \frac{1}{f^-} &\approx -|k|l \quad \text{при } \varphi \ll 1, \\ h^- &= l \frac{1}{\varphi} \left( \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Следовательно, квадрупольную линзу в рассеивающей плоскости можно заменить тонкой линзой с оптической силой  $1/f^- = -\sqrt{k} \operatorname{sh} \varphi$ , по обе стороны которой располагаются пространства, свободные от поля, длиной

$$\frac{l}{2} + h^- = \frac{l}{2} \frac{\operatorname{th}(\varphi/2)}{\varphi/2} < \frac{l}{2}.$$

Очевидно, что такая замена не упрощает расчетов, поскольку длина пространств, свободных от поля, меняется с изменением силы квадрупольной линзы; в фокусирующей плоскости она больше  $l/2$ , в рассеивающей меньше  $l/2$  и приближается к величине  $l/2$  только при  $\varphi \rightarrow 0$ . Если же заменить длину пространств, свободного от поля, величиной  $l/2$ , т. е. пренебречь смещением главных плоскостей от центра линзы, то расчеты значительно упрощаются.

В таком приближении матрица преобразования в собирающей плоскости имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{2f} & l \left(1 - \frac{l}{4f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l}{2f} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

где

$$\frac{1}{f} = \sqrt{k} \sin \varphi.$$

Так как

$$1 - \frac{l}{2f} = 1 - \frac{\varphi^2 \sin \varphi}{2l} \approx \cos \varphi$$

и

$$l \left(1 - \frac{l}{4f}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[ \varphi - \frac{\varphi^3}{3l} \left( \frac{3 \sin \varphi}{2} \right) \right] \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \varphi,$$

отличие матричных элементов в выражении (1.25) от точных будет мало, если

$$\varphi^2 = |k|l^2 \ll 1,$$

или

$$l \ll \left| \frac{1}{kl} \right| \approx |f|.$$

Следовательно, приближение тонкой линзы является достаточно хорошим, если длина линзы мала по сравнению с фокусным расстоянием.

Снижение точности расчетов в приближении тонких линз при увеличении  $\varphi$  можно оценить по данным, представленным в табл. 1. Здесь приведены расстояния главных плоскостей от центра линзы в единицах  $l$  и силы линз, отнесенные к  $|k|l$ , при  $\varphi = \pi/4$  и  $\varphi = \pi/2$ .

Первый из рассмотренных случаев приблизительно соответствует линзе, описанной в § 2. Длина ее равна  $1 \text{ м}$ , а фокусное расстояние  $2 \text{ м}$ . При  $|1/f| \approx |k|l$  мы получим  $|k| \approx$

Таблица 1

Поправочные множители для приближения тонкой линзы

$\varphi = l\sqrt{k}$	$\frac{1}{l} h^+ = -\frac{1}{\varphi} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$	$\frac{1}{l} h^- = -\frac{1}{\varphi} \left( \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$	$\frac{1}{ k l} \frac{1}{f^+} = -\frac{\sin \varphi}{\varphi}$	$-\frac{1}{ k l} \frac{1}{f^-} = -\frac{\operatorname{sh} \varphi}{\varphi}$
$\frac{\pi}{4} = 0,785$	0,027	-0,024	0,90	1,10
$\frac{\pi}{2} = 1,57$	0,136	-0,083	0,64	1,46

$\approx 0,5 \text{ м}^{-2}$  и  $\varphi = l\sqrt{k} \approx 1/\sqrt{2}$ , что дает смещение главных плоскостей от центра линзы примерно на  $\pm 2,5 \text{ см}$  и отличие силы линзы от  $|k|l$  на 10%.

## § 7. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

Проекции траекторий заряженных частиц в квадрупольных линзах можно определять графически, сопоставляя каждой паре величин  $y(s)$  и  $y'(s)$  точку на фазовой плоскости  $\{y, y'\}$  и вычерчивая путем простых геометрических построений след этой точки на фазовой плоскости при изменении  $s$  [8]. Как будет показано в гл. 4, при таком методе можно описывать поведение пучка частиц в целом, вычерчивая одновременно целую группу траекторий.

Линейное преобразование в пространстве, свободном от поля,

$$y(s) = y_0 + sy'_0,$$

$$y'(s) = y'_0$$

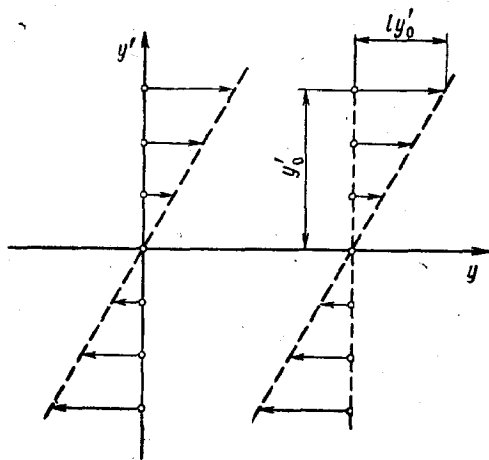
приводит к сдвигу точек траектории в фазовой плоскости (фиг. 1.9). При движении частицы в свободном от поля пространстве длиной  $l$  представляющая точка  $\{y_0, y'_0\}$  смещается вдоль прямой  $y' = y'_0 = \text{const}$  на расстояние  $ly'_0$ . Умножив на  $2y'_0/k$  и проинтегрировав уравнение движения частицы внутри квадрупольного

$$y'' \pm ky = 0,$$

получим уравнение

$$y^2 \pm \left( \frac{y'}{\sqrt{k}} \right)^2 = \text{const}, \quad (1.26)$$

Здесь знак плюс соответствует собирающей плоскости квадрупольной линзы. При этом уравнение (1.26) представляет собой уравнение окружности с центром в начале координат на нормированной фазовой плоскости  $\{y, y'/\sqrt{k}\}$ . При знаке



Фиг. 1.9. Преобразование в фазовой плоскости, производимое пространством, свободным от поля.

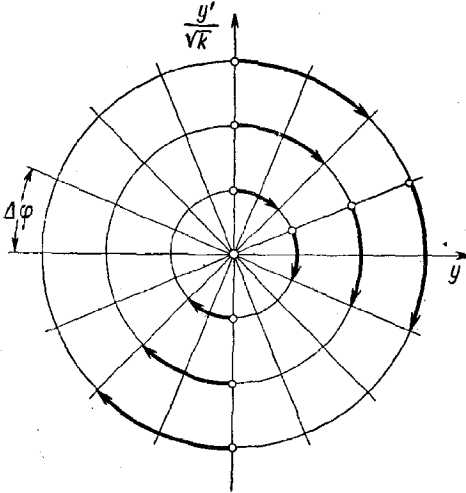
же минус, что соответствует рассеивающей плоскости квадрупольной линзы, уравнением (1.26) определяется симметричная гипербола на той же нормированной плоскости. Это означает, что представляющие точки траекторий на фазовой плоскости будут двигаться по концентрическим окружностям или по гиперболам.

Определим угловое смещение представляющей точки на нормированной фазовой плоскости при движении частицы в собирающей плоскости квадрупольной линзы длиной  $l$ . Для этого запишем преобразование квадрупольной линзы (1.15а) в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} y \\ \frac{y'}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \frac{y'_0}{\sqrt{k}} \end{pmatrix},$$

откуда видно, что все представляющие точки сместятся по часовой стрелке на угол  $\varphi = l\sqrt{k}$ . Таким образом, легко проследить геометрически за траекторией любой представляющей точки (фиг. 1.10).

Для рассеивающей плоскости квадрупольной линзы графическое построение сложнее, хотя математически этот случай



Ф и г. 1.10. Преобразование в нормированной фазовой плоскости, производимое квадрупольной линзой (фокусировка).

по существу симметричен предыдущему. Почленно складывая и вычитая уравнения (1.16а)

$$y = y_0 \operatorname{ch} \varphi + \frac{y'_0}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \varphi,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{k}} = y_0 \operatorname{sh} \varphi + \frac{y'_0}{\sqrt{k}} \operatorname{ch} \varphi,$$

получаем для рассеивающей плоскости линзы длиной  $l$  уравнение

$$y \pm \frac{y'}{\sqrt{k}} = e^{\pm \varphi} \left( y_0 \pm \frac{y'_0}{\sqrt{k}} \right), \quad (1.27)$$

где

$$\varphi = l \sqrt{k}.$$

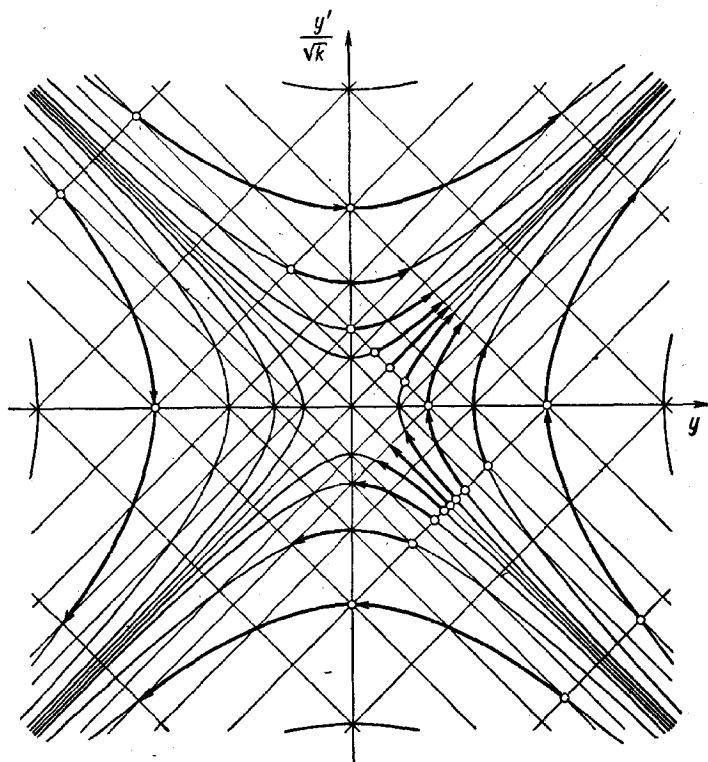
Из него видно, что все начальные точки траекторий, расположенные в фазовой плоскости на прямой

$$y_0 \pm \frac{y'_0}{\sqrt{k}} = \operatorname{const}, \quad (1.28)$$

переместятся на параллельную прямую

$$y \pm \frac{y'}{\sqrt{k}} = e^{\pm\varphi} \text{const.}$$

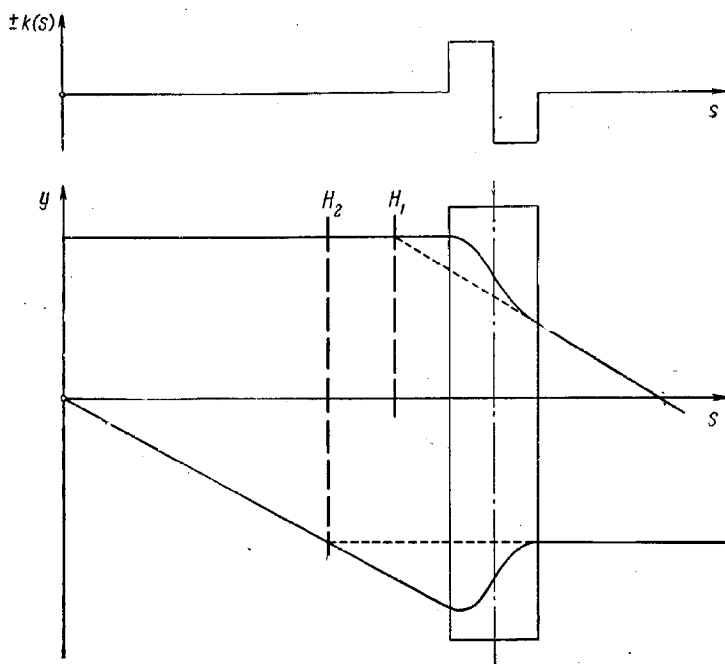
Так как отдельные точки движутся по гиперболам, их траектории можно вычертить, если построить в фазовой плоскости



Фиг. 1.11. Преобразование в нормированной фазовой плоскости, производимое квадрупольной линзой (дефокусировка).

семейство соответствующих гипербол и, кроме того, два ортогональных семейства параллельных прямых линий (1.28), расстояния между которыми меняются в геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{\Delta\varphi}$  (фиг. 1.11). Очевидно, что эти линии в фокусирующей плоскости квадруполя соответствуют семейству концентрических окружностей с центром в начале координат и семейству прямых, проходящих через начало координат под углами, отличающимися на  $\Delta\varphi$ .





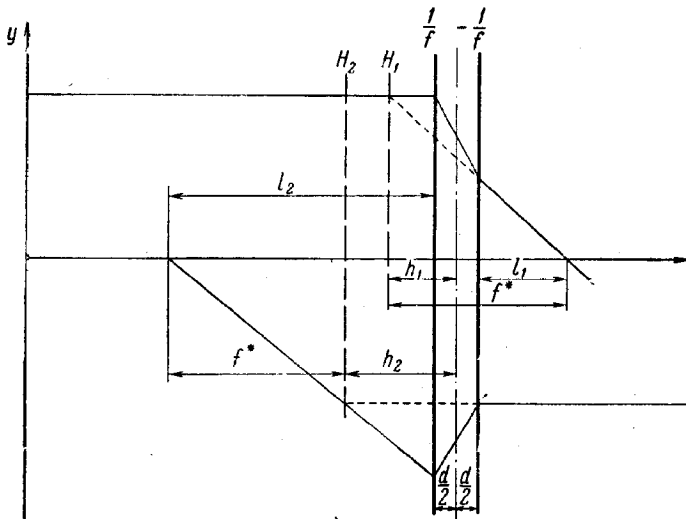
Фиг. 1.12а. Главные плоскости  $H$  и траектории антисимметричного дублета при  $1/kd^2 = 2$ .

Точное линейное преобразование.

Для практического пользования методом графического построения траекторий нужно заготовить стандартный рабочий чертеж больших размеров, на котором изображены пять наложенных друг на друга семейств кривых, схематически показанных на фиг. 1.10 и 1.11. Исследуя с помощью таких графиков системы из квадрупольных линз с силами  $k_i$ , при входе траектории в  $i$ -й квадруполь следует резко изменять вертикальный масштаб графика в  $1/\sqrt{k_i}$  раз, а при выходе траектории из квадруполя — возвращаться к прежнему масштабу.

## § 8. ДУБЛЕТЫ И ТРИПЛЕТЫ.

Простейшей системой из квадрупольных линз, способной сфокусировать пучок в обоих направлениях одновременно, является дублет, составленный из двух линз противополож-



Фиг. 1.126. Главные плоскости  $H$  и траектории антисимметричного дублета при  $1/kd^2 = 2$ .

Приближение тонких линз. Горизонтальная ось — ось  $s$ .

ной полярности<sup>1)</sup>. Если фокусные расстояния этих линз равны  $f_1$  и  $f_2$  и линзы разделены свободным от поля пространством длиной  $d$ , то матрица преобразования такого дублета в приближении тонких линз запишется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f^*} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

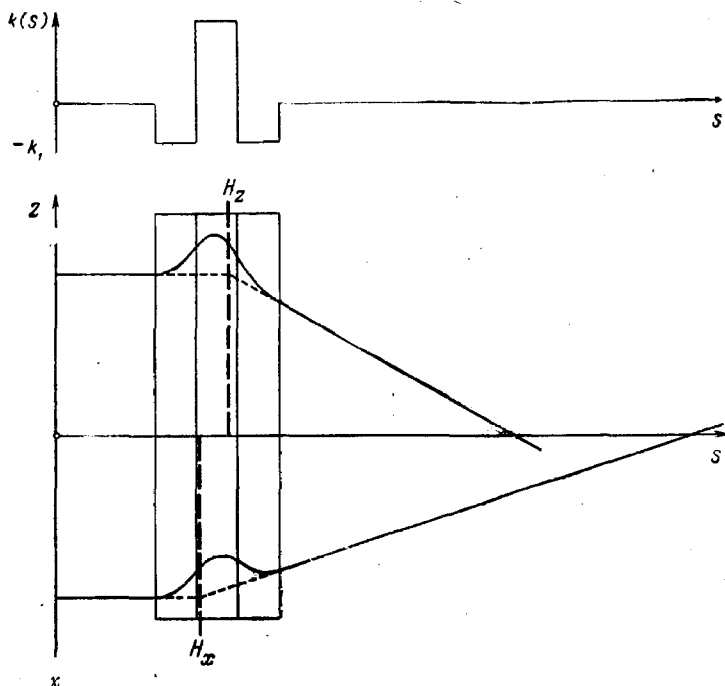
где

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

а  $1/f^*$  — эффективная оптическая сила дублета.

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда  $f_1 = -f_2 = f$ . Такой дублет может быть назван антисимметричным. Он состоит из линз равной силы и одинаковой длины, но с противоположным направлением поля, так что функция  $k(s)$ , описывающая распределение поля дублета вдоль оси  $s$ ,

<sup>1)</sup> То есть линз, у которых за собирающей плоскостью первой линзы следует рассеивающая плоскость второй. — Прим. ред.



Фиг. 1.13а. Главные плоскости  $H$  и траектории симметричного триплета при  $1/k_1 d^2 = 3$ .

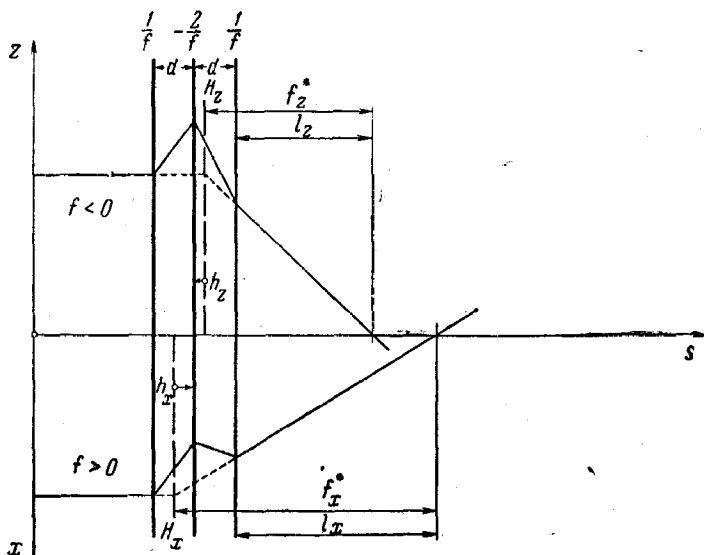
Точное линейное преобразование.

антисимметрична относительно его центра. На фиг. 1.12а представлены функция  $k(s)$  и две траектории, определяющие положение главных плоскостей  $H_1$  и  $H_2$ . На фиг. 1.12б изображена та же система в приближении тонких линз. В обоих случаях отношение величины  $1/kd$ , равной в данном приближении фокусному расстоянию линзы, к расстоянию между центрами линз  $d$  взято равным  $1/kd^2 = 2$ .

Для антисимметричного дублета матрица преобразования (1.29) в приближении тонких линз принимает простую форму

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

где  $f > 0$  для одной из плоскостей и  $f < 0$  для другой. Такой дублет фокусирует в обеих плоскостях с одинаковой оптиче-



Фиг. 1.136. Главные плоскости  $H$  и траектории симметричного триплета при  $1/k_1 d^2 = 3$ .  
Приближение тонких линз.

ской силой  $1/f^* = d/f^2$ . Но расстояние между его главными плоскостями велико, и они, как правило, расположены вдали от дублета по разные стороны от него. В приближении тонких линз из выражения (1.30) можно найти положение главных плоскостей

$$h_1 = |f| - \frac{d}{2},$$

$$h_2 = |f| + \frac{d}{2}$$

и положение фокусов

$$l_1 = \frac{f^2}{d} - |f|,$$

$$l_2 = \frac{f^2}{d} + |f|.$$

Фокусные расстояния дублета в плоскостях  $z0s$  и  $x0s$  в некоторых пределах могут выбираться независимо одно от другого в соответствии с соотношением (1.29). Но поскольку расстояние между главными плоскостями  $H_1$  и  $H_2$  велико, мы даже в грубом приближении не можем рассматривать дублет

как одну тонкую линзу, расположенную в данной плоскости с данными фокусными расстояниями  $f_z$  и  $f_x$ . С этой точки зрения симметричный триплет является более подходящей системой, так как обе главные плоскости близки к его центру, а фокусные расстояния  $f_z$  и  $f_x$  также можно варьировать независимо друг от друга. Таким образом, симметричный триплет можно хорошо аппроксимировать тонкой линзой, расположенной в его центре, и, видимо, поэтому при проектировании устройств для транспортировки пучков часто используются симметричными триплетами из квадрупольных линз.

В качестве примера рассмотрим триплет, состоящий из трех квадрупольных линз одинаковой длины, причем поле центральной линзы в 2 раза сильнее крайних линз и противоположно им по направлению (фиг. 1.13а). В приближении тонких линз матрица преобразования для такого триплета с учетом выражения (1.30) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{d^2}{f^2} & 2d\left(1 + \frac{d}{f}\right) \\ -2\frac{d}{f^2}\left(1 - \frac{d}{f}\right) & 1 - 2\frac{d^2}{f^2} \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где  $f > 0$  для одной плоскости и  $f < 0$  для другой. Соответственно эффективная оптическая сила триплета равна

$$\frac{1}{f^*} = 2\frac{d}{f^2}\left(1 - \frac{d}{f}\right).$$

Из выражения (1.31) определяем положение главных плоскостей триплета

$$h = \frac{d^2}{f-d}$$

и положение фокусов

$$l = \frac{f}{2}\left(\frac{f+d}{d} - \frac{d}{f-d}\right).$$

Во всех трех выражениях  $f$  положительно для плоскости  $x0s$  и отрицательно для плоскости  $z0s$ . На фиг. 1.13а представлены функция  $k(s)$  для триплета и две траектории, определяющие положение главных плоскостей  $H_z$  и  $H_x$ . Отношение величины  $1/k_1d$ , равной в приближении тонкой линзы фокусному расстоянию квадрупольной линзы, к расстоянию между центрами

линз  $d$  взято равным  $1/k_1 d^2 = 3$ . На фиг. 1.13б показана та же система в приближении тонких линз.

Тот факт, что симметричный триплет можно рассматривать как одну тонкую линзу (благодаря малому расстоянию главных плоскостей от его центра), — несомненное преимущество в тех случаях, когда при расчетах используется приближение тонких линз. Но нужно иметь в виду, что строить схему только из симметричных триплетов означало бы ограничиваться при проектировании рамками довольно узкого класса оптических систем. То же самое, хотя и в несколько меньшей степени, относится к дублетам как основным элементам проектируемой системы. Такие системы могут оказаться далеко не самым лучшим и самым экономичным решением данной оптической задачи. Поэтому, конечно, не следует вводить такие ограничения при проектировании системы, если только это не упрощает и не ускоряет расчет. В следующем параграфе описывается быстрый метод расчета, одинаково хорошо применимый ко всем типам систем. Он основан на самом общем подходе, при котором рассматриваются отдельные квадрупольи.

## § 9. АНАЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА

Хотя методы, описанные в предыдущих параграфах, позволяют продумывать систему в общих чертах и составлять предварительные схемы, обычно требуется более эффективный метод расчета. Ввиду огромного количества возможных комбинаций параметров такой метод должен облегчать проектировщику выбор наиболее подходящего варианта и быстро сравнение достоинств сложных систем. Я полагаю, что при расчетах оптических систем человеческую интуицию нельзя полностью заменить каким-либо автоматическим устройством и что, следовательно, ходом расчета должна управлять интуиция, опирающаяся на помощь автоматического вычислительного устройства.

Такое автоматическое устройство должно, по-видимому, обеспечивать следующие операции:

1. Быстрый ручной ввод параметров системы (длины, положения, силы квадрупольей) и начальных условий  $z_0, z'_0, x_0, x'_0$ .

2. Быстрый расчет двух траекторий  $z(s)$  и  $x(s)$  с индикацией их на экране осциллографа в виде неподвижных кривых, которые немедленно меняются при изменении вводимых в устройство параметров системы или начальных условий.

(Быстрота изменения обеих траекторий на осциллограмме при изменении какого-либо параметра крайне важна для интуитивного понимания свойств системы; задержка более чем на несколько секунд значительно снизила бы ценность такого устройства.)

3. Графическое построение траектории с точностью порядка  $10^{-3}$ .

(Большая точность обычно не имеет смысла, так как она соответствует членам высших порядков, которыми мы пренебрегли в линейном приближении.)

В принципе всеми описанными качествами обладает быстродействующая цифровая вычислительная машина, дополненная цифро-аналоговым преобразователем для индикации на экране осциллографа. Но при современном уровне техники, видимо, проще воспользоваться аналоговой вычислительной машиной.

В электронном аналоговом вычислительном устройстве функции независимой переменной представляются зависящими от времени напряжениями. Большое число электронных блоков, выполняющих основные математические операции с этими напряжениями (например, сложение, умножение, интегрирование), на панели соединяются друг с другом в соответствии с блок-схемой, которая является электрическим аналогом решаемых уравнений. Аналоговые устройства такого рода имеются в продаже, причем точность отдельных экземпляров колеблется от  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$ .

При нахождении с помощью такого устройства траекторий частиц в системах из квадрупольных линз обычно исходят из линейных уравнений движения в квадрупольной линзе (1.14)

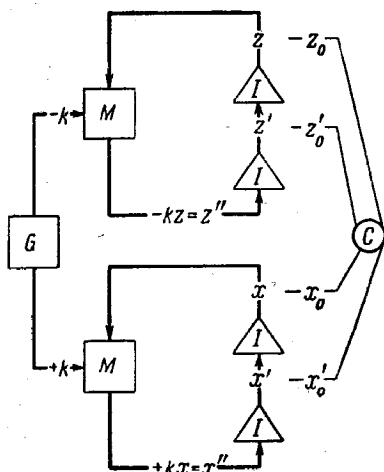
$$z'' + k(s)z = 0,$$

$$x'' - k(s)x = 0.$$

Функция  $k(s)$ , характеризующая параметры системы, вырабатывается генератором ступенчатого сигнала и с разными знаками подается в две одинаковые аналоговые цепи, которые решают уравнения (1.14) одновременно для обеих координат  $z$  и  $x$ . Конечно, можно было бы обойтись одной цепью и решать уравнения (1.14) поочередно, но, поскольку уравнения взаимосвязаны, такой вариант менее удовлетворителен.

Блок-схема двух аналоговых цепей показана на фиг. 1.14. Функции  $z''$  и  $x''$  дважды интегрируются, умножаются на  $\pm k$  и вновь подаются на вход первых интеграторов. Траектории  $z(s)$  и  $x(s)$  с маркировкой положения линз одновременно развертываются на экране осциллографа. Чтобы полу-

читать неподвижные кривые, аналоговая машина включается в периодическом режиме с частотой, примерно равной 1 гц. При такой частоте технически достижима точность выше 1%. Для получения большей точности после оптимизации системы на большой частоте машину можно переключить на меньшую частоту и записать точную кривую с помощью самопишущего прибора.



Фиг. 1.14. Блок-схема аналоговой вычислительной машины.

$I$  — интегратор,  $M$  — умножитель,  $G$  — генератор функции  $k(s)$ ,  $C$  — ввод начальных условий.

На основе промышленного аналогового устройства<sup>1)</sup> была создана система подобного типа, которая работала с необходимой точностью  $10^{-3}$  [9]. Промышленные умножители  $M$  в ней не использовались [27], так как они не обеспечивают достаточной точности. Поскольку в произведении  $ky$  только величина  $y(s)$  является непрерывно меняющейся функцией, а  $k(s)$  кусочно-постоянна, можно получать такие произведения с помощью набора потенциометров и соединенных с ними переключателей. Для введения величины  $k$  одновременно в обе цепи аналоговой вычислительной машины используются спаренные потенциометры высокой относительной точности. Блок переключателей выполнен на транзисторах<sup>2)</sup> и синхронизируется кварцевым генератором с умножителем частоты.

<sup>1)</sup> Типа PACE (модель 231R) фирмы «Electronic Associates».

<sup>2)</sup> W. Kern, A. Krolzig, частное сообщение.



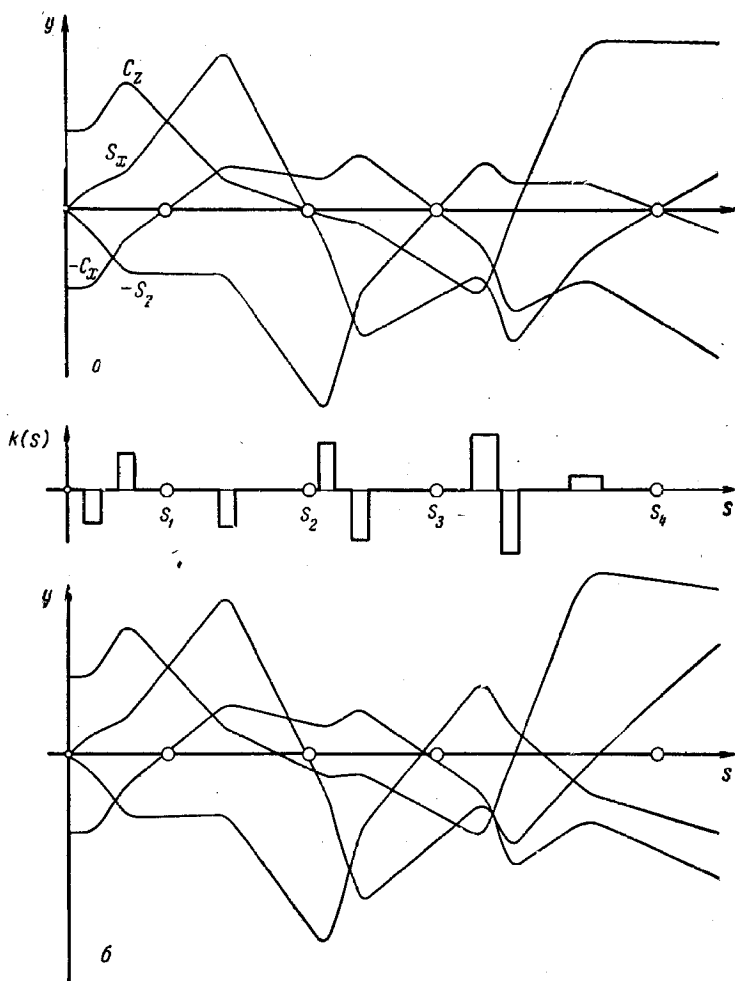
Длины квадруполей и пространств, свободных от поля, задаются числом импульсов. Таким образом, длина каждого элемента преобразуется в дискретный сигнал, который можно ввести в аналоговое устройство с помощью цифрового переключателя. На данной установке можно исследовать системы, содержащие до 17 квадрупольных линз. Переход от «быстрого» режима работы к «медленному» осуществляется путем выбора других временных баз и интегрирующих конденсаторов.

Сопrotивление транзисторного переключателя в положениях «открыто» и «закрыто» пока еще не может сравниться с сопротивлением механического реле. Но временная точность, которая особенно важна в быстром режиме работы, у транзисторного переключателя гораздо выше, чем у реле. Поскольку по своим свойствам реле и транзисторные переключатели дополняют друг друга, в данном устройстве используется комбинированная система, в которой транзисторный переключатель контролирует работу по времени, а реле осуществляет «плотный» контакт через несколько миллисекунд, обусловленных задержкой и движением контакта.

Силы квадруполей и начальные условия траекторий подбираются путем поворота ручек потенциометров при одновременном считывании точных значений на цифровом вольтметре. Таким образом, оператор все время получает необходимую информацию и может контролировать все входные данные и результаты. Производя пробные изменения параметров, он сразу же определяет, как можно улучшить систему, и это позволяет ему быстро просматривать большое количество оптических систем в поисках оптимальной конфигурации. Первый опыт работы с такой аналоговой вычислительной машиной показал, что она приносит пользу при проектировании, особенно вследствие наглядности решения даже в очень сложных случаях, а также благодаря высокой точности, которая облегчает последующую оценку оптимальных параметров.

В качестве примера выходных данных аналоговой машины на фиг. 1.15, *a* показаны главные траектории в системе из восьми линз, рассчитанной так, чтобы удовлетворялись следующие произвольно выбранные условия:

$$\begin{aligned} S'_z(s_1) &= C_x(s_1) = 0, \\ C_z(s_2) &= S_x(s_2) = 0, \\ S_z(s_3) &= C_x(s_3) = 0, \\ S_z(s_4) &= C'_z(s_4) = S_x(s_4) = 0, \end{aligned}$$



Ф и г. 1.15. Главные траектории в системе из восьми линз, рассчитанные при помощи аналоговой вычислительной машины.

$a$  - при  $\Delta p/p_0 = 0$ ;  $b$  - при  $\Delta p/p_0 = -3\%$ .

Вопрос о применении аналоговых вычислительных машин при расчетах систем, содержащих магниты и масс-сепараторы, а также при некоторых расчетах в оптике огибающих будет рассмотрен в гл. 2 и 4<sup>1)</sup>.

## § 10. ХРОМАТИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ

До сих пор мы рассматривали только траектории частиц с фиксированным импульсом  $p=p_0$ . Вид таких траекторий определяется функцией  $k(s, p_0) = (e/p_0)g(s)$ , которая характеризует свойства квадрупольной линзы для частиц с данным импульсом. Но каждый пучок содержит частицы, импульсы которых лежат в некотором интервале, и, следовательно, мы должны изучить изменение траектории, вызванное относительным изменением импульса  $\Delta p/p_0 = (p - p_0)/p_0$ . По аналогии со световой оптикой, где фокусное расстояние также меняется с длиной волны, такое изменение траекторий называется «хроматической aberrацией».

Изменение импульса частиц легко моделируется на аналоговой вычислительной машине, описанной в предыдущем параграфе. Поскольку в уравнениях траекторий (1.14) функция  $k(s, p)$  обратно пропорциональна  $p$ , достаточно лишь изменить величину этой функции в  $p_0/p = (1 + \Delta p/p_0)^{-1}$  раз. Для примера на фиг. 1.15, б показано изменение траекторий, изображенных на фиг. 1.15, а, вызванное уменьшением импульса на 3%. В аналоговой машине полезно иметь переключатель, позволяющий в любое время вводить в нее заданное изменение импульса  $\pm \Delta p/p_0$ .

При небольших значениях  $\Delta p/p_0$  влияние разброса по импульсам можно исследовать аналитически довольно простым методом. Этот метод позволяет получать основные данные о хроматической aberrации в системе и делать некоторые общие выводы. Обозначив изменение траектории, вызванное изменением импульса  $\Delta p/p_0 \ll 1$ , через  $\eta(s)$ , можно записать уравнения для первоначальной траектории  $y(s)$  и траектории  $y(s) + \eta(s)$  следующим образом:

$$y'' \pm ky = 0,$$

$$(y + \eta)'' \pm k \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) (y + \eta) = 0.$$

Вычитая эти уравнения одно из другого и пренебрегая членом второго порядка малости, пропорциональным  $\eta(\Delta p/p_0)$ ,

<sup>1)</sup> Более подробно вопросы использования аналоговых вычислительных машин рассмотрены в монографиях [38, 39]. — Прим. ред.

получаем

$$\eta'' \pm k\eta = \pm \frac{\Delta p}{p_0} ky = - \frac{\Delta p}{p_0} y'' \quad (1.32)$$

Поскольку траектория, как мы предположили, начинается в точке  $s=0$  и имеет те же самые наклон и смещение относительно оси, что и первоначальная траектория, функция  $\eta(s)$  по определению удовлетворяет начальным условиям  $\eta_0 = \eta'_0 = 0$ . Подставив эти начальные условия в уравнение (1.32), мы можем непосредственно рассчитать хроматическую aberrацию  $\eta(s)$  для любой данной траектории  $y(s)$ . Так как траектория  $y(s)$  определяется своими начальными условиями  $y_0$  и  $y'_0$ , мы можем представить  $\eta$  как функцию  $s, y_0, y'_0$

$$\eta = \eta(s; y_0, y'_0).$$

При такой записи подразумевается, что  $\eta$  зависит также от выбора начальной точки  $s=0$ .

Уравнение (1.32) линейно относительно  $\eta$  и  $y$ . Следовательно, хроматическая aberrация линейной комбинации двух траекторий равна соответствующей линейной комбинации отдельных aberrаций:

$$\begin{aligned} \eta(s; a \{y_{1,0}, y'_{1,0}\} + b \{y_{2,0}, y'_{2,0}\}) = \\ = a\eta(s; y_{1,0}, y'_{1,0}) + b\eta(s; y_{2,0}, y'_{2,0}). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (1.32) можно решить с помощью аналогового устройства, изображенного на фиг. 1.14, если добавить лишь одно электрическое соединение и один элемент, изменяющий знак. Используя одну из цепей этого устройства для расчета траектории  $y(s)$ , надо выделить функцию  $y''(s)$ , умножить ее на постоянную величину  $\Delta p/p_0$  и подать на вход первого интегратора во второй цепи. При изменении знака функции  $k(s)$  и введении нулевых начальных условий вторая цепь будет вычислять величину  $\eta(s; y_0, y'_0)$ .

Чтобы получить выражение для хроматической aberrации в аналитическом виде, умножим уравнение (1.32) на интегрирующий множитель  $y$  и заменим в левой части  $\pm ky$  на  $-y''$ . В результате получим<sup>1)</sup>

$$\eta'' y - \eta y'' = \frac{d}{ds} (\eta' y - \eta y') = \pm \frac{\Delta p}{p_0} ky^2 = - \frac{\Delta p}{p_0} y'' y,$$

<sup>1)</sup> W. Kern, частное сообщение.

или, интегрируя,

$$\eta'y - \eta y' = \pm \frac{\Delta p}{p_0} \int_0^s ky^2 d\sigma = - \frac{\Delta p}{p_0} \int_0^s y''y d\sigma. \quad (1.33)$$

Путем интегрирования по частям преобразуем выражение (1.33) следующим образом:

$$\eta'y - \eta y' = \frac{\Delta p}{p_0} \left( \int_0^s y'^2 d\sigma + y_0 y'_0 - y y' \right). \quad (1.33a)$$

Прежде чем делать на основании этих выражений общие выводы, применим их для расчета хроматической аберрации в фокальной плоскости и плоскости изображения фокусирующей системы квадрупольных линз.

а) Найдем хроматическую аберрацию  $\eta_1$  траектории  $y(s) = y_0 C(s)$  в фокальной плоскости  $s = s_1$ . Здесь  $C(s)$  — косинусообразная траектория, которая обращается в нуль в этой плоскости (§ 4). Для примера на фиг. 1.16 показана хроматическая аберрация произвольной системы из четырех линз.

Подставляя условия

$$y'_0 = 0, \quad y(s_1) = y_1 = 0$$

в выражения (1.33) и (1.33a), получаем

$$\eta_1 = \mp \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y'_1} \int_0^{s_1} ky^2 d\sigma = \pm \frac{\Delta p}{p_0} y_0 S_1 \int_0^{s_1} kC^2 d\sigma \quad (1.34)$$

и

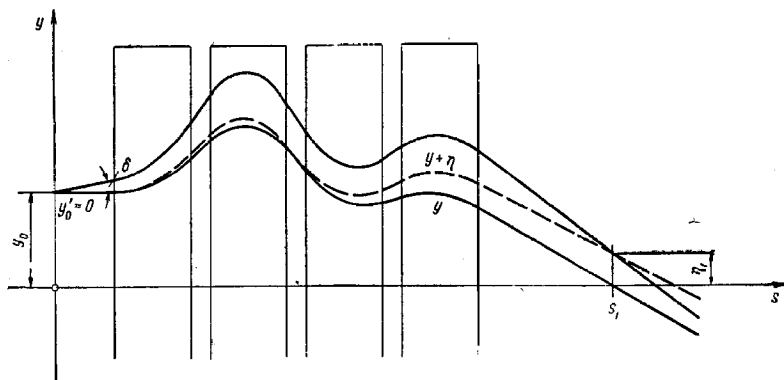
$$\eta_1 = - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y'_1} \int_0^{s_1} y'^2 d\sigma = \frac{\Delta p}{p_0} y_0 S_1 \int_0^{s_1} C'^2 d\sigma. \quad (1.34a)$$

Из выражения (1.34a) явствует, что при  $y_0 \neq 0$  хроматическая аберрация  $\eta_1$  никогда не обращается в нуль. Таким образом, из квадрупольных линз нельзя создать систему с ахроматическим фокусом. Физически (в приближении тонкой линзы) это объясняется тем, что диспергирующий фактор

$$p \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{f} \right) = -kl$$

полностью определяется силой квадруполя, тогда как в световой оптике при данной силе линзы этот фактор зависит от сорта стекла <sup>1)</sup>).

Из выражения (1.34) видно, что в хроматическую aberrацию  $\eta_1$  вносят вклад собирающие и рассеивающие квадрупольные линзы, причем они дают вклад разного знака, так что происходит частичная компенсация aberrации. Но



Фиг. 1.16. Хроматическая aberrация в фокальной плоскости.

в собирающей системе из квадруполей средняя величина  $ky^2$  в собирающих линзах больше, чем в рассеивающих (фиг. 1.16), а поэтому вклад от собирающих линз будет преобладать и aberrация системы не будет равна нулю.

Можно применить другой способ описания хроматической aberrации  $\eta$  в фокальной плоскости, вводя характеристическое угловое отклонение  $\delta$  в точке  $s=0$ , которое вызывает в точке  $s=s_1$  смещение траектории, равное  $\eta_1$  (фиг. 1.16). Из формулы (1.19) для данного случая имеем

$$\eta_1 = S_1 \delta,$$

$$y'_1 = C'_1 y_0,$$

так как  $C_1 = y'_0 = 0$ . Перемножая оба равенства, получаем

$$\eta_1 y'_1 = S_1 C'_1 y_0 \delta = - y_0 \delta.$$

<sup>1)</sup> Здесь рассматриваются магнитные линзы, но аналогичный вывод можно сделать и для электростатических. Комбинированная же линза, составленная из магнитных и электростатических квадрупольных линз, может быть ахроматической [37]. — Прим. ред.

Подставив последнее равенство в выражение (1.34а), получим

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y_0} \int_0^{s_1} y'^2 d\sigma = \frac{\Delta p}{p_0} y_0 \int_0^{s_1} C'^2 d\sigma. \quad (1.35)$$

Таким образом, хроматическая aberrация вызывает такое же расширение фокальной точки, какое наблюдалось бы при входе в систему расходящегося пучка с углом раствора  $2\delta$ , определяемым формулой (1.35).

б) Найдем хроматическую aberrацию  $\eta_2$  траектории  $y(s) = y'_0 S(s)$  в плоскости изображения  $s = s_2$ , где  $S(s)$  — синусообразная траектория, которая обращается в нуль в плоскости  $s = s_2$  (§ 4). В качестве примера на фиг. 1.17 представлена хроматическая aberrация произвольной системы из четырех линз. Подставляя условия

$$y_0 = 0, \quad y(s_2) = y_2 = 0$$

в выражения (1.33) и (1.33а), получаем

$$\eta_2 = \mp \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y'_2} \int_0^{s_2} k y'^2 d\sigma = \mp \frac{\Delta p}{p_0} y'_0 C_2 \int_0^{s_2} k S^2 d\sigma \quad (1.36)$$

и

$$\eta_2 = - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y'_2} \int_0^{s_2} y'^2 d\sigma = - \frac{\Delta p}{p_0} y'_0 C_2 \int_0^{s_2} S'^2 d\sigma. \quad (1.36а)$$

Отсюда видно, что в системе из квадрупольных линз нельзя получить ахроматического изображения<sup>1)</sup>. Другой способ описания хроматической aberrации  $\eta_2$  в плоскости изображения [30] основан на введении характеристического локального смещения траектории  $d$  в точке  $s=0$ , вызывающего в точке  $s=s_2$  смещение траектории  $\eta_2$  (фиг. 1.17). Из равенства (1.19) для данного случая имеем

$$\eta_2 = C_2 d,$$

$$y'_2 = S'_2 y'_0,$$

так как  $S_2 = y_0 = 0$ . Перемножая почленно оба равенства, получаем

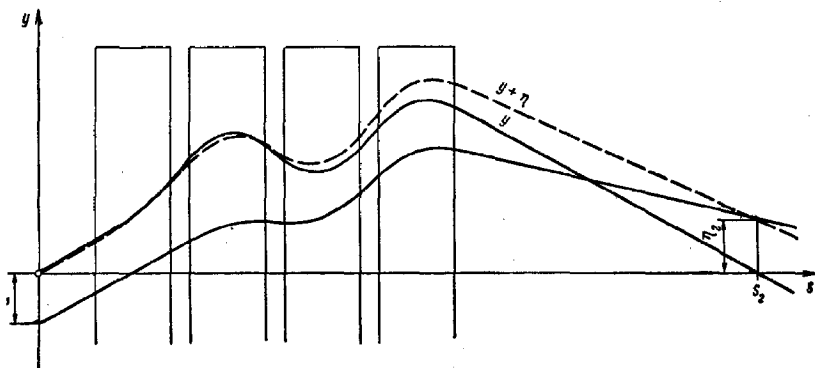
$$\eta_2 y'_2 = C_2 S'_2 y'_0 s = y'_0 d,$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 47. — *Прим. ред.*

что дает при подстановке в соотношение (1.36а) <sup>1)</sup>

$$d = - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{y'_0} \int_0^{s_2} y'^2 d\sigma = - \frac{\Delta p}{p_0} y'_0 \int_0^{s_2} S'^2 d\sigma. \quad (1.37)$$

Таким образом, хроматическая aberrация вызывает такое же расширение точечного изображения, какое возникало бы при замене точечного предмета предметом размером  $2d$ , определяемым равенством (1.37). Существование неустрани-



Фиг. 1.17. Хроматическая aberrация в плоскости изображения.

мой хроматической aberrации в фокальной плоскости и в плоскости изображения наводит на мысль о более общем утверждении, которое относилось бы ко всем пригодным для практических целей системам из квадрупольных линз. Такое утверждение действительно следует из выражения (1.33а) и может быть сформулировано следующим образом:

*Если система из квадрупольных линз не является строго дефокусирующей, то в ней нельзя получить ахроматического преобразования.* (1.38)

В этом утверждении выражения «ахроматическое преобразование» и «строго дефокусирующая» имеют следующий смысл.

Преобразование между плоскостями  $s=0$  и  $s=s_1$  называется ахроматическим, если в  $s=s_1$  хроматическая aberrация  $\eta_1$  и ее производная  $\eta'_1$  равны нулю для всех траекторий, т. е. если

$$\eta_1(y_0, y'_0) = \eta'_1(y_0, y'_0) = 0$$

при всех значениях  $y_0$  и  $y'_0$ .

<sup>1)</sup> G. von Dardel, частное сообщение.



Мы называем систему строго дефокусирующей в пространстве между плоскостями  $s=0$  и  $s=s_1$ , если в этих пределах для всех траекторий с  $y'(s) \neq 0$  произведение  $yy'$  возрастает, т. е. если

$$y_1 y'_1 > y_0 y'_0$$

при всех значениях  $y_0, y'_0$ .

Свойства строго дефокусирующей системы можно наглядно проиллюстрировать, например, на траекториях с  $y_1 = y_0 > 0$ , у которых наклон  $y'$  возрастает. На фазовой плоскости  $\{y, y'\}$  все представляющие точки таких траекторий (§ 7) испытывают смещение в направлении первого и третьего квадрантов, двигаясь от второго и четвертого квадрантов. Примером строго дефокусирующей системы является пространство, свободное от поля, или рассеивающая плоскость одиночной квадрупольной линзы.

Справедливость утверждения (1.38) следует из равенства (1.33а) при  $s=s_1$ . Если предположить, что преобразование ахроматично, то тогда левая часть в равенстве (1.33а) должна быть равна нулю, и мы имеем

$$y_1 y'_1 = y_0 y'_0 + \int_0^{s_1} y'^2 d\sigma > y_0 y'_0$$

при

$$y'(s) \neq 0,$$

откуда следует, что система должна быть строго дефокусирующей. Таким образом, во всех системах из квадрупольных линз, представляющих практический интерес, хроматическая aberrация неустранима. Но можно уменьшить aberrацию, уменьшив апертуру системы, если позволяет интенсивность пучка. Это объясняется тем, что при умножении траектории на постоянную величину, меньшую единицы, хроматическая aberrация умножается на ту же самую величину.

Выражение для хроматической aberrации  $\eta$  в явном виде получается из равенства (1.33), которое можно записать так:

$$\eta' y - \eta y' = y^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{\eta}{y} \right) = \pm \frac{\Delta p}{p_0} \int_0^s k y^2 d\sigma.$$

После интегрирования получим, например, для области  $y(s) \neq 0$

$$\eta(s) = \pm \frac{\Delta p}{p_0} y(s) \int_0^s \frac{1}{y^2} \int_0^\tau k y^2 d\sigma d\tau. \quad (1.39)$$

При общем анализе аберраций в § 13 мы получим несколько иное выражение для хроматической аберрации, которое явится обобщением изложенных результатов. Для численной оценки  $\eta$  выражение (1.56) из § 13, по-видимому, более удобно, чем (1.39).

## § 11. ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ МАГНИТНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

При бесконечно большой магнитной проницаемости стали и при однородном распределении тока в сечении катушки можно с большой точностью создавать поле с постоянным градиентом напряженности в апертуре магнитной линзы, обеспечивая правильные граничные условия. Это можно сделать по-разному, и некоторые примеры поперечных сечений таких магнитных линз показаны на фиг. 1.18.

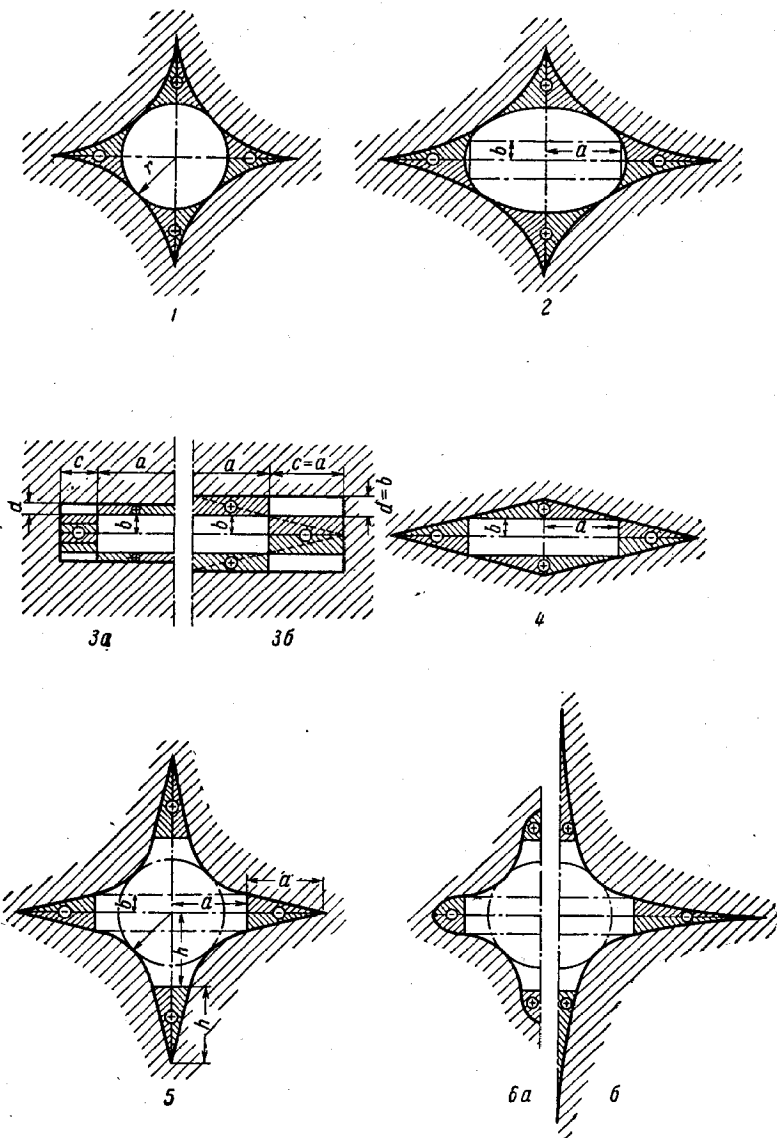
При конфигурации 1 мы имеем круглую апертуру и катушки с поперечным сечением в виде криволинейных треугольников [10]. Но круглая апертура не самая экономичная, так как в сильнофокусирующих системах из квадрупольных линз поперечное сечение пучка внутри линз обычно имеет вытянутую форму. Поэтому некруглые апертуры линз будут более экономичными, если используемая область поля соответствует поперечному сечению пучка (гл. 4, § 9 и 10). Конфигурация 2 с эллиптическим поперечным сечением [11] представляет собой обобщенный вариант конфигурации 1.

В квадруполье 3а (типа оконной рамы) имеются основная прямоугольная апертура площадью  $4ab$  и четыре дополнительные области площадью  $cd$  в его углах, где градиент поля также постоянен [12]. Поперечное сечение катушек прямоугольное. Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  можно варьировать согласно следующему соотношению:

$$bc = ad,$$

т. е. площадь поперечного сечения катушек должна оставаться постоянной.

При данном значении градиента поля в апертуре требуемая мощность минимальна при  $c = a$  и  $d = b$ . Этот частный случай соответствует конфигурации 3б, где штриховыми прямыми показаны эквипотенциали. Если квадруполь разрезать вдоль этих линий, а четыре внешние части удалить и заменить стальной рамой, то распределение поля во внутренней части останется тем же самым. При этом получается конфигурация 4 с треугольным поперечным сечением катушки, которая



Фиг. 1.18. Идеальные поперечные сечения различных квадрупольных магнитных линз.

называется ромбовидным квадруполем<sup>1)</sup>. При одинаковой плотности тока в сечении катушек градиент поля оказывается таким же, как и в случае 3б, и, следовательно, потребляемая мощность уменьшается вдвое.

Ромбовидный квадруполь можно рассматривать и как частный случай конфигурации 5. Здесь апертура ограничена четырьмя гиперболическими стальными полюсами, которые в области расположения катушек продолжены по касательным к гиперболам [13]. Катушки имеют треугольное поперечное сечение. На фигуре показано сечение такого квадрупольного поля в симметричном случае ( $h=a$ ). При этом апертура имеет крестообразную форму, которая допускает проведение пучка прямоугольного поперечного сечения (площадью  $4ab$ ) как при горизонтальной, так и при вертикальной его ориентации. Пучок того же поперечного сечения, но с другим отношением высоты к ширине также может быть проведен благодаря гиперболической форме полюсов. В конфигурации 5 ширину апертуры  $a$  и высоту  $h$  можно менять независимо друг от друга, перемещая точку сопряжения гиперболы с касательной. При этом площадь поперечного сечения катушки не меняется, но форма сечения треугольной катушки будет, вообще говоря, меняться. В предельном случае  $h=b$  мы получаем конфигурацию 4 с равными треугольниками. Конфигурацию 5 можно рассматривать как частный случай конфигураций 6а и 6б. Апертура при таких конфигурациях одинакова, но поперечное сечение катушек при конфигурации 6а ограничено выпуклыми кривыми, а при конфигурации 6б — вогнутыми [11].

При изготовлении катушек с точно заданным треугольным поперечным сечением или с сечением, ограниченным кривыми линиями, возникают сложные технические проблемы. Квадруполь типа 3 — единственная конфигурация, которую можно изготовить с достаточно высокой точностью, не сталкиваясь при этом со сложными техническими проблемами. Линзы такого типа созданы [14, 32]. Была изготовлена также большая ромбовидная квадрупольная линза со сложной конструкцией катушки [15]. Но, как правило, при проектировании квадрупольных линз стараются облегчить изготовление катушек, упрощая их форму. Кроме того, можно, хотя это и невыгодно экономически, отодвигать катушки от используемой части апертуры или использовать лишь часть апертуры, удаленную от катушек. Тогда поле в этой части апертуры будет определяться в основном формой стальных полюсов, которые можно

---

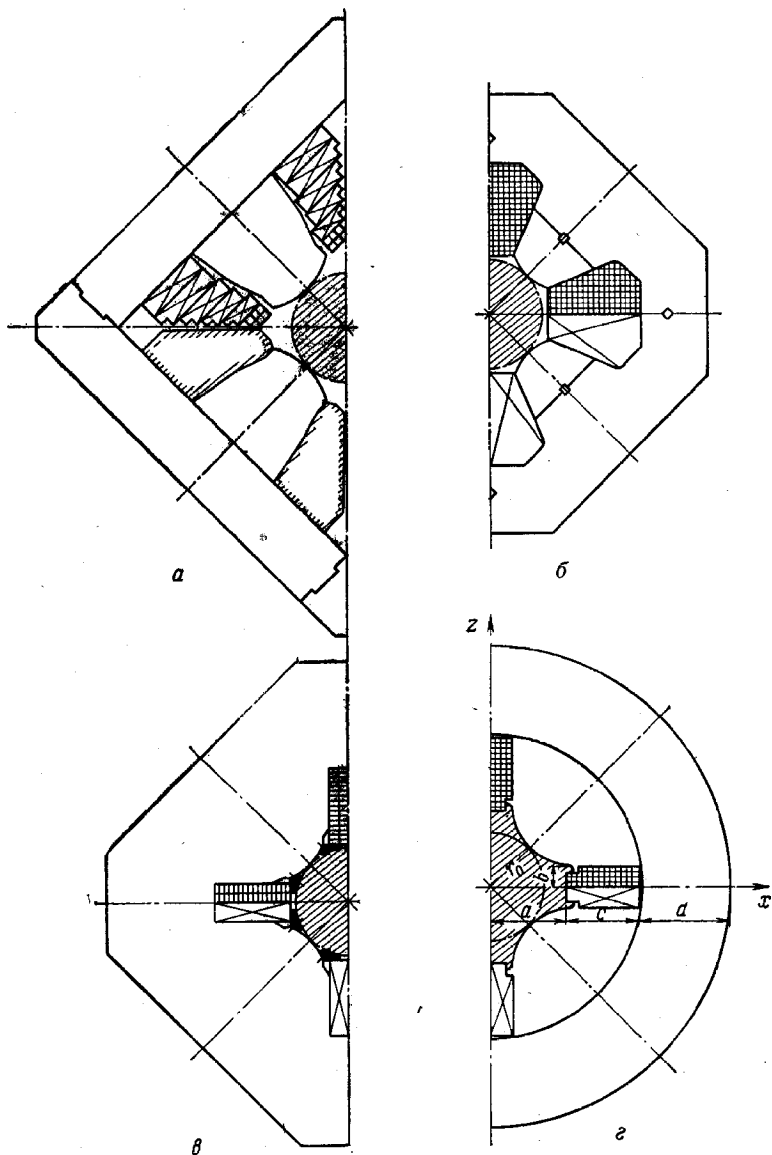
<sup>1)</sup> М. Н. Blewett, H. S. Snyder, частное сообщение.

изготовить с большой точностью, а влияние формы катушек сильно снизится, что позволяет задавать менее жесткие допуски на их размеры.

На фиг. 1.19 даны четыре примера поперечных сечений квадрупольных магнитных линз. В линзах типа *a*, *b* и *в* полезная апертура имеет круглую форму. Линза типа *a* — это «классический» квадруполь, который имеет своим преимуществом малую потребляемую мощность и применяется во многих лабораториях (см., например, [16]). Для облегчения изготовления обычно выбирают следующую форму профиля полюсных наконечников: в центре он представляет собой часть окружности, а затем переходит в касательные к окружности прямые для компенсации влияния обрыва полюса. Площадь поперечного сечения катушек велика, а ширина основания полюса соответственно мала. Поскольку полюса должны проводить не только центральный магнитный поток, выходящий из апертуры, но и боковой поток, выходящий из катушек, в квадрупольях такого типа основания полюсов обычно насыщаются раньше полюсных наконечников. Данный эффект, который ограничивает величину градиента поля, получаемого в апертуре, отсутствует в квадрупольной линзе типа *б* [17]. Здесь ширина полюса линейно возрастает к основанию таким образом, чтобы она была достаточной для проведения и бокового потока, выходящего из катушек.

Благодаря этому максимальный градиент поля определяется насыщением вблизи полюсного наконечника. Но поскольку для катушек остается меньше места, такая конфигурация должна потреблять большую мощность. В конструкции квадрупольной линзы типа *в* [18, 32] сделан еще один шаг в том же направлении, причем используются преимущества катушек прямоугольного сечения, более простых в изготовлении. Поскольку такие катушки могут быть изготовлены с большей механической точностью, их можно придвинуть ближе к полезной апертуре, не снижая точности поля, и тем самым уменьшить потребляемую мощность и вес стали. Профиль полюса и форма катушки представляют собой некоторое видоизменение конфигурации *1* (фиг. 1.18). Вырезы по обе стороны профиля полюса нужны для компенсации отклонения поперечного сечения катушки от квазиправильного сечения конфигурации *1*.

Квадруполь типа *г* [19] разработан на основе идеальной конфигурации *5* (фиг. 1.18) и предназначен для создания с большой точностью поля с постоянным градиентом во всей крестообразной апертуре линзы. Из соображений необходимого аксептанса системы (гл. 7, § 10) отношение размеров



Фиг. 1.19. Примеры конструкций магнитных квадрупольных линз (показаны только половины линз в разрезе).

апертуры  $a/b$  выбрано равным 4. Катушки такие же, как и катушки типа  $\beta$ , но у них вырезаны уголки, что позволяет продолжить профиль полюсного наконечника в область катушек. Профиль полюса — гиперболический с небольшими корректирующими выступами на концах, которые нужны для компенсации отличия поперечного сечения катушки от идеального треугольника. Квадруполи типа  $\beta$  и  $\gamma$  потребляют большую мощность, нежели типа  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку у первых меньше площадь поперечного сечения катушек.

При выборе наиболее подходящего типа квадрупольной линзы в каждом конкретном случае нужно учитывать много разных факторов. Что касается экономической стороны вопроса, то на основании своего опыта я могу утверждать, что можно доказать преимущества любого из описанных выше типов магнитных линз, приняв соответствующие предположения относительно стоимости изготовления, быстроты морального износа или срока службы, скважности рабочего режима и рабочего уровня мощности. Все эти параметры трудно установить заранее, особенно в случае обычных квадрупольных линз для транспортировки пучка, которые изготавливаются для различных, часто непредвидимых применений. Поэтому при таких оценках обычно получается, что минимальная стоимость линз разного типа примерно одинакова.

Что же касается точности поля и телесного угла захвата, то, вообще говоря, следует добиваться максимума путем тщательного конструирования и прецизионного изготовления при условии, что при этом не возрастают чрезмерно затраты. В некоторых случаях максимальная точность или полный угол захвата могут, конечно, и не требоваться, но зато в других случаях они будут необходимы. Здесь тоже предельные значения выбираются на основе личного мнения экспериментатора. Но общая тенденция развития связана, по-видимому, со все большим повышением точности и угла захвата.

## § 12. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ С КВАДРУПОЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В следующих двух параграфах (§ 13 и 14) мы рассмотрим aberrации квадрупольной линзы с учетом формы крайних полей. Для этого сначала запишем основные соотношения для магнитного поля с квадрупольной симметрией.

Если форма полюсов и катушек в магнитной квадрупольной линзе симметрична относительно четырех плоскостей

$$x = 0, \quad z = 0, \quad x = z, \quad x = -z$$

и если катушки питаются токами чередующихся направлений и равной силы, то магнитное поле будет удовлетворять условиям симметрии

$$B_z(-z, x, s) = B_z(z, x, s), \quad B_z(z, -x, s) = -B_z(z, x, s), \quad (1.40a)$$

т. е. составляющая  $B_z$  четна относительно  $z$  и нечетна относительно  $x$ ;

$$B_x(-z, x, s) = -B_x(z, x, s), \quad B_x(z, -x, s) = B_x(z, x, s), \quad (1.40б)$$

т. е. составляющая  $B_x$  нечетна относительно  $z$  и четна относительно  $x$ ;

$$B_s(-z, x, s) = -B_s(z, x, s), \quad B_s(z, -x, s) = -B_s(z, x, s), \quad (1.40в)$$

т. е. составляющая  $B_s$  нечетна и относительно  $z$  и относительно  $x$ ;

$$B_z(z, x, s) = B_x(x, z, s). \quad (1.40г)$$

Налагая эти условия симметрии на разложение поля в ряд по степеням  $z$  и  $x$  и пользуясь уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \left\{ \frac{\partial B_x}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial x}; \frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s}; \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\} = \{0; 0; 0\}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_s}{\partial s} = 0, \end{aligned} \quad (1.41)$$

мы можем записать проекции поля в виде

$$\begin{aligned} B_z &= x \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} x^{2k} a_{ik}(s), \\ B_x &= z \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} x^{2k} a_{ki}(s), \\ B_s &= zx \sum_{i, k=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} z^{2i} x^{2k} a'_{ik}(s), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где

$$a_{ik} = \frac{2i+1}{2k+1} a_{ki}.$$

Коэффициенты разложения  $a_{ik}$  являются функциями  $s$  и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$a''_{ik} + (2i+1)(2i+2)a_{i+1, k} + (2k+2)(2k+3)a_{i, k+1} = 0. \quad (1.43)$$



В частном случае  $i = k$  уравнение (1.43) упрощается:

$$a''_{kk} + 2(2k + 2)(2k + 3)a_{k, k+1} = 0, \quad (1.43a)$$

или

$$a''_{kk} + 2(2k + 1)(2k + 2)a_{k+1, k} = 0. \quad (1.43б)$$

Следовательно, разложение составляющих поля (1.42) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_z &= x \left[ g - \frac{1}{12} (3z^2 + x^2) g'' \right] + O(5), \\ B_x &= z \left[ g - \frac{1}{12} (3x^2 + z^2) g'' \right] + O(5), \\ B_s &= zx \left[ g' - \frac{1}{12} (z^2 + x^2) g''' \right] + O(5), \end{aligned} \quad (1.42a)$$

где величина

$$g(s) = a_{00}(s) = \left. \frac{\partial B_z}{\partial x} \right|_{z=x=0} = \left. \frac{\partial B_x}{\partial z} \right|_{z=x=0}$$

есть градиент поперечного поля на оси квадруполь, зависящий от  $s$ , а величина  $O(5)$  содержит все члены пятого и более высоких порядков.

Внутри квадрупольной магнитной линзы значительной длины поле практически не будет зависеть от  $s$ . Поэтому здесь  $B_s \equiv 0$ , а следовательно, и  $a'_{ik} \equiv 0$  при всех  $i$  и  $k$ . Разложение составляющих поля (1.42) принимает вид

$$\begin{aligned} B_z &= gx [1 + c_1(5z^4 - 10z^2x^2 + x^4) + \\ &\quad + c_2(9z^8 - 84z^6x^2 + 126z^4x^4 - 36z^2x^6 + x^8) + \dots], \\ B_x &= gz [1 + c_1(5x^4 - 10x^2z^2 + z^4) + \\ &\quad + c_2(9x^8 - 84x^6z^2 + 126x^4z^4 - 36x^2z^6 + z^8) + \dots], \end{aligned} \quad (1.44)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{g} a_{02}, \quad c_2 = \frac{1}{g} a_{04}.$$

Эти выражения мы получили с помощью уравнения (1.43), положив в нем  $a''_{ik} \equiv 0$ , откуда следует, что  $a_{ik} = 0$  при нечетных  $(i+k)$ .

Следовательно, разложение содержит только члены порядка  $4n+1$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$ .

Приведенные выше выражения для двумерного поля с квадрупольной симметрией можно получить другим путем, пользуясь цилиндрическими координатами

$$r = \sqrt{z^2 + x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{z}.$$

Чтобы написать такое разложение<sup>1)</sup>, введем потенциал  $\Phi(r, \varphi)$  посредством равенства

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi$$

и решим уравнение для потенциала

$$\Delta\Phi = \text{div grad } \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (1.45)$$

Допустим, что частное решение имеет вид

$$\Phi(r, \varphi) = u(r) f(\varphi),$$

и введем разделяющую постоянную  $m^2$  так, чтобы уравнение (1.45) свелось к двум уравнениям

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) - m^2 u &= 0, \\ \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + m^2 f &= 0, \end{aligned}$$

которые имеют решения

$$u = r^m$$

и

$$f = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi.$$

В силу условий симметрии (1.40а — 1.40г) должны выполняться равенства

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -f(\varphi)$$

и, следовательно,

$$a = 0 \quad \text{и} \quad m = 4n + 2, \quad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, общее решение уравнения для потенциала (1.45), которое представляет собой линейную комбинацию всех частных решений, дается выражением

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{4n+2} \sin(4n+2)\varphi. \quad (1.46)$$

Следовательно, составляющие поля

$$B_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \text{и} \quad B_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение.

можно записать в виде

$$B_r = gr \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4n} \sin(4n+2)\varphi,$$

$$B_\varphi = gr \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4n} \cos(4n+2)\varphi,$$
(1.47)

где

$$a_0 = 1,$$

$$g = \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ \varphi=\pi/4}} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ \varphi=0}}$$

и  $r_0$  — радиус максимальной окружности, вписанной в апертуру квадрупольной магнитной линзы.

Чтобы получить выражения для составляющих поля в декартовых координатах, воспользуемся преобразованием

$$B_z = B_r \cos \varphi - B_\varphi \sin \varphi,$$

$$B_x = B_r \sin \varphi + B_\varphi \cos \varphi$$
(1.48)

и получим

$$B_z = gr \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4n} \sin(4n+1)\varphi,$$

$$B_x = gr \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4n} \cos(4n+1)\varphi,$$
(1.49)

где  $a_0 = 1$ . Выражения (1.49) преобразуются в выражения (1.44), если записать  $\sin(4n+1)\varphi$  и  $\cos(4n+1)\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  в различных степенях и подставить

$$\sin \varphi = \frac{x}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{z}{r}$$

и

$$a_n = r_0^{4n} c_n.$$

Из второго выражения (1.47) видно, что мультипольные коэффициенты разложения  $a_n$  можно измерить с помощью плоской катушки, установленной по радиусу между  $r=0$  и  $r=r_0$  и вращающейся вокруг оси квадруполя [31]. Амплитуда определенной гармоники напряжения, индуцируемого в такой катушке, пропорциональна соответствующему коэффициенту  $a_n$ .

### § 13. АБЕРРАЦИИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

В данном параграфе мы рассмотрим aberrации второго и третьего порядков в системах с квадрупольной симметрией поля, пользуясь методом, который уже применялся в § 3. Подставив в основные уравнения траектории (1.3) разложения поля (1.42а) и разложения

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)} = \frac{1}{p_0} \left[1 - \frac{\Delta p}{p_0} + \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 + O(4)\right]$$

и

$$\sqrt{1 + z'^2 + x'^2} = 1 + \frac{1}{2} z'^2 + \frac{1}{2} x'^2 + O(4),$$

получим с точностью до членов третьего порядка [20] <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} z'' + kz &= k \frac{\Delta p}{p_0} z - k \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 z - \frac{3}{2} k z z'^2 - \frac{1}{2} k z x'^2 + \\ &+ k z' x x' + k' z x x' + \frac{1}{12} k'' z^3 + \frac{1}{4} k'' z x^2 + O(5), \\ x'' - kx &= -k \frac{\Delta p}{p_0} x + k \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 x + \frac{3}{2} k x x'^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k x z'^2 - k x' z z' - k' x z z' - \frac{1}{12} k'' x^3 - \frac{1}{4} k'' x z^2 + O(5), \end{aligned} \tag{1.50}$$

где

$$k = \frac{e g}{v_0}.$$

Разложив  $z(s)$ ,  $x(s)$  и их производные в ряд по степеням начальных значений  $z_0$ ,  $z'_0$ ,  $x_0$  и  $x'_0$ , получим для коэффициентов при линейных членах, т. е. для главных траекторий, уравнения

$$\begin{aligned} C'' \pm kC &= 0, \quad \text{причем } C(0) = 1, \quad C'(0) = 0, \\ S'' \pm kS &= 0, \quad \text{причем } S(0) = 0, \quad S'(0) = 1. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Эти уравнения имеют привычный вид, но  $k(s)$  здесь меняется непрерывно, а не является более ступенчатой функцией.

Для коэффициента  $q$  при каждом нелинейном члене разложения мы получаем дифференциальное уравнение вида

$$q'' \pm kq = f, \quad \text{причем } q(0) = q'(0) = 0. \tag{1.52}$$

<sup>1)</sup> А также D. L. J u d d, частное сообщение.

Его решение [21]<sup>1)</sup> имеет вид

$$q = S \int_0^s C f d\sigma - C \int_0^s S f d\sigma, \quad (1.53)$$

что легко проверить, продифференцировав его дважды:

$$q' = S' \int_0^s C f d\sigma - C' \int_0^s S f d\sigma,$$

$$q'' = S'' \int_0^s C f d\sigma - C'' \int_0^s S f d\sigma + (CS' - SC')f = \mp kq + f.$$

Уравнение (1.53) позволяет рассчитать нелинейные абберационные коэффициенты  $q$  для «возмущения»  $f$ . Как было показано в § 3, возмущение равно нулю для коэффициентов при всех квадрупольных членах, не содержащих  $\Delta p/p_0$ , и, следовательно, эти коэффициенты тождественно равны нулю. Кроме того, в силу условий симметрии (1.40) оказывается, что

$$\begin{aligned} z(s) \text{ содержит только} & \begin{cases} \text{нечетные произведения } z \text{ и } z', \\ \text{четные произведения } x \text{ и } x', \end{cases} \\ x(s) \text{ содержит только} & \begin{cases} \text{четные произведения } z \text{ и } z', \\ \text{нечетные произведения } x \text{ и } x'. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в разложении  $z$  и  $x$  остается только десять членов третьего порядка относительно  $z_0, z'_0, x_0$  и  $x'_0$  [20]<sup>2)</sup>. Кроме того, имеются два члена второго порядка и два третьего, содержащих  $\Delta p/p_0$  и характеризующих хроматическую абберацию.

Эти не равные нулю коэффициенты  $q(s)$  и соответствующие возмущения  $f(s)$  приведены в табл. 2. Функции  $f$  зависят от главных траекторий  $C_z, S_z, C_x, S_x$ , силы квадрупольа  $k(s)$  и их производных. Следовательно, если главные траектории, являющиеся решениями уравнений (1.51), известны, то выражение (1.53) позволяет рассчитать нелинейные абберационные коэффициенты на цифровой вычислительной машине.

<sup>1)</sup> Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка приводится в ряде справочников (см., например, [40]). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> См. также примечание на стр. 61.

Нелинейные коэффициенты  $q$  и соответствующие возмущения  $f$ 

$q_z$	$l_z$	$q_x$	$l_x$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z_0 = \tau_z$	$kC_z$	$\frac{\Delta p}{\rho_0} x_0 = \tau_x$	$-kC_x$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z'_0 = \sigma_z$	$kS_z$	$\frac{\Delta p}{\rho_0} x'_0 = \sigma_x$	$-kS_x$
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 z_0$	$k(\tau_z - C_z)$	$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 x_0$	$-k(\tau_x - C_x)$
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 z'_0$	$k(\sigma_z - S_z)$	$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 x'_0$	$-k(\sigma_x - S_x)$
$z_0^3$	$-C_z \bar{C}_z$	$x_0^3$	$C_x \bar{C}_x$
$z_0^2 z'_0$	$-S_z \bar{C}_z - C_z \bar{G}_z$	$x_0^2 x'_0$	$S_x \bar{C}_x + C_x \bar{G}_x$
$z_0 z_0'^2$	$-C_z \bar{S}_z - S_z \bar{G}_z$	$x_0 x_0'^2$	$C_x \bar{S}_x + S_x \bar{G}_x$
$z_0^3$	$-S_z \bar{S}_z$	$x_0^3$	$S_x \bar{S}_x$
$z_0 x_0^2$	$-C_z \bar{C}_x + C_x C'_x \bar{C}_z$	$x_0 z_0^2$	$C_x \bar{C}_z - C_z C'_z \bar{C}_x$
$z_0 x_0 x'_0$	$-C_z \bar{G}_x + H_x \bar{C}_z$	$x_0 z_0 z'_0$	$C_x \bar{G}_z - H_z \bar{C}_x$
$z_0 x_0'^2$	$-C_z \bar{S}_x + S_x S'_x \bar{C}_z$	$x_0 z_0'^2$	$C_x \bar{S}_z - S_z S'_z \bar{C}_x$
$z'_0 x_0^2$	$-S_z \bar{C}_x + C_x C'_x \bar{S}_z$	$x'_0 z_0^2$	$S_x \bar{C}_z - C_z C'_z \bar{S}_x$
$z'_0 x_0 x'_0$	$-S_z \bar{G}_x + H_x \bar{S}_z$	$x'_0 z_0 z'_0$	$S_x \bar{G}_z - H_z \bar{S}_x$
$z'_0 x_0'^2$	$-S_z \bar{S}_x + S_x S'_x \bar{S}_z$	$x'_0 z_0'^2$	$S_x \bar{S}_z - S_z S'_z \bar{S}_x$

Обозначения:

$$\bar{C}_{z,x} = \frac{3}{2} \left( kC'^2 - \frac{1}{18} k''C^2 \right)_{z,x},$$

$$\bar{S}_{z,x} = \frac{3}{2} \left( kS'^2 - \frac{1}{18} k''S^2 \right)_{z,x},$$

$$\bar{G}_{z,x} = 3 \left( kC'S' - \frac{1}{18} k''CS \right)_{z,x},$$

$$\bar{C}_{z,x} = \frac{1}{2} \left( kC'^2 - \frac{1}{2} k''C^2 \right)_{z,x},$$

$$\bar{S}_{z,x} = \frac{1}{2} \left( kS'^2 - \frac{1}{2} k''S^2 \right)_{z,x},$$

$$\bar{G}_{z,x} = \left( kC'S' - \frac{1}{2} k''CS \right)_{z,x},$$

$$\tilde{C}_{z,x} = (kC' + k'C)_{z,x},$$

$$\tilde{S}_{z,x} = (kS' + k'S)_{z,x},$$

$$H_{z,x} = (CS' + C'S)_{z,x}.$$

Такие расчеты были проведены для двух квадрупольей с крайними полями рассеяния особой формы<sup>1)</sup>; результаты расчетов представлены в § 14 (табл. 4).

Выражение (1.53) и табл. 2, определяющие хроматические aberrации второго порядка, являются обобщением результатов, полученных в § 10. Эти коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\tau &= \pm \left( S \int_0^s kC^2 d\sigma - C \int_0^s kCS d\sigma \right), \\ \sigma &= \pm \left( S \int_0^s kCS d\sigma - C \int_0^s kS^2 d\sigma \right),\end{aligned}\tag{1.54}$$

или после интегрирования по частям

$$\begin{aligned}\tau &= S \int_0^s C'^2 d\sigma - C \int_0^s C'S' d\sigma, \\ \sigma &= S \int_0^s S'C' d\sigma - C \int_0^s S'^2 d\sigma.\end{aligned}\tag{1.54a}$$

Сравнивая уравнения (1.52) и (1.32), мы видим, что  $\tau$  и  $\sigma$  связаны с хроматической aberrацией  $\eta$ , введенной в § 10, соотношением

$$\eta = \frac{\Delta p}{\rho_0} (y_0 \tau + y'_0 \sigma).\tag{1.55}$$

Подставив выражения (1.54) в (1.55), получим

$$\begin{aligned}\eta &= \pm \frac{\Delta p}{\rho_0} \left( S \int_0^s kCy d\sigma - C \int_0^s kSy d\sigma \right) = \\ &= - \frac{\Delta p}{\rho_0} \left( S \int_0^s Cy'' d\sigma - C \int_0^s Sy'' d\sigma \right),\end{aligned}\tag{1.56}$$

где

$$y = Cy_0 + Sy'_0,$$

или, интегрируя по частям,

$$\eta = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left( Sy'_0 + S \int_0^s C'y' d\sigma - C \int_0^s S'y' d\sigma \right).\tag{1.56a}$$

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение.

Равенства (1.34) и (1.36) представляют собой частные случаи этих выражений. Дифференцируя равенство (1.56), находим

$$\begin{aligned}
 C\eta' - C'\eta &= \pm \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \int_0^s kCy \, d\sigma = - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \int_0^s Cy'' \, d\sigma, \\
 S\eta' - S'\eta &= \pm \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \int_0^s kSy \, d\sigma = - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \int_0^s Sy'' \, d\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{1.57}$$

Подставив в первое из этих выражений  $y=C$ , а во второе  $y=S$ , определим условия, которые должны выполняться одновременно для получения ахроматического преобразования с  $\eta_1 = \eta_1' = 0$  (см. § 10):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{s_1} kC^2 \, d\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{s_1} C'^2 \, d\sigma = C_1C_1' \geq 0, \\
 \int_0^{s_1} kS^2 \, d\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{s_1} S'^2 \, d\sigma = S_1S_1' > 0, \\
 \int_0^{s_1} kCS \, d\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{s_1} C'S' \, d\sigma = C_1'S_1.
 \end{aligned}$$

До настоящего времени оптические расчеты для экспериментов с пучками частиц высоких энергий в большинстве случаев проводились лишь в рамках линейного приближения, изложенного в § 3—9. По мере того как измеряемые поперечные сечения реакций становятся все меньше, а потребность в машинном времени почти везде возрастает, обнаруживается тенденция увеличивать захватываемый интервал импульсов и телесный угол пучка в транспортирующих и спектрометрических системах, чтобы получить максимальное количество информации за данное время работы с пучком. Поэтому оптические aberrации, обусловленные нелинейными членами, в будущем должны, по-видимому, играть все более важную роль во многих сложных расчетах.

Учитывать в расчетах члены более высокого порядка можно следующим образом.

Сначала обычными лабораторными методами определяется нелинейное преобразование для произвольной одиночной квадрупольной линзы. Затем путем повторного применения преобразования одиночного квадруполя легко рассчитать нелинейное преобразование всей системы. Таким образом



можно определить преобразование третьего порядка, проводя следующие детальные измерения и расчеты:

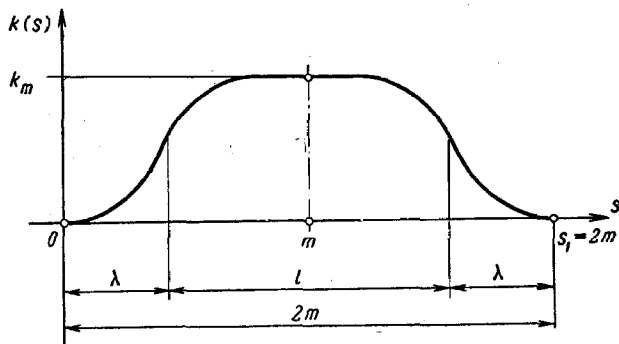
1) Точно измеряем градиент поля  $g(s)$ , его первую и вторую производные  $g'(s)$  и  $g''(s)$  как функции возбуждения линзы.

2) Выбираем плоскость  $s=0$  вне линзы, где поле равно нулю. Начиная от этой плоскости, рассчитываем главные траектории и их производные на основании уравнений (1.51) для отдельных характерных значений силы квадруполя  $k_m = k(m)$ , где  $m$  относится к средней плоскости линзы  $s=m$ . Затем вычисляем коэффициенты второго и третьего порядков для тех же самых величин  $k_m$ , пользуясь выражением (1.53).

3) При  $s=2m$  аппроксимируем зависимость линейных и нелинейных коэффициентов от силы квадруполя  $k_m$  простыми аналитическими функциями от  $k_m$ , например полиномами. Коэффициенты, характеризующие эти функции, образуют ряд чисел, который полностью описывает оптические свойства третьего порядка квадрупольной магнитной линзы.

#### § 14. КРАЕВЫЕ ПОЛЯ И ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

В § 3 мы предположили, что линейные эффекты, связанные с наличием краевых полей рассеяния квадруполя, можно



Фиг. 1.20. Эффективная длина квадрупольной линзы  $l$ .

учесть в преобразованиях (1.15) и (1.16) для прямоугольной модели поля с идеализированным постоянным градиентом, если ввести понятие эффективной длины квадруполя. С помощью уравнений (1.51) мы можем теперь дать точное опре-

деление эффективной длины  $l$  и соответствующей эффективной силы квадруполя  $k$ .

Допустим, что, решив уравнения (1.51) при точно измеренном распределении поля, мы определили главные траектории  $C(s)$  и  $S(s)$  и их производные при заданной силе линзы  $k_m = k(m)$  в средней плоскости квадруполя (фиг. 1.20). Тогда мы можем представить линейное преобразование между симметричными точками  $s=0$  и  $s=s_1=2m$ , расположенными вне поля линзы, как преобразование в квадруполе с постоянной эффективной силой  $k$  и эффективной длиной  $l$ , умноженное с обеих сторон на преобразования в промежутках длиной  $\lambda$ , свободных от поля. При  $s=s_1$  коэффициенты преобразования  $C$  и  $S'$  должны быть одинаковыми, если линза симметрична относительно средней плоскости  $s=m$ . Записывая для фокусирующей плоскости (обозначаемой знаком плюс)

$$\begin{pmatrix} C_1 & S \\ C'_1 & S'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \varphi \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda \sqrt{k} \sin \varphi & \lambda \left\{ 2 \cos \varphi + \left( \frac{1}{\lambda \sqrt{k}} - \lambda \sqrt{k} \right) \sin \varphi \right\} \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \sqrt{k} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где  $\varphi = l \sqrt{k}$  и  $\lambda = m - 1/2l$ , получаем выражения

$$\begin{aligned} \cos \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ \sin \varphi^+ &= C_1^+ - m C'_1^+, \\ l^+ &= -\frac{1}{C'_1^+} \varphi^+ \sin \varphi^+, \end{aligned} \quad (1.58)$$

которыми однозначно определяются эффективная длина  $l^+$  и эффективная сила  $k^+$  для фокусирующей плоскости квадруполя.

Для дефокусирующей плоскости (обозначаемой знаком минус) мы получаем выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi^- - \frac{1}{2} \varphi^- \operatorname{sh} \varphi^- &= C_1^- - m C'_1^-, \\ l^- &= \frac{1}{C'_1^-} \varphi^- \operatorname{sh} \varphi^-, \end{aligned} \quad (1.58a)$$

которыми определяются  $l^-$  и  $k^-$ .

Таким образом, эффективные длины квадруполя  $l^+$  и  $l^-$ , определенные указанным выше образом, зависят от силы  $k_m$  в средней плоскости квадруполя. Кроме того, эффективные

силы квадруполья  $k^+$  и  $k^-$  не строго пропорциональны  $k_m$ , т. е. относительное изменение силы линзы

$$\left(\frac{\Delta k}{k_m}\right)^\pm = \frac{k^\pm - k_m}{k_m}$$

также является функцией от  $k_m$ . Но в большинстве случаев, представляющих практический интерес, эта зависимость от  $k_m$  очень слабая и разница между  $l^+$  и  $l^-$  и между  $\Delta k^+/k_m$  и  $\Delta k^-/k_m$  мала. Средние величины

$$l = \frac{1}{2}(l^+ + l^-)$$

и

$$k = \frac{1}{2}(k^+ + k^-)$$

почти не зависят от  $k_m$ , а поэтому допущение постоянной эффективной длины и постоянной силы квадруполья вполне приемлемо во многих случаях. Для иллюстрации сказанного мы приводим на фиг. 1.22 кривые для двух квадрупольей с крайними полями специального вида, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Поскольку при экспериментах с частицами высоких энергий траектории частиц в большинстве случаев приблизительно параллельны оси квадруполья, представление о суммарном воздействии краевого поля можно получить, рассматривая поперечное распределение интеграла от поля

$$I(z, x) = \int_0^{s_1} \mathbf{B}(z, x, s) ds. \quad (1.59)$$

Если мы выполним это интегрирование в общем случае поля с квадрупольной симметрией (1.42) и (1.43) между двумя плоскостями  $s=0$  и  $s=s_1$ , в которых распределение осевой составляющей поля  $B_s$  одинаково, то получим

$$\int_0^{s_1} a_{01} ds = -\frac{1}{12} \int_0^{s_1} a''_{00} ds = \frac{1}{12} [a'_{00}(0) - a'_{00}(s_1)] = 0 \quad (i = k = 0),$$

$$\int_0^{s_1} a_{12} ds = -\frac{1}{40} \int_0^{s_1} a''_{11} ds = 0 \quad (i = k = 1),$$

$$\int_0^{s_1} a_{03} ds = -\frac{1}{42} \left( \int_0^{s_1} a''_{02} ds + 2 \int_0^{s_1} a_{12} ds \right) = 0 \quad (i = 0, k = 2)$$

и т. д. Таким образом, находим, что в разложении составляющих интеграла от поля  $I_z$  и  $I_x$  отсутствуют все коэффициенты с нечетными  $(i+k)$ . Поэтому разложения содержат только члены порядка  $(4n+1)$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$ , и их вид аналогичен разложениям соответствующих составляющих двумерного поля (1.44) или (1.49). Следовательно, при указанном выше условии  $B_s(0) \equiv B_s(s_1)$  величины  $I_z$  и  $I_x$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_z}{\partial x} - \frac{\partial I_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial I_z}{\partial z} + \frac{\partial I_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Уравнения (1.60) справедливы и для полей, не обладающих квадрупольной симметрией [22, 28], что можно показать [23] интегрированием уравнения для потенциала в трехмерном случае

$$\Delta \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} = 0.$$

Учитывая, что  $\mathbf{B} = -\text{grad } \Omega$ , имеем

$$\int_0^{s_1} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} ds = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right|_{s_1} - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right|_0 = B_s(0) - B_s(s_1) = 0,$$

откуда следует равенство

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

где

$$\Phi = \Phi(x, z) = \int_0^{s_1} \Omega(z, x, s) ds$$

$$I_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad I_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Следовательно, при условии  $B_s(0) \equiv B_s(s_1)$  интегралы  $I_z$  и  $I_x$  ведут себя как составляющие вектора двумерного поля.

Для квадрупольной магнитной линзы условие  $B_s(0) \equiv B_s(s_1)$  выполняется между плоскостью  $s=0$ , находящейся достаточно далеко от квадрупольной линзы, так что там  $B_s \equiv 0$ , и средней плоскостью линзы  $s=m$ , где  $B_s \equiv 0$  в силу симметрии.

Тогда интегралы от поля имеют вид

$$\int_0^m B_z ds = cx + O(5),$$

$$\int_0^m B_x ds = cz + O(5).$$
(1.61)

Таким образом, отклонение этих интегралов поля от соответствующих интегралов идеального поля обусловлено только членами пятого и более высоких порядков в разложении  $B_z$  и  $B_x$  (1.42), а члены третьего порядка не оказывают никакого влияния.

Тем не менее это нежелательное отклонение измеряли и разработали методы его коррекции<sup>1)</sup>. Они состоят в том, что стараются уменьшить члены порядка  $(4n+1)$ , где  $n=1, 2, \dots$ , в разложении краевого поля, изменяя граничные условия вблизи краев полюсов при помощи железных шимм.

Один из возможных вариантов при таком методе, очевидно, — создать линеаризированное поле рассеяния типа

$$B_z = g'_0 xs,$$

$$B_x = g'_0 zs,$$

$$B_s = g'_0 zx.$$
(1.62)

При  $B_z(0) = B_x(0) = 0$  такое поле можно получить из выражений (1.42а) для случая, когда  $g''(s) = 0$ , т. е.  $g(s) = g'_0 s$ . Оно обладает трехмерной квадрупольной симметрией. Это означает, что градиент составляющих поля  $B_z$  и  $B_x$  постоянен в каждой плоскости  $s = \text{const}$  и что то же самое утверждение имеет силу при циклической перестановке координат  $z, x, s$ , т. е. имеется полная симметрия относительно всех трех координат.

Такую конфигурацию краевого поля действительно можно осуществить с приемлемой точностью [13]. Поле (1.62) можно получить из выражения для потенциала

$$\Omega = -g'_0 zxs$$

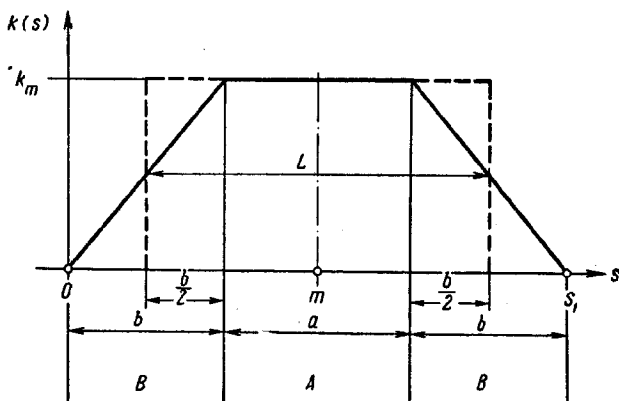
как

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \Omega.$$

Следовательно, эквипотенциаль  $\Omega = \text{const}$  состоит из восьми гиперболических поверхностей, каждая из которых располо-

<sup>1)</sup> См., например, [24].

жена в одном из октантов, образующихся при пересечении трех координатных плоскостей  $z=0$ ,  $x=0$ ,  $s=0$ . Данные координатные плоскости являются асимптотами эквипотенциальных поверхностей. Если смотреть вдоль оси  $s$ , то пересечение этих поверхностей с плоскостью  $s=\text{const}$  представляет собой четыре симметричные гиперболы типа показанных на фиг. 1.5, и диаметр вписанной окружности при уменьшении  $s$  возрастает как квадратный корень из  $1/s$ . Следовательно, краевое



Фиг. 1.21. Зависимость поля идеализированной квадрупольной линзы от  $s$ .

Тип I:  $a = 922,16$  мм,  $b = 120,92$  мм; тип II:  $a = 394$  мм,  $b = 266$  мм.

поле (1.62) можно создать, если закруглить краевые поверхности четырех полюсов таким образом, чтобы форма закруглений была гиперболической и определялась уравнением эквипотенциалей  $zxs = \text{const}$ . Чтобы поле было равно нулю при отрицательных значениях  $s$ , остальные четыре поверхности на краю квадрупольной пластины заменяются стальной «отражательной» внутренней поверхностью которой совпадает с плоскостью  $s=0$  (фиг. 1.23 и 1.24).

На практике приходится допускать некоторые отклонения от такой идеальной формы краевого поля (1.62), поскольку в отражательной пластине должно быть отверстие, равное апертуре, для прохождения пучка, а внутри линзы гиперболически закругленные концы должны переходить в параллельные части полюсов. Но измерения поля в линзе подобного типа<sup>1)</sup> показали, что при этом главные черты идеального краевого поля (1.62) все же сохраняются (§ 15).

<sup>1)</sup> К. Нолт, частное сообщение.

На фиг. 1.21 показано поле двух идеализированных квадрупольных магнитных линз I и II. Здесь имеется внутренняя область A, в пределах которой поле не зависит от координаты  $s$ , и две внешние области B с линеаризованными краевыми полями, точно соответствующими выражениям (1.62). Линза типа I представляет собой довольно длинный квадруполь со сравнительно короткими краевыми полями, а линза типа II — короткий квадруполь с длинными краевыми полями. Для обоих квадруполей были рассчитаны коэффициенты линейного преобразования между  $s=0$  и  $s=s_1$ <sup>1)</sup>. Они приведены для трех различных значений  $k_m$  в табл. 3. На основании этих линейных коэффициентов были определены эффективные дли-

Таблица 3

Коэффициенты линейного преобразования для идеализированного квадруполья типа I и II при  $k_m = 0,25, 1$  и  $4 \text{ м}^{-2}$

	Тип I			Тип II		
	0,25	1	4	0,25	1	4
$C_z$	0,85200	0,45138	-0,59764	0,92452	0,70880	-0,00491
$S_z$	1,10067	0,92275	0,37124	0,89783	0,81606	0,52803
$C'_z$	-0,24903	-0,86292	-1,73155	-0,16180	-0,60977	-1,89380
$S'_z$	0,85200	0,45138	-0,59764	+0,92452	0,70880	-0,00491
$C_x$	1,15561	1,67037	4,57024	1,07732	1,32051	2,47518
$S_x$	1,22942	1,43871	2,49630	0,95464	1,04344	1,44427
$C'_x$	0,27283	1,24426	7,96663	0,16824	0,71278	3,54954
$S'_x$	1,15561	1,67037	4,57024	1,07732	1,32051	2,47518

ны  $l^+$  и  $l^-$  и эффективные силы  $k^+$  и  $k^-$ <sup>1)</sup>. На фиг. 1.22 представлены кривые зависимости относительных отклонений

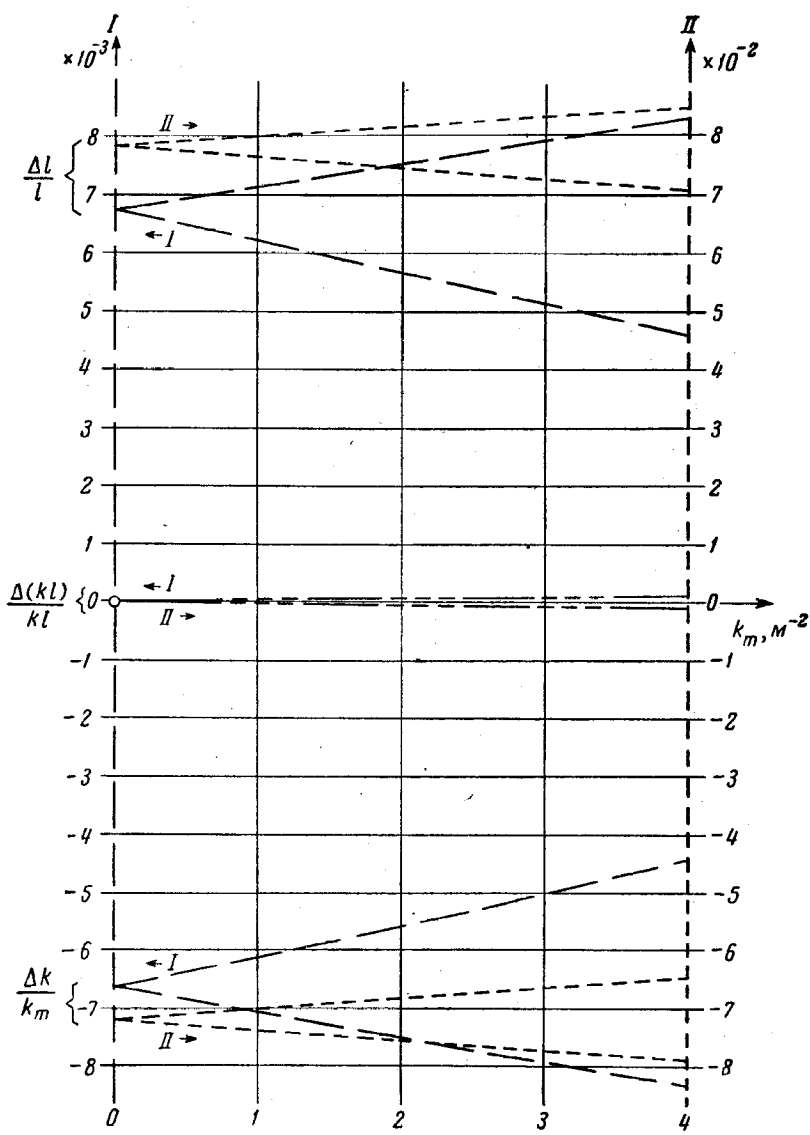
$$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^{\pm} = \frac{l^{\pm} - L}{L}, \quad \left(\frac{\Delta k}{k_m}\right)^{\pm} = \frac{k^{\pm} - k_m}{k_m}$$

и

$$\left(\frac{\Delta(kl)}{kl}\right)^{\pm} = \frac{k^{\pm}l^{\pm} - k_mL}{k_mL}$$

от величины  $k_m$ . Интересно, что произведение  $kl$  очень хорошо совпадает с произведением  $k_mL$ , особенно для квадруполья

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение.



Фиг. 1.22. Относительные отклонения эффективной длины и силы идеализированных квадрупольных линз I и II типов.



типа II, тогда как величины  $l$  и  $k$ , взятые по отдельности, весьма существенно отличаются от  $L$  и  $k_m$ . Изменение же этих величин в зависимости от  $k_m$  примерно на порядок величины меньше отклонений  $\Delta l^\pm$  и  $\Delta k^\pm$ . При усреднении их значений по фокусирующей и дефокусирующей плоскостям зависимость от  $k_m$  оказывается очень слабой.

Для тех же двух типов квадруполей были вычислены<sup>1)</sup> абберационные коэффициенты второго и третьего порядков (§ 13) при преобразовании между точками  $s=0$  и  $s_1=a+2b$  (фиг. 1.21).

Численные значения этих коэффициентов в разложении  $z$ ,  $z'$ ,  $x$  и  $x'$  при трех разных значениях  $k_m$  приведены в табл. 4. Они даны в единицах  $m^{-n}$ , где  $n=-1, 0, 1$  и  $2$ .

## § 15. ПРИМЕР КОНСТРУКЦИИ КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Целью данной книги не является изложение общих методов проектирования и конструирования квадрупольных линз. Вместо этого мы рассмотрим один пример<sup>2)</sup>, который позволит нам осветить наиболее важные моменты конструирования и дать представление о технических ограничениях и получаемой точности поля.

В качестве примера мы возьмем квадруполь, поперечное сечение которого дано на фиг. 1.19, *з*, где указаны ширина катушки  $c$ , ширина ярма  $d$  и апертурные параметры  $r_0$ ,  $a$  и  $b$ , связанные соотношением  $ab = \frac{1}{2} r_0^2$ . Поскольку в такой конструкции стремятся получить большой аксептанс и высокую точность поля, апертуру вытягивают в поперечных направлениях до  $a/b=4$  и выбирают такую форму полюсов и катушек, чтобы поле было линейным не только во вписанной окружности, но и вблизи углов апертуры, т. е. чтобы был больше аксептанс (гл. 4, § 9, 10).

Апертура такой формы имеет и другие преимущества перед круглой апертурой:

а) Благодаря более сильному влиянию полюсов и меньшему влиянию формы катушки можно повысить точность поля как внутри, так и на краях. Дело в том, что гиперболический профиль полюсов можно обработать с точностью

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение.

<sup>2)</sup> Квадрупольная линза QB в DESY, разработанная совместно с АСЕС (Шарлеруа). Аналогичные линзы были разработаны совместно с МФО (Цюрих) и Линтоттом (Хоршам).

Таблица 4

Аберрационные коэффициенты для идеализированных квадруполей  
 типа I и II при  $k_m = 0,25, 1$  и  $4 \text{ м}^{-2}$

	Тип I			Тип II		
	0,25	1	4	0,25	1	4
Координата $z$ (фокусировка)						
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z_0 = \tau_z \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,14 0,24	0,49 0,69	0,90 -0,17	0,08 0,16	0,28 0,56	0,80 1,22
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z'_0 = \sigma_z \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,06 0,14	0,23 0,49	0,58 0,90	0,03 0,08	0,11 0,28	0,35 0,80
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 z_0 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,14 -0,23	-0,44 -0,53	-0,32 1,58	-0,07 -0,16	-0,26 -0,51	-0,62 -0,62
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 z'_0 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,06 -0,14	-0,21 -0,44	-0,40 -0,32	-0,03 -0,07	-0,10 -0,26	-0,30 -0,62
$z_0^3 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,00 -0,01	-0,12 -0,30	-1,65 -0,10	0,00 0,00	-0,03 -0,11	-1,14 -2,87
$z_0^2 z'_0 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,04 0,08	0,31 0,41	-0,50 -3,86	0,01 0,04	0,15 0,38	0,43 -0,62
$z_0 z_0'^2 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,18 -0,26	-0,35 -0,09	-0,15 -0,13	-0,10 -0,20	-0,27 -0,40	-0,16 0,44
$z_0'^3 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,09 -0,19	-0,23 -0,39	-0,26 -0,13	-0,04 -0,10	-0,13 -0,30	-0,22 -0,31
$z_0 x_0^2 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,01 -0,07	-0,24 -1,60	-10,9 16,8	0,00 -0,04	-0,10 -0,75	-3,58 -16,2
$z_0 x_0 x'_0 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,21 -0,21	0,17 -3,30	-11,5 16,9	0,15 -0,09	0,33 -1,44	-3,42 -20,9
$z_0 x_0'^2 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	-0,09 -0,44	-0,49 -2,15	-3,83 5,28	-0,04 -0,27	-0,22 -1,27	-1,74 -7,03
$z_0' x_0^2 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,01 -0,05	0,06 -1,42	-5,89 -69,7	0,00 -0,02	0,00 -0,41	-1,24 -13,85
$z_0' x_0 x'_0 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,14 -0,16	0,37 -3,02	-6,60 -79,0	0,07 -0,05	0,20 -0,83	1,24 -17,74
$z_0' x_0'^2 \begin{cases} z \\ z' \end{cases}$	0,01 -0,28	-0,03 -1,86	-2,13 -22,3	0,00 -0,13	-0,03 -0,68	-0,63 -5,92

Продолжение

	Тип I			Тип II		
	0,25	1	4	0,25	1	4
Координата $x$ (дефокусировка)						
$\frac{\Delta p}{\rho_0} x_0 = \tau_x \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	-0,16 -0,29	-0,74 -1,46	-4,90 -12,6	-0,08 -0,17	-0,34 -0,77	-1,75 -4,55
$\frac{\Delta p}{\rho_0} x'_0 = \sigma_x \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	-0,07 -0,16	-0,29 -0,74	-1,67 -4,90	-0,03 -0,08	-0,12 -0,34	-0,59 -1,75
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 x_0 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,16 0,30	0,81 1,68	6,42 18,1	0,08 0,18	0,35 0,82	2,04 5,64
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 x'_0 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,07 0,16	0,31 0,81	2,05 6,42	0,03 0,08	0,13 0,35	0,66 2,04
$x_0^3 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,00 0,01	0,28 1,01	58,1 277	0,00 0,00	0,05 0,19	5,65 23,9
$x_0^2 x'_0 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,05 0,13	1,28 4,11	104 483	0,02 0,05	0,32 1,04	12,6 50,6
$x_0 x_0'^2 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,28 0,57	2,09 5,68	62,4 281	0,13 0,30	0,73 1,97	9,69 36,1
$x_0^3 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,11 0,28	0,65 1,96	11,8 53,0	0,05 0,13	0,23 0,68	2,07 7,79
$x_0 z_0^2 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,00 -0,05	0,15 -0,16	8,69 33,5	0,00 -0,03	0,00 -0,37	2,27 5,00
$x_0 z_0 z_0' \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	-0,31 -0,21	-1,68 -3,00	-8,97 -16,8	-0,18 -0,09	-0,94 -1,33	-5,89 -15,9
$x_0 z_0'^2 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,07 0,34	0,15 0,77	-0,11 -2,59	0,03 0,23	0,09 0,70	-0,27 -0,42
$x_0' z_0^2 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	0,01 -0,03	0,23 0,11	5,15 18,9	0,00 -0,01	0,04 -0,13	1,50 3,52
$x_0' z_0 z_0' \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	-0,16 -0,13	0,67 -1,64	-1,12 -1,92	-0,08 -0,04	-0,38 -0,64	-1,72 -5,88
$x_0' z_0'^2 \begin{cases} x \\ x' \end{cases}$	-0,02 0,18	-0,12 0,19	-0,53 -2,30	0,00 0,12	-0,03 0,26	-0,31 -0,62

$\pm 0,02$  мм и после сборки он будет совпадать повсюду с теоретическим профилем с точностью до  $\pm 0,03$  мм, тогда как поверхность катушки можно установить лишь с точностью  $\pm 0,5$  мм.

б) Большая ширина апертуры позволяет более эффективно использовать отклоняющие магниты, поскольку диспергирующая сила таких магнитов линейно возрастает с шириной пучка (гл. 4, § 11).

Для улучшения распределения поля в углах апертуры гиперболу продлевают в область катушки и заканчивают небольшими коррекционными выступами [19] (фиг. 1.26). Оптимальную форму выступов определяют экспериментально путем измерения поля. Поверхность катушки устанавливается с точностью  $\pm 0,5$  мм.

Ширина катушки ( $c \approx a$ ) выбирается на основе компромисса между требованиями не слишком большой потребляемой мощности, с одной стороны, и не очень больших размеров и веса линзы — с другой. Для проведения магнитного потока через воздушный зазор при радиусе апертуры  $r_0$  и поле  $B_{\text{макс}}$  у поверхности катушки  $x = a$  число ампер-витков на полюс должно быть равно

$$nI = \int_{\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)}^{r_0} H_r dr = \frac{1}{2\mu_0} g r_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu_0} B_{\text{макс}} r_0 \quad (1.63)$$

Поскольку  $B_{\text{макс}}$  при насыщении будет порядка 20 кэс, соответствующее число ампер-витков на полюс равно  $0,563 \cdot 10^6 r_0$ , где  $r_0$  берется в метрах. Потеря ампер-витков в стали из-за насыщения для мягкой низкоуглеродистой стали составляет около 10%, если ширина яра достаточно велика (см. ниже). Около 50% площади поперечного сечения катушки занимают изоляция и водяное охлаждение. Плотность тока в катушке составляет  $4nI/r_0^2$ , если ширина последней равна  $c = a = \sqrt{2}r_0$  и высота равна  $b = a/4 = (\sqrt{2}/4)r_0$ . При полном возбуждении это дает примерно  $3/r_0$  а/мм<sup>2</sup>, где  $r_0$  берется в метрах. Поскольку даже в полых медных проводниках, охлаждаемых водой, плотность тока не может превышать 30 а/мм<sup>2</sup>, наименьший радиус апертуры, при котором осуществима конструкция такого типа, представляет собой величину порядка  $r_0 = 0,1$  м при условии, что требуется максимальное поле у полюсов.

В нашем примере выбран радиус апертуры  $r_0 = 8$  см. Поэтому высота катушки равна  $b = 2,8$  см, что достаточно для

размещения трех слоев полых медных проводников сечением  $7,5 \times 7,5$  мм<sup>2</sup> и изоляции. Диаметр круглых отверстий для водяного охлаждения равен 4,5 мм. Каждая катушка состоит из 34 витков, соединенных последовательно. При токе 1500 а число ампер-витков на полюс, необходимых, согласно выражению (1.63), для создания поля  $B_{\text{макс}} = 20$  кгс, равно  $5 \cdot 10^4$ . Длина линзы — приблизительно 1 м, поэтому средняя длина катушки составляет 2,5 м, включая ее концы (фиг. 1.24), а сопротивление катушки при 50° С равно 45 Мом. Таким образом, при токе 1500 а потребляемая мощность составляет 100 квт на катушку, а полная мощность равна 400 квт.

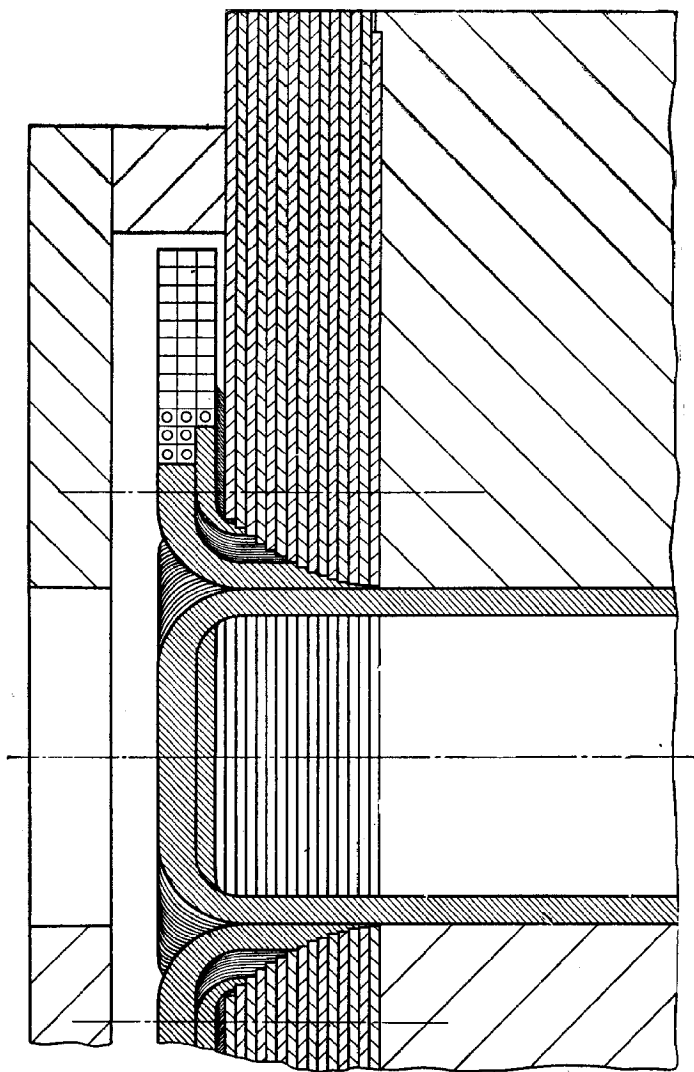
При таком возбуждении катушки работают в предельном режиме плотности мощности, давления и скорости потока охлаждающей воды. Чтобы давление воды не выходило за разумные пределы, каждая катушка составляется из 6 параллельных водяных контуров. Самый длинный водяной контур состоит из 6 витков, каждый длиной 3 м, и при 1500 а отбирает мощность порядка 21 квт. При температуре охлаждающей воды около 40° для этого требуется, чтобы скорость ее течения была порядка  $v = 8$  м/сек. Соответствующий перепад давления можно рассчитать по формуле

$$\Delta p [\text{атм}] = 5 \cdot 10^{-5} l [\text{м}] \frac{\left( v \left[ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \right] \right)^{1,75}}{(d [\text{м}])^{1,25}}, \quad (1.64)$$

где  $l$  — длина водяного контура и  $d$  — диаметр круглого отверстия для воды. Эта формула применима в широком интервале параметров; она дает несколько завышенные значения  $\Delta p$ . Для примера, приводившегося выше, по формуле (1.64) получаем перепад давления  $\Delta p = 29$  атм.

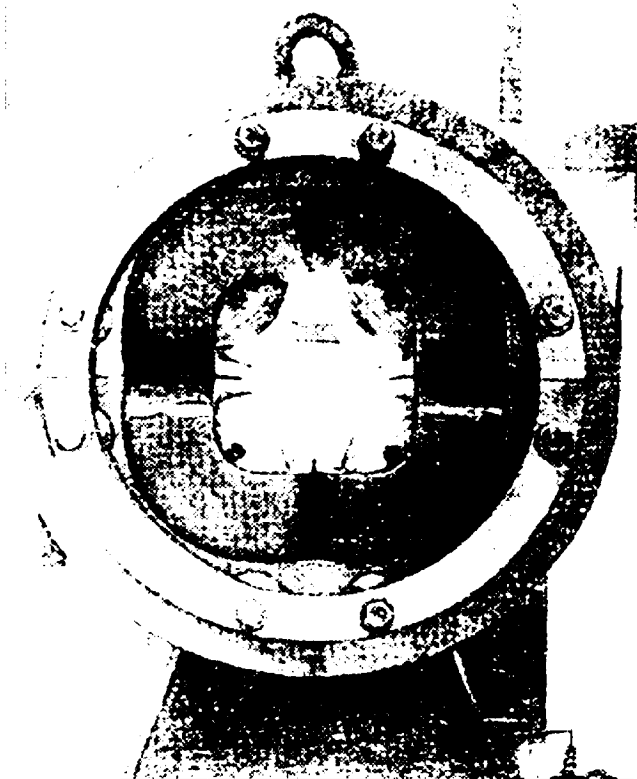
Ширина ярма  $d$  (фиг. 1.19) определяется величиной магнитного потока, выходящего из внутренней части и из краев квадруполя. Внутри линзы поле  $B_z$  в горизонтальной плоскости симметрии  $z=0$  возрастает линейно с увеличением  $x$  и достигает величины  $B_{\text{макс}}$  на поверхности катушки. Далее поле падает линейно в области катушки, достигая снова значения  $B_z=0$  при  $x=a+c \approx 2a$ . Следовательно, если допустить, что  $d=a$ , и пренебречь краевыми полями, то поле в узких частях ярма будет равно  $B_{\text{макс}}$ . Но, принимая во внимание, что существует некоторый добавочный поток от краевых полей и что поле в ярье не должно превышать 20 кгс, ширину ярма обычно делают на 20% больше  $a$ .

Краевые поля линеаризуют путем скругления концов полюсов и стальных отражательных пластин на краях линзы [13], как говорилось в § 14. На фиг. 1.23 показана форма края



Ф и г. 1.23. Форма края магнитной квадрупольной линзы, разрезанной под углом  $45^\circ$  к медианной плоскости.

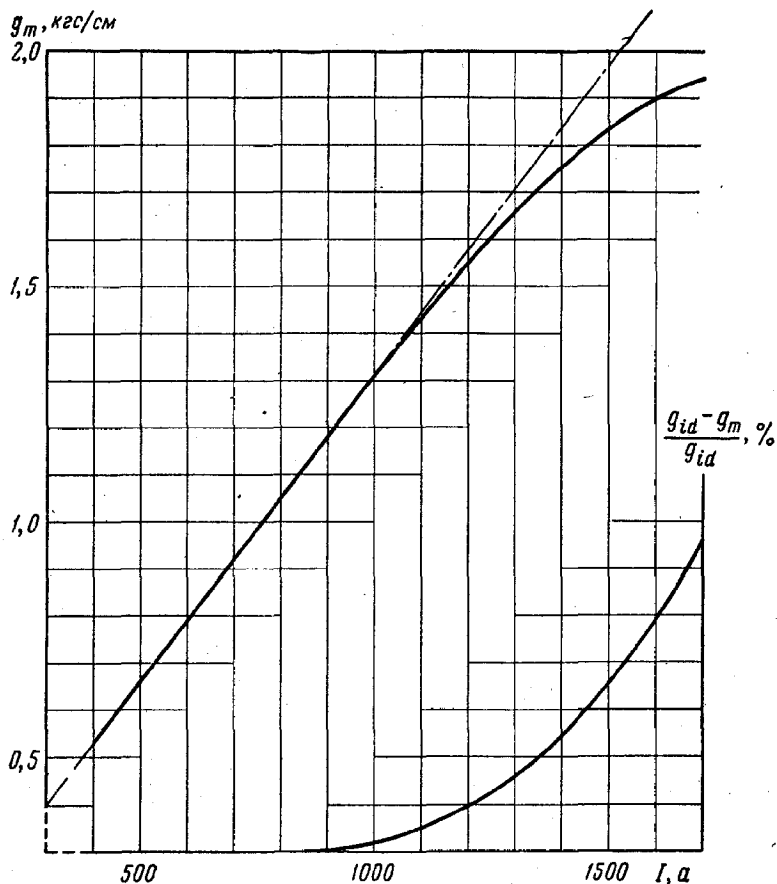
квадруполья, разрезанного под углом  $45^\circ$  вдоль линии  $x=z$ . Вид с торца линзы со снятой отражательной пластиной представлен на фиг. 1.24.



Фиг. 1.24. Магнитная квадрупольная линза (вид с торца, краевая отражательная пластина снята).

Протяженность  $b$  краевого поля (фиг. 1.21), которой определяется постоянная  $g'_0 = (1/b)g$  в выражениях для поля (1.62), выбрана равной примерно 12 см. Выбор этот объясняется тем, что при таком значении  $b$  протяженность краевого поля мала по сравнению с общей длиной, но велика по сравнению с размерами области, в которой поле искажается отверстием в отражательной пластине, и переходной области

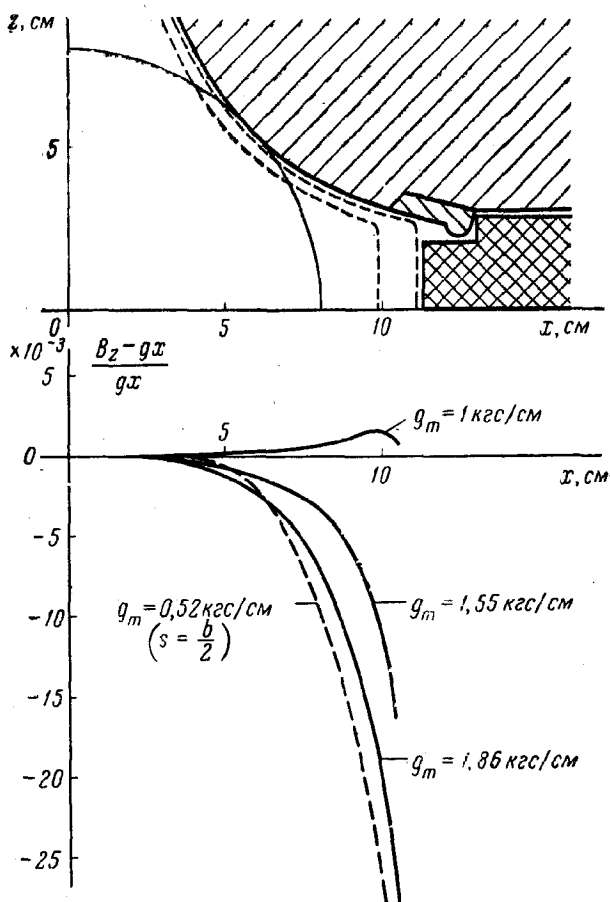
между краевым и внутренним полями. Полюсные наконечники со скругленными по гиперболе краями изготавливаются в виде набора точно обработанных пластин постепенно



Фиг. 1.25. Градиент поля  $g_m$  в средней плоскости магнитной линзы и его относительное отклонение от линейной зависимости ( $g_{id} = 0,001314I$ ) как функция тока  $I$  в катушках линзы.

уменьшающейся ширины, что обеспечивает симметричную установку с большой степенью точности. Дополнительное преимущество таких закругленных полюсов в том, что они предотвращают насыщение краев полюсов при среднем значении возбуждения. Тем самым устраняется сильная

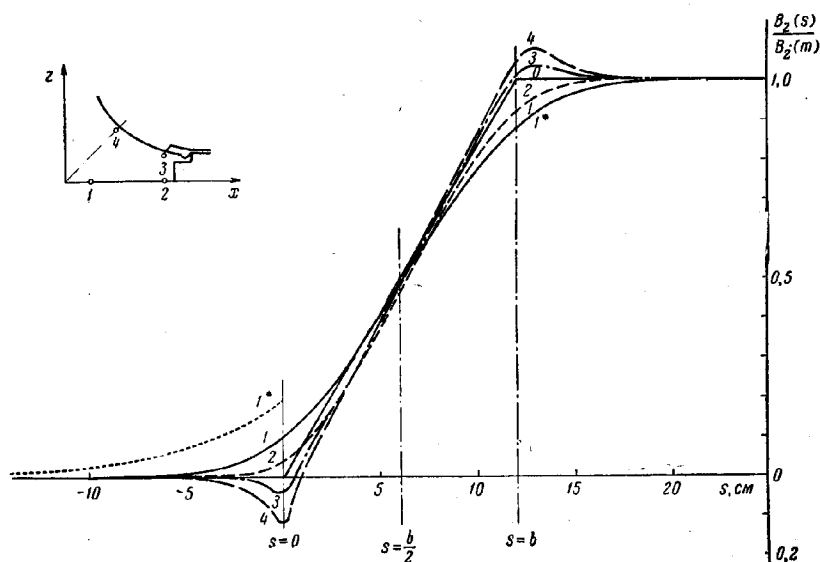




Фиг. 1.26. Относительное отклонение измеренной составляющей поля  $B_z$  в плоскости  $z=0$  от линейного распределения поля в квадрупольной линзе при разных возбуждениях.

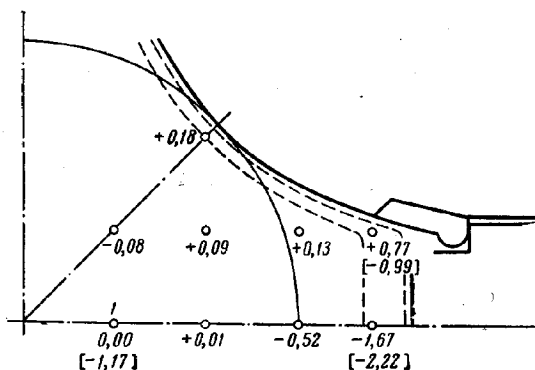
Сплошные кривые относятся к средней плоскости линзы  $s = m$ , штриховая — к средней плоскости  $s = b/2$  области краевого поля (см. фиг. 1.27).

зависимость формы краевого поля от возбуждения, которая наблюдается в магнитах с резкими краями. (Отметим, что за счет некоторого нарушения линейности поля в его внешних областях квадруполь можно геометрически упростить, если взять полюсы не гиперболической, а цилиндрической формы со сферически скругленными краями [25].)



Фиг. 1.27. Нормированная составляющая поля  $B_z(s)/B_z(m)$  в области краевого поля при градиенте, равном  $g_m = 1 \text{ кгс/см}$ , в разных точках апертуры 1-4.

Кривая 0 соответствует линейному нарастанию идеализированного краевого поля при данной геометрии линзы. (Внутренняя поверхность отражательной пластины расположена при  $s = 0$ .) Кривая 1\* показывает увеличение поля в точке 1 при снятой отражательной пластине.



Фиг. 1.28. Отклонение (в миллиметрах) интегральной длины поля, определяемой выражением (1.65), от интегральной длины в точке 1 при градиенте поля, равном  $g_m = 1 \text{ кгс/см}$  (насыщение отсутствует).

В скобках приведены три значения отклонений длины от той же величины при  $g_m = 1,65 \text{ кгс/см}$ .

Поскольку распределение краевого поля хорошо описывается аналитическими выражениями (1.62), поток, входящий в края полюсов и отражательную пластину, можно рассчитать путем простого интегрирования. На одном торце линзы (фиг. 1.24) отражательная пластина сидит на круглом стальном кольце, которое сразу же отводит поток отражательной пластины, выходящий из полюса, обратно в его основание. Поэтому поток не нагружает узких частей ярма. На другом же конце линзы большое число выводов катушек не позволяет поместить громоздкое стальное кольцо, и отражательная пластина держится только на нескольких болтах. Здесь поток, выходящий из каждого полюса, проходит по отражательной пластине азимутально, пока не достигнет соседнего полюса, а на обратном пути проходит через узкую часть ярма. В нашем примере этот поток увеличивает поток между полюсами приблизительно на 5% и требуемая толщина отражательной пластины достигает 4 см.

Распределение поля в таком квадруполе, измеренное при помощи датчиков Холла<sup>1)</sup>, характеризуется кривыми, представленными на фиг. 1.25—1.28. На фиг. 1.26 вверху дана часть поперечного сечения линзы, где показана форма катушки и полюса с корректирующими выступами (штриховыми линиями показана стенка вакуумной камеры). Из кривых, приведенных на фиг. 1.26, следует, что ниже насыщения поле во всей полезной апертуре линзы линейно с точностью до  $1,5 \cdot 10^{-3}$ . Но при больших возбуждениях корректирующие выступы насыщаются и отклонение становится значительно большим. Конфигурация поля на краю линзы, показанная на фиг. 1.27 и штриховыми линиями на фиг. 1.26, хорошо согласуется с выражениями (1.62) для трехмерного краевого поля квадрупольной линзы и совершенно не зависит от возбуждения. Ниже насыщения ( $g_m = 1$  кгс/см) интегральная длина половины линзы

$$\frac{1}{B_z(z, x, m)} \int_{-\infty}^m B_z(z, x, s) ds = \frac{1}{B_z(z, x, m)} I_z(z, x) \quad (1.65)$$

в точке 1 фиг. 1.28 равна 518,6 мм и, следовательно, на 2,9 мм меньше интегральной длины  $L/2$  соответствующего идеализированного квадрупольного типа I (фиг. 1.21). Уменьшение интегральной длины из-за эффектов, связанных с насыщением, очень мало. Например, при градиенте поля в средней плоскости линзы, равном  $g_m = 1,65$  кгс/см, уменьшение интегральной

<sup>1)</sup> К. Нолт, частное сообщение.

длины половины линзы в точке  $I$  составляет всего лишь 1,2 мм.

При любом возбуждении вклад краевого поля в относительное отклонение интеграла поля  $I_2(z, x)$  от интеграла линейного поля меньше  $2,8 \cdot 10^{-3}$  во всей полезной апертуре. В этом можно убедиться, если поделить отклонения интегральной длины, указанные на фиг. 1.28, на интегральную длину половины линзы.

#### ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

1. Panofsky W. K. H., Baker W. R., Rev. Sci. Instr., 21, 445 (1950).
2. Luckey D., Rev. Sci. Instr., 31, 202 (1960).
3. Courant E., Livingston M. S., Snyder H., Phys. Rev., 83, 1190 (1952).
4. Courant E. D., Snyder H. S., Ann. of Phys., 3, 1 (1958).
5. Van der Meer S., CERN NPA/Int. 61-5, Geneva (1961).
6. Gardner J. W., Whiteside D., NIRL/M/21, Harwell (1961).
7. Devlin T. J., UCRL-9727, University of California (1961).
8. Lapostolle P., CERN/PS-PL 2, Geneva (1955).
9. Kern W., Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.80, Hamburg (1961).
10. Blewett M. H., BNL-Report MHB-8, Brookhaven (1957).
11. Lublow D., DESY-Notiz A 2.78, Hamburg (1961).
12. Hand L. N., Panofsky W. K. H., Bull. Am. Phys. Soc., 3, 421 (1958).
13. Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.81, Hamburg (1961).
14. Blewett M. H., BNL Engineering Drawing No. D 12-18-5, Brookhaven.
15. Cooper P. F., CEA Internal Note (6"×24" Lozenge Quadrupole), Cambridge (1962); CEA Engineering Drawings E-1306-A; S-1359-A.
16. Langeseth B., Pluym G., de Raad B., CERN RS/Int. EA 60-5, Geneva (1960).
17. Cooper P. F., CEA Engineering Drawing E-74-B, Cambridge.
18. Blewett M. H., BNL Engineering Drawing D-12-187-6, Brookhaven.
19. Hultschig H., DESY-Notiz A 2.76, Hamburg (1961).
20. Meads P. F., UCRL-10807, University of California (1963).
21. Streib J. F., HEPL 104, Stanford University (1960).
22. Schoch A., CERN 57-21, Appendix I, Geneva (1958).
23. Beth R. A., BNL (AGS) Internal Report RAB-8, Brookhaven (1963).
24. Grivet P., Septier A., CERN 58-25, Geneva (1958).
25. Ratner L. G., ANL-Specification and drawing QM-103, Argonne.
26. Swenson D. A., MURA-645, Madison (1962).
27. Good R. H., Piccioni O., Rev. Sci. Instr., 31, 1035 (1960).
28. Elmore W. C., Garret M. W., Rev. Sci. Instr., 25, 480 (1954).
29. Baker W. F., Nucl. Instr. Meth., 20, 55 (1963).
30. van der Meer S., CERN 60-22, Geneva (1960).
31. Lamb W. H., Jr., ANL WHL-1, Argonne (1962).
32. Блюэтт М., Денби Дж., в книге «Международная конференция по ускорителям (Дубна, август 1963)», М., 1964.

<sup>1)</sup> Литература, отмеченная звездочкой, добавлена редактором перевода. — Прим. ред.

- 33\*. Будкер Г. И., в книге «Международная конференция по ускорителям (Дубна, август 1963)», М., 1964, стр. 282.
- 34\*. Данилов Л. Л., Родионов С. Н., Сильвестров Г. И., ЖТФ, 37, 914 (1967).
- 35\*. Hawkes P. W., Brit. Journ. Appl. Phys., 18, 545 (1967).
- 36\*. Чечулин В. Н., Явор С. Я., Препринт ФТИ-071 (1967).
- 37\*. Явор С. Я., Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами, М., 1968.
- 38\*. Левин Л., Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин, изд-во «Мир», 1966.
- 39\*. Кори Г., Кори Т., Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины, изд-во «Мир», 1967.
- 40\*. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочник по математике, М., 1957.

## Оптика заряженных частиц в отклоняющих магнитах

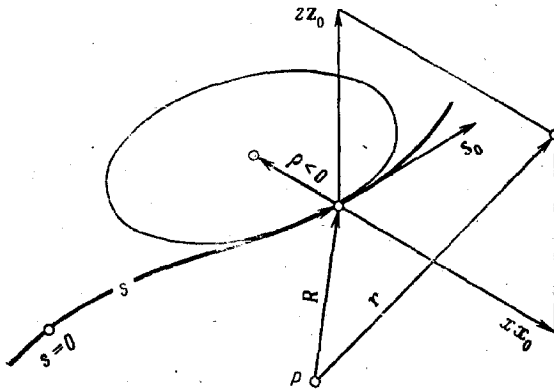
### § 1. КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

До сих пор мы рассматривали фокусирующие поля, которые обладают квадрупольной симметрией относительно прямолинейной осевой траектории и соответствуют линзам световой оптики. Другим важным классом оптических элементов являются призмы, применяемые в спектрографах в качестве диспергирующих систем. В оптике заряженных частиц таким призмам соответствуют отклоняющие магниты. Отклонение пучков частиц и анализ их по импульсам возможны в том случае, если эти пучки проходят через поперечное магнитное поле и их осевая траектория криволинейна. В данной главе мы рассмотрим оптические свойства таких отклоняющих полей, которые создают пучки с криволинейной осевой траекторией. Все магниты, создающие поля подобного рода, мы будем называть «отклоняющими». Отметим, что при таком определении квадрупольную магнитную линзу также можно рассматривать как «отклоняющий магнит», если ее ось смещена по отношению к оси пучка, ибо тогда траектории уже не располагаются вокруг оси квадруполя. Таким образом, поле с квадрупольной симметрией, рассмотренное в гл. 1, представляет собой частный случай тех полей, которые исследуются ниже.

Почти во всех магнитах, используемых в системах для транспортировки и разделения пучков высокой энергии, имеется эквипотенциальная плоскость симметрии, чаще всего горизонтальная. В своих расчетах мы всегда предполагаем существование такой плоскости симметрии и ограничиваемся рассмотрением пучков, осевые траектории которых лежат в этой плоскости.

Чтобы анализировать траектории частиц в отклоняющем поле, расположенные вблизи осевой траектории, введем криволинейную систему координат  $\{z, x, s\}$  [1], как показано на фиг. 2.1. Эта криволинейная система координат образована правой системой единичных векторов  $\{z_0, x_0, s_0\}$ . Она движется

вдоль осевой траектории с такой скоростью  $\omega = \dot{s}$ , что частицы, траектории которых исследуются, всегда остаются в плоскости  $\{z_0, x_0\}$ , причем направление единичного вектора  $s_0$  совпадает с направлением касательной к осевой траектории. Единичный вектор  $z_0$  перпендикулярен плоскости, в которой лежит осевая траектория, а вектор  $x_0$  перпендикулярен плоскости  $\{s_0, z_0\}$ , так что он направлен по радиусу кривизны  $\rho(s)$  осевой



Фиг. 2.1. Криволинейная система координат  $(z, x, s)$ .

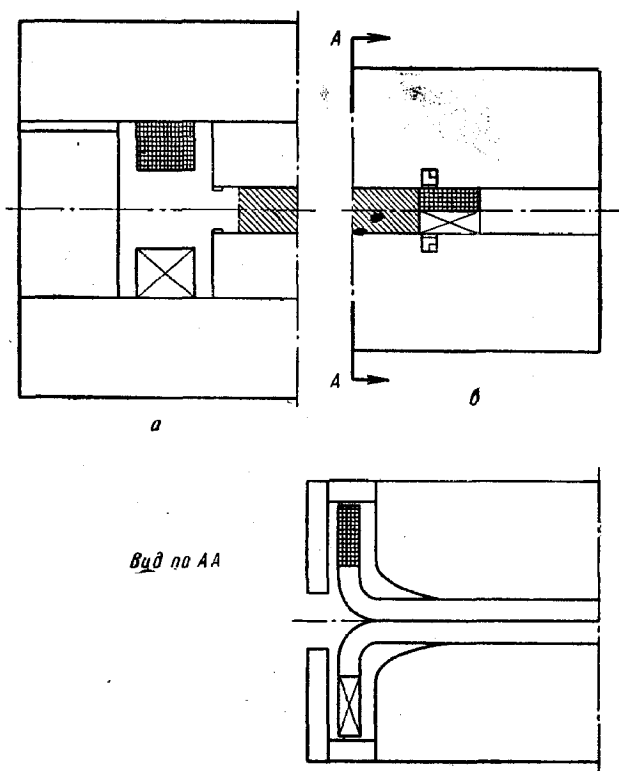
траектории. Мы принимаем, что  $\rho > 0$ , если координата  $x$  центра кривизны положительна. Координата  $s$  измеряется вдоль осевой траектории, начиная от некоторой произвольной точки  $s=0$ .

При малых изменениях  $s$  нашу систему можно рассматривать как цилиндрическую систему координат  $\{z, r, \theta\}$  с  $r = \rho - x$  и  $\theta = s/\rho$ . В случае  $\rho \rightarrow \infty$ , т. е. при прямолинейной осевой траектории, эта система переходит в декартову систему координат, которой мы пользовались в гл. 1.

## § 2. ТИПЫ ОТКЛОНЯЮЩИХ МАГНИТОВ

При управлении пучками высоких энергий фокусировку и отклонение обычно производят отдельно, пользуясь для этого магнитами разного типа, что значительно повышает гибкость системы. Поэтому в качестве отклоняющих магнитов чаще всего применяются магниты с однородным полем. На фиг. 2.2 показаны поперечные сечения двух различных магнитов такого типа.

В некоторых же случаях бывает желательно или даже необходимо сочетать сильную фокусировку с отклоняющим действием в одном и том же магните путем наложения поля

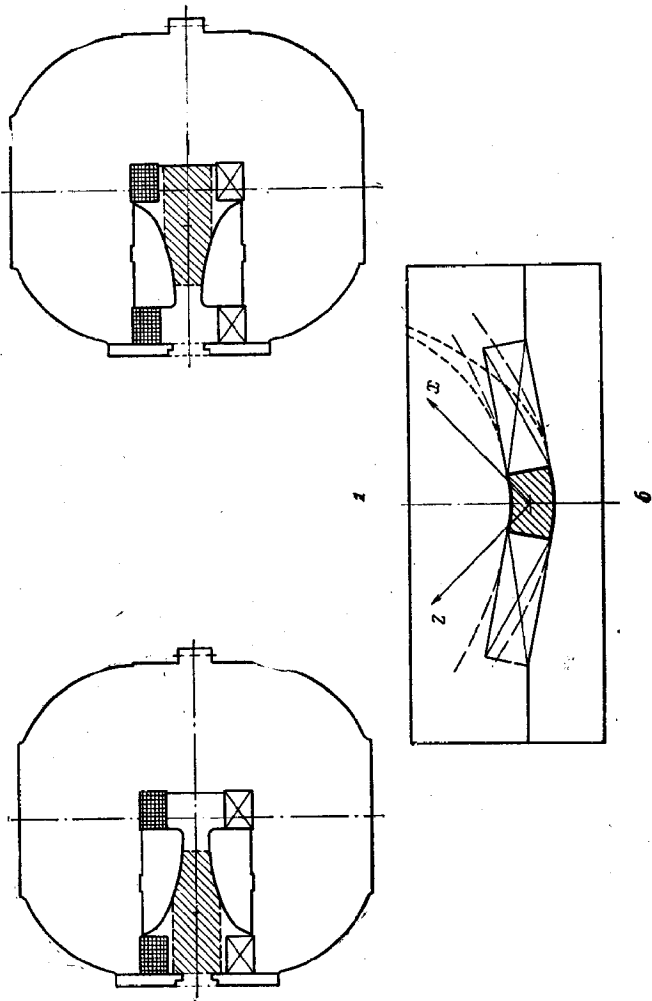


Фиг. 2.2. Поперечные сечения отклоняющих магнитов с однородным полем (показана только одна половина).

Внизу представлен вид по AA магнита типа оконной рамы (б).

с квадрупольной симметрией на однородное отклоняющее поле. Такая комбинация полей представляет собой часть поля квадрупольной линзы, в которой осевая траектория смещена относительно оси линзы. Поперечные сечения двух таких магнитов показаны на фиг. 2.3. На фиг. 2.2 и 2.3 используемая область поля заштрихована. Ниже мы кратко опишем эти магниты, чтобы дать некоторое представление об их свойствах.





Ф и г. 2.3. Поперечные сечения магнитов с наложенными отклоняющим полем и полем с квадрупольной симметрией.

На фиг. 2.2, *a* изображен так называемый магнит Ш-образного типа [2]. Он характеризуется низкой потребляемой мощностью, но однородность поля у краев полюсов невелика. Для увеличения ширины используемой области поля на краях полюсов, где поле падает, устанавливаются стальные шиммы. Правда, при высоком возбуждении шиммы и углы полюсов насыщаются и ширина используемой области поля уменьшается.

На фиг. 2.2, *b* показан магнит типа оконной рамы. Он потребляет значительно больше энергии, чем Ш-образный магнит. Но его преимущество в том, что поле постоянно почти во всей апертуре, если насыщение отсутствует и распределение тока в катушке однородно. Кроме того, насыщение достигается при более высоком возбуждении, так как полюсы этого магнита не имеют выступов. При насыщении поле магнита типа оконной рамы оказывается несколько больше у краев апертуры, где короче путь линий магнитного поля в стали. Данный эффект можно уменьшить, увеличив сопротивление магнитной цепи в указанной области. Для этой цели обычно делают отверстия в ярме, как показано на фиг. 2.2, *b* [3].

Спад краевых полей магнита типа оконной рамы (фиг. 2.2, *b*) можно сделать линейным, если краям полюсов придать форму гипербол и поместить на концах магнита стальные отражательные пластины<sup>1)</sup>, как показано на фиг. 2.2, *b*. Тогда поперечное сечение магнита (вид сбоку) становится похожим на сечение квадруполья, у которого одна половина заменена отражательной пластиной. Такая конфигурация краевого поля позволяет сгладить распределение интеграла от поля и избежать насыщения краев полюсов (§ 6).

В ряде случаев необходимо иметь свободный доступ к одному из краев апертуры отклоняющего магнита. Типичный пример — вывод или инжекция пучка под небольшими углами к первичному пучку. Поэтому ярмо отклоняющего магнита или так называемого «синхротронного» магнита, который обладает и фокусирующим и отклоняющим действием, приходится делать С-образным. Магнит такого типа можно получить, если разрезать квадруполь по вертикали на две половины и заменить одну из них стальной отражательной пластиной<sup>2)</sup>, которая обеспечивает сохранение конфигурации поля. Поскольку магнитный поток вблизи центра отражатель-

<sup>1)</sup> М. Foss, частное сообщение (см. также [4]).

<sup>2)</sup> Р. F. Соорег, частное сообщение,

ной пластины, т. е. оси квадруполья, невелик, то можно делать в ней отверстия или вообще вырезать некоторые ее части в соответствующих местах, не изменяя при этом существенно картины поля.

Другой более удобный магнит синхротронного типа с большой апертурой [5] показан на фиг. 2.3, а. Основное его преимущество в том, что в нем можно поворачивать полюсные наконечники. Это позволяет выбирать направление отклоняющего поля независимо от направления поля с квадрупольной симметрией. При одной ориентации полюсных наконечников (зазор сужается внутрь магнита) полезная апертура снаружи ограничивается сменной отражательной пластиной, а при другой (зазор сужается наружу) само ярмо служит отражательной пластиной. Края полюсов могут иметь гиперболические закругления, о которых говорилось ранее. Таким образом, мы видим, что вся апертура магнита может быть окружена отражательными пластинами, которые одновременно служат стенками вакуумной камеры.

На фиг. 2.3, б показан магнит, который можно назвать «синхротронным магнитом типа оконной рамы» [6, 7]. Он приведен в качестве примера для того, чтобы показать большое разнообразие конструкций магнитов. Профили полюсов имеют форму конфокальных гипербол, и поле с постоянным градиентом, создаваемое такими полюсами, повернуто на  $45^\circ$  по отношению к обычной ориентации. Оно линейно вплоть до поверхности катушки, поскольку требуемые граничные условия хорошо аппроксимируются катушкой с прямоугольным поперечным сечением. Идеальный контур поперечного сечения катушки [8] показан штриховыми линиями (с одной стороны).

У всех магнитов с наложением отклоняющего поля и поля с квадрупольной симметрией один и тот же недостаток: соотношение между тем и другим полем можно изменить, только сместив осевую траекторию относительно центра апертуры. Это приводит к уменьшению телесного угла захвата.

### § 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ С ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ

В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о разложении в ряд произвольного магнитного поля, симметричного относительно эквипотенциальной плоскости  $z=0$ . Составляющие такого поля удовлетворяют условиям симметрии

$$B_z(z) = B_z(-z), \quad B_x(z) = -B_x(-z), \quad B_y(z) = -B_y(-z), \quad (2.1)$$

которые справедливы почти для всех типов отклоняющих магнитов.

У некоторых отклоняющих магнитов, таких, как изображенные на фиг. 2.2, имеется дополнительно вторая плоскость симметрии. В этом случае разложение поля имеет сравнительно простой вид в неподвижной декартовой системе координат. Обозначим эту систему через  $\{z, \xi, \sigma\}$ , сохранив обозначение  $\{z, x, s\}$  за криволинейной системой координат, введенной в § 1. Если имеется вторая плоскость симметрии при  $\xi=0$ , то получим дополнительные условия симметрии

$$B_z(\xi) = B_z(-\xi), \quad B_\xi(\xi) = -B_\xi(-\xi), \quad B_\sigma(\xi) = B_\sigma(-\xi). \quad (2.2)$$

Следовательно, разложение поля имеет вид

$$\begin{aligned} B_z &= \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} \xi^{2k} \tilde{a}_{ik}(\sigma), \\ B_\xi &= z \xi \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} \xi^{2k} \tilde{b}_{ik}(\sigma), \\ B_\sigma &= z \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} \xi^{2k} \tilde{d}_k(\sigma). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пользуясь уравнениями Максвелла (1.41), можно найти связь между коэффициентами разложения в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 2(k+1) \tilde{a}_{i, k+1} &= (2i+1) \tilde{b}_{ik}, \\ \tilde{b}'_{ik} &= 2(k+1) \tilde{d}_{i, k+1}, \\ \tilde{a}'_{ik} &= (2i+1) \tilde{d}_{ik}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$2(i+1) \tilde{a}_{i+1, k} + (2k+1) \tilde{b}_{ik} + \tilde{d}'_{ik} = 0.$$

Подставив эти соотношения в выражения (2.3), получим разложение поля с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии:

$$\begin{aligned} B_z &= a + \frac{1}{2} b \xi^2 - \frac{1}{2} (a'' + b) z^2 + \frac{1}{24} c \xi^4 - \frac{1}{4} (b'' + c) z^2 \xi^2 + \\ &+ \frac{1}{24} (a'''' + 2b'' + c) z^4 + O(6), \\ B_\xi &= z \xi \left[ b + \frac{1}{6} c \xi^2 - \frac{1}{6} (b'' + c) z^2 \right] + O(6), \\ B_\sigma &= z \left[ a' + \frac{1}{2} b' \xi^2 - \frac{1}{6} (a''' + b') z^2 \right] + O(5), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$a = B_z|_{z=\xi=0}, \quad b = \frac{\partial^2 B_z}{\partial \xi^2} \Big|_{z=\xi=0}, \quad c = \frac{\partial^4 B_z}{\partial \xi^4} \Big|_{z=\xi=0}.$$

Для магнита с параллельными полюсами и большим отношением ширины зазора к его высоте поле в центральной части апертуры почти не зависит от  $\xi$ . Так как в этом случае  $B_\xi \equiv 0$ , то поле будет двумерным и его распределение имеет вид

$$\begin{aligned} B_z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a^{(2n)} z^{2n}, \\ B_\sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} a^{(2n+1)} z^{2n+1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$a^{(m)}(\sigma) = \frac{d^m a}{d\sigma^m}.$$

Возвращаясь теперь к уравнениям движения в криволинейной системе координат  $\{z, x, s\}$ , введенной в § 1, заметим, что разложение поля также необходимо записать в этих координатах (фиг. 2.1). В этом случае предполагается, что симметрия существует только относительно плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , что соответствует условиям (2.1). Тогда вместо выражений (2.3) получим следующие выражения для разложения поля:

$$\begin{aligned} B_z &= \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} x^k a_{ik}, \\ B_x &= z \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} x^k b_{ik}, \\ B_s &= z \sum_{i, k=0}^{\infty} z^{2i} x^k d_{ik}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При переходе от декартовой системы координат к криволинейной уравнения Максвелла (1.41) принимают другой вид. Поскольку криволинейную систему координат можно рассматривать как цилиндрическую в пределах малых изменений  $s$ , мы получаем

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \left\{ \frac{\rho}{\rho-x} \frac{\partial B_x}{\partial s} + \frac{1}{\rho-x} B_s - \frac{\partial B_s}{\partial x}; \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho-x} \frac{\partial B_z}{\partial s}; \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\} = \{0; 0; 0\}, \quad (2.8) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho-x} \frac{\partial B_s}{\partial s} - \frac{1}{\rho-x} B_x = 0, \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho(s)$  — радиус кривизны осевой траектории. Пользуясь этими уравнениями, легко показать, что коэффициенты разложений в выражениях (2.7) связаны друг с другом следующим образом:

$$\begin{aligned} (k+1) a_{i, k+1} &= (2i+1) b_{ik}, \\ b'_{ik} &= (k+1) \left( d_{i, k+1} - \frac{1}{\rho} d_{ik} \right), \\ a'_{ik} &= (2i+1) \left( d_{ik} - \frac{1}{\rho} d_{i, k-1} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$2(i+1) \left( a_{i+1, k} - \frac{1}{\rho} a_{i+1, k-1} \right) + (k+1) \left( b_{i, k+1} - \frac{1}{\rho} b_{ik} \right) + d'_{ik} = 0.$$

Подставим эти соотношения в разложения (2.7) и воспользуемся равенством

$$\frac{e}{p_0} a_{00} = \frac{e}{p_0} B_z \Big|_{z=x=0} = \frac{1}{\rho(s)} = h(s), \quad (2.10)$$

которое будет получено в следующем параграфе для частицы с импульсом  $p_0$ , движущейся вдоль осевой траектории. Тогда разложение поля в криволинейной системе координат [1] записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0} B_z &= h + kx + \frac{1}{2} rx^2 - \frac{1}{2} (h'' - hk + r) z^2 + O(3), \\ \frac{e}{p_0} B_x &= kz + rzx + O(3), \\ \frac{e}{p_0} B_s &= h'z + (hh' + k')zx + O(3), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$k(s) = \frac{e}{p_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{z=x=0} \quad \text{и} \quad r(s) = \frac{e}{p_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \Big|_{z=x=0}.$$

Таким образом, распределение поля вплоть до членов второго порядка малости полностью описывается тремя функциями  $h(s)$ ,  $k(s)$  и  $r(s)$ , которые представляют поле и его первую и вторую поперечные производные на осевой траектории.

#### § 4. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ В ОТКЛОНЯЮЩЕМ МАГНИТЕ

Производные по времени от движущихся единичных векторов криволинейной системы координат (фиг. 2.1) имеют вид

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = 0, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = -\frac{w}{\rho} \mathbf{s}_0, \quad \dot{\mathbf{s}}_0 = \frac{w}{\rho} \mathbf{x}_0, \quad (2.12)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны осевой траектории, а  $\omega = \dot{s}$  — скорость частицы, движущейся вдоль нее. Обозначим через  $\mathbf{R}$  радиус-вектор этой частицы (фиг. 2.1). При этом  $\dot{\mathbf{R}} = \omega \mathbf{s}_0$ . Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  характеризует положение любой частицы пучка, находящейся в соответствующей плоскости, нормальной к осевой траектории. Для него, а также для его первой и второй производных по времени можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{z}_0 + x\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{z}\mathbf{z}_0 + \dot{x}\mathbf{x}_0 + \omega \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{s}_0, \\ \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{z}\mathbf{z}_0 + \left[\ddot{x} + \frac{\omega^2}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)\right] \mathbf{x}_0 - \left\{2\dot{x} \frac{\omega}{\rho} - \dot{\omega} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)\right\} \mathbf{s}_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Кроме того, имеем

$$\dot{z} = \omega z', \quad \ddot{z} = \omega^2 z'' + \dot{\omega} z'.$$

Подставив все эти соотношения в уравнение (1.1), получим уравнения траектории

$$\begin{aligned} z'' + \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} z' &= \frac{e}{p} \frac{v}{\omega} \left[ x' B_s - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) B_x \right], \\ x'' + \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} x' + \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) &= -\frac{e}{p} \frac{v}{\omega} \left[ z' B_s - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) B_z \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из второго уравнения (2.14) для частицы с импульсом  $p_0$ , движущейся вдоль осевой траектории  $z \equiv x \equiv 0$  со скоростью  $\omega = v$ , вытекает соотношение (2.10) в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p_0} B_z \Big|_{z=x=0},$$

которым мы пользовались в предыдущем параграфе. Проинтегрировав это соотношение, мы получим угол  $\delta(s)$  между начальным направлением траектории и направлением траектории в точке  $s$

$$\delta(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho} d\tau = \frac{e}{p_0} \int_0^s B_z(\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Дифференциальное уравнение осевой траектории в неподвижной декартовой системе координат можно также вывести из общих уравнений траектории (1.3). Подставив  $z \equiv 0$  во второе уравнение, получим<sup>1)</sup>

$$\frac{\xi''}{V(1 + \xi'^2)^3} = \frac{1}{\rho(\sigma)} = \frac{e}{p_0} B_z(\sigma) \quad (2.10a)$$

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение. [Выражение для радиуса кривизны приводится в ряде справочников (см., например, ссылку [40] к гл. 1). — Прим. ред.]

для всех траекторий в плоскости симметрии. Интегрирование равенства (2.10а) приводит к следующему выражению:

$$\frac{\xi'}{\sqrt{1+\xi'^2}} \Big|_0^\sigma = \sin \theta(\sigma) - \sin \theta_0 = \frac{e}{p_0} \int_0^\sigma B_z(\tau) d\tau. \quad (2.15a)$$

Здесь  $\theta(\sigma)$  — угол между траекторией и осью  $\sigma$ .

Возводя в квадрат второе выражение в (2.13), получаем соотношение

$$\frac{v^2}{w^2} = \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2 + z'^2 + x'^2, \quad (2.16)$$

которое после дифференцирования дает

$$\frac{\dot{w}}{w^2} = -\frac{1}{2} \frac{d/ds (v^2/w^2)}{v^2/w^2}.$$

Эти соотношения позволяют исключить  $w$  и  $\dot{w}$  из уравнений (2.14). Так же как в гл. 1, § 13, подставим разложение поля (2.11) в уравнение (2.14) и разложим все функции в ряд по  $z$ ,  $x$ , их производным и  $\Delta\rho/\rho_0$ . В конечном счете координаты траектории можно представить в виде разложений в ряд по степеням начальных значений  $z_0$ ,  $z'_0$ ,  $x_0$ ,  $x'_0$ ,  $\Delta\rho/\rho_0$ , и тогда мы получим дифференциальные уравнения для каждого коэффициента в разложениях  $z$  и  $x$ . Вместо того чтобы проделывать все эти утомительные, но не представляющие собой ничего нового выкладки, мы выведем только линейные уравнения траектории, а уравнения с точностью до членов второго порядка малости просто приведем в следующем параграфе.

В линейном приближении справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{v}{w} &\approx 1 - \frac{x}{\rho}, \quad \dot{w} \approx 0, \quad \frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right), \\ \frac{e}{\rho_0} B_z &\approx \frac{1}{\rho} + kx, \quad \frac{e}{\rho_0} B_x \approx kz, \quad B_s \approx 0. \end{aligned}$$

С их помощью найдем линейные уравнения траектории

$$z'' + kz = 0, \quad x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right)x = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\rho_0}. \quad (2.17)$$

Эти уравнения справедливы в криволинейной системе координат фиг. 2.1 и применимы ко всем полям с эквипотенциальной плоскостью симметрии  $z=0$ . При больших значениях  $\Delta\rho/\rho_0$  их необходимо преобразовать так, как указано в § 12 [см. формулы (2.52а)].

Пользуясь обозначениями  $C(s)$  и  $S(s)$ , введенными в гл. 1, § 13, решения линейных уравнений траектории можно



записать в виде

$$\begin{aligned} z &= C_z z_0 + S_z z_0', \\ x &= C_x x_0 + S_x x_0' + D \frac{\Delta p}{p_0}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где коэффициент  $D = D(s)$  называется дисперсией. Согласно уравнениям (2.17), главные траектории  $C, S$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} C_z'' + k C_z &= 0, & C_x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) C_x &= 0, \\ S_z'' + k S_z &= 0, & S_x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) S_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

при

$$\begin{aligned} C(0) &= 1, & C'(0) &= 0, \\ S(0) &= 0, & S'(0) &= 1, \end{aligned}$$

а дисперсия  $D$  — уравнению

$$D'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) D = -\frac{1}{\rho} \quad (2.20)$$

при

$$D(0) = D'(0) = 0.$$

Дисперсия  $D(s)$  — это такое частное решение неоднородного уравнения (2.20), которому соответствует траектория частицы с импульсом  $p = p_0 + \Delta p$ , выходящей из точки  $s=0$  с начальной скоростью, направленной вдоль осевой траектории. Согласно выражению (1.53), величину  $D(s)$  можно записать через  $C_x$  и  $S_x$  следующим образом:

$$D = -S_x \int_0^s \frac{1}{\rho} C_x d\sigma + C_x \int_0^s \frac{1}{\rho} S_x d\sigma. \quad (2.21)$$

При численных расчетах удобно измерять  $1/\rho = h$  в  $m^{-1}$ . Тогда величина  $1/\rho$  определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} [m^{-1}] = 0,03 \frac{B^*}{p^*} \frac{[кгс]}{[\Gammaэв/с]}. \quad (2.106)$$

## § 5. АБЕРРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как отмечалось в предыдущем параграфе, можно получить дифференциальное уравнение для каждого нелинейного коэффициента  $q$  в преобразовании траектории в отклоняющем магните

$$y(s) = \sum_{i, k, l, m, n} z_0^i z_0^{ik} x_0^l x_0'^m \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^n q_{i, k, l, m, n}(s). \quad (2.22)$$

По аналогии с уравнением (1.52) напишем это уравнение для составляющих по осям  $x$  и  $z$  в виде

$$q''_z + kq_z = f_z, \quad q''_x - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) q_x = f_x. \quad (2.23)$$

Учитывая, что его решение  $q$  при  $q(0) = q'(0) = 0$  дается выражением (1.53)

$$q = S \int_0^s Cf d\sigma - C \int_0^s Sf d\sigma,$$

мы можем вычислить каждый нелинейный абберационный коэффициент по возмущению  $f$ .

Эти возмущения были вычислены Штрейбом [1] в криволинейной системе координат для коэффициентов аббераций второго порядка в случае полей с эквипотенциальной плоскостью симметрии  $z=0$ . Результаты вычислений приведены в табл. 5 с использованием обозначений, принятых в данной книге. Некоторые из членов второго порядка тождественно равны нулю, и в разложении  $z$  остаются только шесть членов, а в разложении  $x$  — девять. Возмущения являются квадратичными функциями главных траекторий и их производных и содержат функции  $h(s)$ ,  $k(s)$  и  $r(s)$ , которые описывают магнитное поле до второго порядка включительно [см. выражение (2.11)].

Квадратичное преобразование при произвольной осевой траектории в определенном отклоняющем магните можно найти заранее стандартным лабораторным методом, аналогичным предложенному для квадрупольных линз в гл. 1, § 13. Правда, такое преобразование неодинаково для разных осевых траекторий. Поэтому здесь имеется дополнительная сложность из-за необходимости определять разложение поля (2.11) для каждой траектории в отдельности. Тем не менее может оказаться полезным и не очень сложным выполнить программу следующего вида:

1) Точно измерить распределение поля  $B(s)$  в зависимости от возбуждения магнита, выбрав соответствующим образом неподвижную систему координат. Ввести полученные результаты в цифровую вычислительную машину.

2) Пользуясь данными п. 1, рассчитать серию характерных осевых траекторий, взяв в качестве параметров полный угол отклонений  $\delta$  и возбуждение магнита.

3) Пользуясь формулами (2.10) и (2.11) найти функции  $h(s)$ ,  $k(s)$  и  $r(s)$ , необходимые для того, чтобы записать раз-

Коэффициенты второго порядка  $q$  и соответствующие возмущения  $f$  [1]

$q_z$	$f_z$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z_0 = \tau_z$	$kC_z + \alpha C_z D + h' (C_z D' - C_z' D) - h C_z' D'$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} z_0' = \sigma_z$	$kS_z + \alpha S_z D + h' (S_z D' - S_z' D) - h S_z' D'$
$z_0 x_0$	$\alpha C_z C_x + h' (C_z C_x' - C_z' C_x) - h C_z' C_x'$
$z_0 x_0'$	$\alpha C_z S_x + h' (C_z S_x' - C_z' S_x) - h C_z' S_x'$
$z_0' x_0$	$\alpha S_z C_x + h' (S_z C_x' - S_z' C_x) - h S_z' C_x'$
$z_0' x_0'$	$\alpha S_z S_x + h' (S_z S_x' - S_z' S_x) - h S_z' S_x'$
$q_x$	$f_x$
$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0}\right)^2 = \nu_x$	$h + \beta D + \gamma D^2 - h' D D' - \frac{1}{2} h D'^2$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} x_0 = \tau_x$	$\beta C_x + 2\gamma C_x D - h' (C_x D' + C_x' D) - h C_x' D'$
$\frac{\Delta p}{\rho_0} x_0' = \sigma_x$	$\beta S_x + 2\gamma S_x D - h' (S_x D' + S_x' D) - h S_x' D'$
$x_0^2$	$\gamma C_x^2 - h' C_x C_x' - \frac{1}{2} h C_x'^2$
$x_0 x_0'$	$2\gamma C_x S_x - h' (C_x S_x' + C_x' S_x) - h C_x' S_x'$
$x_0'^2$	$\gamma S_x^2 - h' S_x S_x' - \frac{1}{2} h S_x'^2$
$z_0^2$	$\delta C_z^2 - h' C_z C_z' + \frac{1}{2} h C_z'^2$
$z_0 z_0'$	$2\delta C_z S_z - h' (C_z S_z' + C_z' S_z) + h C_z' S_z'$
$z_0'^2$	$\delta S_z^2 - h' S_z S_z' + \frac{1}{2} h S_z'^2$
Обозначения:	$\alpha = 2hk - r, \quad \gamma = h^3 - 2hk + \frac{1}{2} r,$
	$\beta = 2h^2 - k, \quad \delta = -\frac{1}{2} (h'' - hk + r).$

ложение поля в криволинейной системе координат для каждой осевой траектории.

4) Далее на основании уравнения (2.23) и выражения (1.53) вычислить линейные и квадратичные коэффициенты для нескольких характерных величин углов отклонения  $\delta$  и магнитного поля  $B_m = B(m)$  в средней плоскости магнита  $s = m$ .

5) Аппроксимировать коэффициенты преобразования простыми функциями от  $\delta$  и  $B_m$ , например полиномами. В таком случае коэффициенты, характеризующие эти функции, образуют ряд чисел, который описывает оптические свойства отклоняющего магнита до второго порядка включительно.

## § 6. ДВУМЕРНОЕ КРАЕВОЕ ПОЛЕ

В данном параграфе мы кратко рассмотрим краевые поля отклоняющих магнитов с однородным полем и прямолинейными границами. Для получения простого линейного преобразования в краевом поле обычно стараются придать краям магнита такую форму, чтобы интеграл от краевого поля не менялся в пределах всей апертуры. В нашей неподвижной декартовой системе координат  $\{z, \xi, \sigma\}$  (вектор  $\xi_0$  параллелен границе магнита) это требование выражается следующим образом:

$$\int_0^{\sigma_1} B_z d\sigma = \text{const}, \quad (2.24)$$

причем точка  $\sigma = 0$  берется достаточно далеко от магнита, а  $\sigma = \sigma_1$  — внутри него.

При большой величине отношения ширины зазора к его высоте поле в центральной части апертуры хорошо аппроксимируется двумерным полем вида (2.6) и требование (2.24) автоматически выполняется<sup>1)</sup>. Проводя интегрирование и учитывая, что  $B_\sigma(0) \approx B_\sigma(\sigma_1) \approx 0$ , т. е. коэффициенты  $a^{(2n-1)} \approx 0$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ , мы находим, что интеграл от поля не зависит от  $z$ :

$$\int_0^{\sigma_1} B_z d\sigma = \int_0^{\sigma_1} a(\sigma) d\sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a^{(2n-1)} z^{2n} \right) \Big|_0^{\sigma_1} = \int_0^{\sigma_1} a(\sigma) d\sigma. \quad (2.25)$$

<sup>1)</sup> W. Hardt, частное сообщение.

Но на краях апертуры поле рассеяния отличается от двумерного, и возникает задача — добиться, чтобы отклонения были невелики. Для этого нужно, конечно, обеспечить соответствующие граничные условия.

Такого рода условиям отвечает, например, краевое поле магнита типа оконной рамы (фиг. 2.2, б). Здесь мы имеем гиперболически закругленные края полюсов и магнитные отражательные пластины. Такая форма краев обеспечивает линейное распределение поля рассеяния, неизменное почти по всей ширине апертуры<sup>1)</sup> благодаря соответствующей конструкции концов катушек на краях апертуры. Идеализованную форму такого краевого поля можно найти из выражений (2.6), подставив в них  $B_z(\sigma=0)=0$  и  $a''(\sigma)=0$ , т. е.  $a(\sigma)=c\sigma$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} B_z &= c\sigma, \\ B_\sigma &= cz, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $c = \text{const}$ . Выражение (2.26) показывает, что поперечная составляющая поля  $B_z$  линейно возрастает при увеличении  $\sigma$  и постоянна по величине в любой плоскости, параллельной границе магнита.

Выражения для поля (2.26) получаются по формуле  $\mathbf{B} = -\text{grad } V$ , если потенциал имеет вид

$$V = -cz\sigma.$$

Следовательно, эквипотенциальные поверхности представляют собой симметричные гиперболы  $z\sigma = \text{const}$ , и полюсные наконечники должны иметь такую же форму. Внутренняя поверхность отражательной пластины располагается при  $\sigma=0$  и ограничивает краевое поле. Как и в линейаризованном краевом поле с квадрупольной симметрией, описанном в гл. 1, § 14 и 15, фактическое краевое поле будет несколько отличаться от идеального, определяемого выражениями (2.26), из-за наличия отверстия в отражательной пластине и из-за того, что гиперболически закругленные края переходят в параллельные части полюсов внутри магнита. Но, как показали измерения<sup>2)</sup>, основные черты идеального краевого поля рассеяния сохраняются.

Поскольку в указанной выше конструкции края полюсов закруглены, они насыщаются лишь при большом токе возбуждения магнита, и, следовательно, распределение краевого

<sup>1)</sup> М. Foss, частное сообщение.

<sup>2)</sup> Н. Hulstschig, частное сообщение; К. Holm, частное сообщение.

поля почти не зависит от возбуждения. Измерения поля в магните такого типа [3] показали, что интегральная длина краевого поля ничтожно мало изменяется при изменении возбуждения: интеграл (2.24), деленный на напряженность поля внутри магнита, при изменении поля от 0 до 23 кэс изменился менее чем на 1 мм. Это очень ценно для стандартных лабораторных магнитов, которые работают в разных режимах.

## § 7. СЕКТОРНЫЙ МАГНИТ

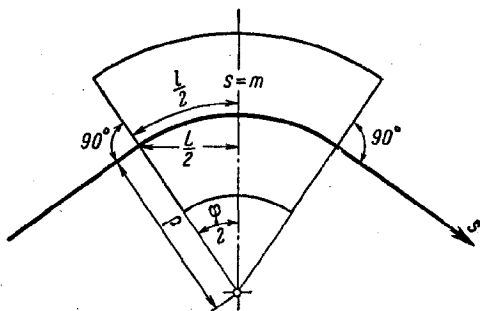
В однородном отклоняющем поле, в котором

$$B_z = \text{const}, \quad k(s) = 0 \quad \text{и} \quad h(s) = \frac{1}{\rho} = \text{const},$$

решения линейных уравнений траекторий (2.17) имеют вид

$$\begin{aligned} z(s) &= z_0 + z'_0 s, \\ x(s) &= x_0 \cos \frac{s}{\rho} + x'_0 \rho \sin \frac{s}{\rho} - \frac{\Delta p}{p_0} \rho \left( 1 - \cos \frac{s}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рассмотрим магнит с однородным полем, границы которого на входе и выходе прямолинейны и перпендикулярны



Фиг. 2.4. Секторный магнит.

осевой траектории. Такой магнит обычно называют секторным, поскольку его поперечное сечение представляет собой сектор (фиг. 2.4). Линейное преобразование траектории в таком магните непосредственно получается из выражений (2.27) в следующем приближении, которое очень удобно для практических расчетов. Так же как и в случае квадрупольной

линзы, предположим, что влияние краевых полей рассеяния в преобразовании (2.27) можно учесть, если ввести эффективную длину магнита  $l$ , измеренную вдоль осевой траектории, и эффективную отклоняющую силу  $1/\rho$ , постоянную в пределах эффективной длины; это так называемая модель с резкой границей поля, или прямоугольная модель. Кроме того, предположим, что фокусирующая сила  $k$  равна нулю во всех точках осевой траектории. В этом приближении идеализированный секторный магнит действует в направлении оси  $z$  подобно свободному от поля пространству длиной  $l$ , тогда как преобразование в направлении оси  $x$  записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\frac{1}{\rho} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{\rho_0} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.27a)$$

где  $\varphi = l/\rho$ . Введем понятие «вектора дисперсии», который определяется равенством

$$\begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho(1 - \cos \varphi) \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Его можно преобразовать обратно к средней плоскости магнита  $s=m$ , умножив на обратную матрицу преобразования для половины секторного магнита:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\rho \sin \frac{\varphi}{2} \\ \frac{1}{\rho} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Данный результат можно интерпретировать следующим образом. Дисперсия секторного магнита соответствует повороту траектории на угол

$$-2 \frac{\Delta p}{\rho_0} \sin \frac{\varphi}{2} = -\frac{L}{\rho} \frac{\Delta p}{\rho_0}$$

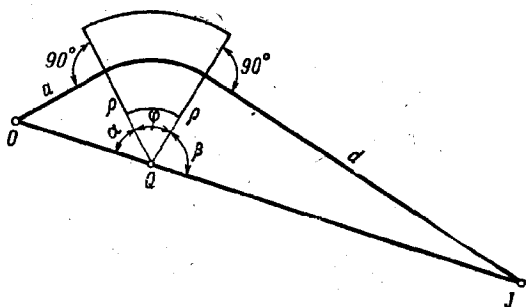
в средней плоскости магнита и последующему фокусирующему действию только второй половины магнита.

Условие фокусировки в секторном магните, описываемое матрицей преобразования (2.27a), определяется следующим простым правилом<sup>1)</sup> (фиг. 2.5): точечный предмет  $O$ , распо-

<sup>1)</sup> P. Stähelin, частное сообщение. (Это правило установлено Бербером в работе [13]. — *Прим. ред.*)

ложенный на осевой траектории, его точечное изображение  $J$  и центр кривизны  $Q$  криволинейной части осевой траектории лежат на одной прямой.

Чтобы доказать это, воспользуемся преобразованиями (2.27а) и (1.17) и напишем выражение для синусообразной



Фиг. 2.5. Правило фокусировки для секторного магнита.

траектории, проходящей через магнит и пересекающей осевую траекторию в точке  $J$ :

$$a \cos \varphi + \rho \sin \varphi + d \left( -\frac{a}{\rho} \sin \varphi + \cos \varphi \right) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{a}{\rho} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{d}{\rho} = \operatorname{tg} \beta,$$

получаем

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \varphi. \quad (2.29)$$

Из соотношения (2.29) следует равенство

$$\alpha + \beta + \varphi = \pi,$$

т. е. точки  $O$ ,  $Q$  и  $J$  лежат на прямой линии.

Чтобы уточнить результаты, полученные с помощью прямоугольной модели поля, нужно несколько более тщательно учесть краевые поля. С этой целью предположим, что отношение ширины зазора магнита к его высоте достаточно велико, так что  $B_z \equiv 0$  в окрестности осевой траектории. В нашей неподвижной системе координат  $\{z, \xi, \sigma\}$  разложение двумерного поля в ряд дается выражениями (2.6), которые



с точностью до членов первого порядка малости имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{e}{\rho_0} B_z &= H(\sigma), \\ \frac{e}{\rho_0} B_\xi &= 0, \\ \frac{e}{\rho_0} B_\sigma &= z \frac{dH}{d\sigma}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

В криволинейной системе координат  $\{z, x, s\}$  это поле записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{e}{\rho_0} B_z &= h - xh' \operatorname{tg} \delta, \\ \frac{e}{\rho_0} B_x &= -zh' \operatorname{tg} \delta, \\ \frac{e}{\rho_0} B_s &= zh',\end{aligned}\quad (2.31)$$

где  $\delta(s) = \int_0^s h(\tau) d\tau$  — угол между осевой траекторией и осью  $\sigma$  (фиг. 2.6). Разложение (2.31) легко получить из общего разложения поля (2.11) и разложения (2.30) путем замены

$$\begin{aligned}h(s) &= H(\sigma), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \delta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \delta \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\cos \delta} \frac{\partial}{\partial s}.\end{aligned}$$

Далее подставим  $h$  и  $k = -h' \operatorname{tg} \delta$  из выражения (2.31) в уравнение (2.19) для косинусообразной траектории  $C_x$  и выполним приближенное интегрирование в пределах от  $s=0$  на входе в краевое поле до  $s \approx b$  на выходе из него (фиг. 2.6).

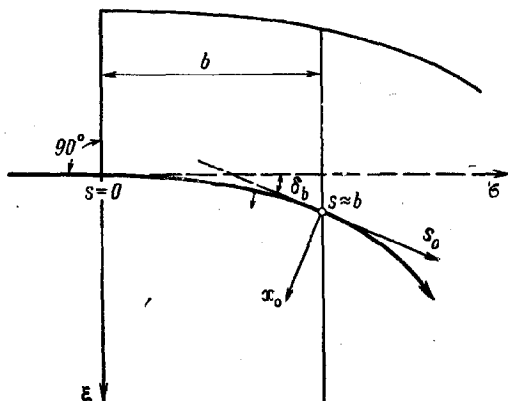
Считая, что  $C_x(s) \approx 1 = \text{const}$  и  $\operatorname{tg} \delta \approx \delta(s) = \int_0^s h d\tau$  во всей

области краевого поля, получаем выражение для оптической силы краевого поля  $1/f_x = -C'_{x,b}$ . Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned}C_x'' + (h' \operatorname{tg} \delta + h^2) C_x &= 0, \\ \frac{1}{f_x} = -C'_{x,b} &= \frac{1}{\rho} \int_0^b h ds - \int_0^b h^2 ds + \int_0^b h^2 ds = \frac{1}{\rho} \delta_b.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Это означает, что краевое поле является фокусирующим и сила его равна  $(1/\rho)\delta_b$ , где  $\delta_b$  — полный угол отклонения в краевом поле, а  $1/\rho = h_b$  — кривизна траектории внутри магнита.

Если проинтегрировать линейное уравнение (2.20) для дисперсии  $D$  таким же приближенным способом, предпола-



Фиг. 2.6. Краевое поле секторного магнита.

гая, что  $D(s) = 0$  во всей области краевого поля, то мы получим

$$\begin{aligned} D'' &= -h(s), \\ D' &= -\int_0^b h ds = -\delta_b. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Уравнения (2.32) и (2.33) показывают, что краевое поле дает ту же самую фокусировку и такое же отклонение, что и секторный магнит с эффективной силой  $1/\rho$  и эффективной длиной  $\rho\delta_b$ . Следовательно, полное преобразование в секторном магните можно представить как результат последовательных преобразований в трех секторных магнитах с одинаковой эффективной силой, но разной эффективной длиной  $\rho\delta_b$ ,  $\rho(\varphi - 2\delta_b)$  и  $\rho\delta_b$ , откуда снова получаем преобразование (2.27а), выведенное выше. Таким образом, в направлении оси  $x$  мы не добились никакого улучшения.

Для составляющей же по оси  $z$  более детальный анализ краевого поля приводит к результатам, несколько отличным от полученных ранее, которые соответствовали преобразова-

нию в пространстве, свободном от поля. По аналогии с выражениями (2.32), пользуясь уравнением (2.19), получим для косинусообразной траектории

$$C_z'' - C_z h' \operatorname{tg} \delta = 0, \\ \frac{1}{f_z} = -C'_{z,b} = - \int_0^b h' \int_0^s h d\tau ds = - \int_0^b h'(s) \delta(s) ds. \quad (2.33')$$

Следовательно, в направлении оси  $z$  краевое поле обладает небольшим рассеивающим действием из-за отклонения осевой траектории в этой области. Чтобы количественно оценить рассеивающее действие, предположим, что краевое поле линейно, и подставим выражение для поля (2.26) в выражение для оптической силы из (2.33'). При  $\sigma \approx s$  и  $h \approx s/b\rho$  мы получим

$$\frac{1}{f_z} = - \frac{1}{6} \frac{b}{\rho^2} = - \frac{1}{3\rho} \delta_b. \quad (2.33a)$$

Если оптическую силу дефокусировки в направлении оси  $z$  краевого поля сравнить с полной оптической силой фокусировки в направлении оси  $x$  половины секторного магнита, то их отношение оказывается равным

$$\frac{1/f_z}{1/f_x (\text{полн})} = - \frac{1}{3} \frac{b}{L}. \quad (2.34)$$

Здесь

$$\frac{1}{f_x (\text{полн})} = \frac{1}{\rho} \sin \frac{\Phi}{2} = \frac{L}{2\rho^2},$$

а  $L$  — «длина» секторного магнита, измеренная по прямой, проходящей через точки пересечения осевой траектории с эффективными границами магнита (фиг. 2.4). Положим, например, что эффективная длина магнита по прямой линии  $L=1$  м, а протяженность линейного поля рассеяния  $b=0,3$  м. В таком случае оптическая сила дефокусировки в направлении оси  $z$  краевого поля составляет 10% оптической силы фокусировки в направлении оси  $x$  секторного магнита.

Когда краевое поле не обладает линейной конфигурацией (2.26), мы все же предполагаем, что соотношение типа (2.33a) сохраняется, если мы выбираем надлежащим образом длину краевого поля  $b$ . При замене краевого поля полем тонкой линзы с оптической силой  $1/f_z = -1/6(b/\rho^2) = -(1/3\rho) \delta_b$  полная матрица преобразования для составляющей по оси  $z$  в сек-

торном магните будет иметь вид

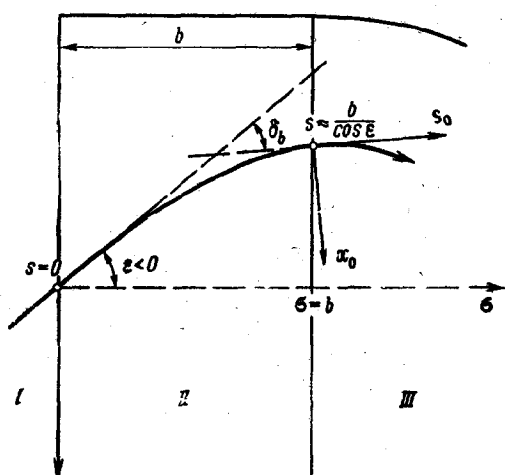
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_z} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3} \varphi \delta_b & l \\ \frac{2}{3} \frac{1}{l} \varphi \delta_b & 1 + \frac{1}{3} \varphi \delta_b \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где

$$\varphi = \frac{l}{\rho}, \quad \delta_b = \frac{1}{2} \frac{b}{\rho}.$$

### § 8. МАГНИТНЫЙ КЛИН

Если осевая траектория входит в двумерное краевое поле магнита с однородным полем под углом  $\epsilon$  к оси  $\sigma$ , то, как



Фиг. 2.7. Косой вход в краевое поле.

I — область вне поля; II — краевое поле; III — поле магнита.

следует из предыдущего параграфа и фиг. 2.7, в разложении краевого поля (2.31), записанном в криволинейной системе координат, угол  $\delta(s)$  нужно заменить на  $\epsilon + \delta(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0} B_z &= h - x h' \operatorname{tg}(\epsilon + \delta), \\ \frac{e}{p_0} B_x &= -z h' \operatorname{tg}(\epsilon + \delta), \\ \frac{e}{v_0} \bar{B}_s &= z h'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь знак угла  $\varepsilon$  мы должны выбирать следующим образом (фиг. 2.7):  $\varepsilon/\rho < 0$ , если центр кривизны лежит внутри магнита,  $\varepsilon/\rho > 0$ , если центр кривизны — вне магнита.

Подставим это разложение поля в линейное уравнение (2.19) для косинусообразной траектории  $C_x$ . Положим снова  $C_x \approx 1$  и  $\text{tg}(\varepsilon + \delta) \approx \text{tg} \varepsilon + \delta$  внутри краевого поля<sup>1)</sup> и выполним приближенное интегрирование от  $s=0$  до  $s \approx b/\cos \varepsilon$ . Тогда получим

$$C_x'' + \{h' \text{tg}(\varepsilon + \delta) + h^2\} C_x = 0,$$

$$\frac{1}{f_x} = -C'_{x,b} = \frac{1}{\rho} \text{tg} \varepsilon + \frac{1}{\rho} \int_0^{b/\cos \varepsilon} h ds = \frac{1}{\rho} \text{tg} \varepsilon + \frac{1}{\rho} \delta_b. \quad (2.37)$$

Мы видим, что благодаря углу  $\varepsilon$  появляется дополнительная фокусирующая сила, пропорциональная тангенсу этого угла [9].

Эту так называемую краевую фокусировку можно включить в преобразование в направлении оси  $x$ , умножив матрицу секторного магнита на матрицу тонкой линзы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \text{tg} \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая тонкая линза является собирающей при  $\varepsilon > 0$  и рассеивающей при  $\varepsilon < 0$ ; следовательно, краевое поле, показанное на фиг. 2.7, является рассеивающим в направлении оси  $x$ , так как центр кривизны лежит внутри магнита, т. е.  $\varepsilon < 0$ .

Для составляющей по оси  $z$  при  $C_z \approx 1 = \text{const}$  аналогичным образом получим

$$C_z'' - C_z h' \text{tg}(\varepsilon + \delta) = 0,$$

$$\frac{1}{f_z} = -C'_{z,b} = -\frac{1}{\rho} \text{tg} \varepsilon - \int_0^{b/\cos \varepsilon} h' \int_0^s h d\tau d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \text{tg} \varepsilon - \int_0^{b/\cos \varepsilon} h'(s) \delta(s) ds. \quad (2.38)$$

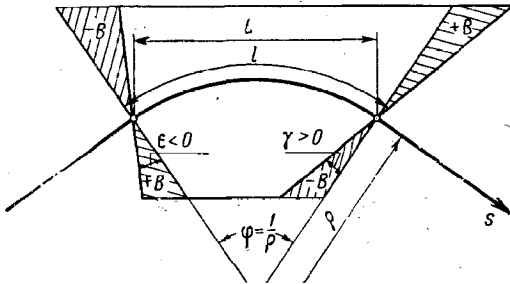
<sup>1)</sup> Приведенное равенство выполняется при малых  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Если не считать  $\varepsilon$  малым, то

$$\text{tg}(\varepsilon + \delta) \approx \text{tg} \varepsilon + \frac{\delta}{\cos^2 \varepsilon}.$$

Для количественной оценки оптической силы в направлении оси  $z$  краевого поля мы снова подставим во второе выражение (2.38) линейное поле (2.26), в котором  $\sigma \approx s \cos \varepsilon$  и  $h \approx \approx s \cos \varepsilon / b\rho$ . Получаем

$$\frac{1}{f_z} = -\frac{1}{\rho} \left( \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{6} \frac{b}{\rho \cos \varepsilon} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{3} \delta_b^* \right). \quad (2.38a)$$

Отметим, что угол  $\delta_b^*$  (полный угол отклонения в краевом поле) теперь в  $1/\cos \varepsilon$  раз больше угла  $\delta_b = b/2\rho$ , соответствующего ортогональному входу. Это связано с увеличением длины пути в краевом поле.



Фиг. 2.8. Магнит с однородным полем при косом входе и выходе (секторный магнит с наложенными магнитными клиньями).

Согласно выражению (2.38a), матрицу преобразования в тонкой линзе, описывающую краевую фокусировку в направлении оси  $z$ , можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left( \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{3} \delta_b^* \right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{3} \delta_b \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3\rho} \delta_b & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая матрица в правой части этого выражения описывает дефокусирующее действие краевого поля секторного магнита, о котором говорилось в предыдущем параграфе. Краевое поле является фокусирующим в направлении оси  $z$  при  $(1/\rho) \left( \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{3} \delta_b^* \right) < 0$  и дефокусирующим при  $(1/\rho) \left( \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{1}{3} \delta_b^* \right) > 0$ . Здесь знак угла  $\varepsilon$  определяется из выражений (2.36).

Теперь мы можем написать преобразование в магните с однородным полем при любых углах входа и выхода  $\varepsilon$  и  $\gamma$  (фиг. 2.8). Такой магнит можно рассматривать как секторный с наложенными на оба края «магнитными клиньями»,

действующими на обе составляющие подобно тонким линзам. Преобразование в направлении оси  $x$  имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\frac{1}{\rho} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \\ &+ \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} & \rho \sin \varphi \\ -\frac{(1 - \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \gamma) \sin(\varphi + \varepsilon + \gamma)}{\rho \cos(\varepsilon + \gamma)} & \frac{\cos(\varphi + \gamma)}{\cos \gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \\ &+ \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ \operatorname{tg} \gamma(1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для преобразования в направлении оси  $z$  получим

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho}(\operatorname{tg} \gamma + \theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho}(\operatorname{tg} \varepsilon + \psi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0, \quad (2.40)$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 + \varphi \operatorname{tg}^* \varepsilon & \rho \varphi \\ \frac{1}{\rho}(\operatorname{tg}^* \varepsilon + \operatorname{tg}^* \gamma + \varphi \operatorname{tg}^* \varepsilon \operatorname{tg}^* \gamma) & 1 + \varphi \operatorname{tg}^* \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0, \quad (2.40a)$$

где

$$\psi = \frac{1}{6} \frac{b}{\rho \cos \varepsilon}, \quad \theta = \frac{1}{6} \frac{b}{\rho \cos \gamma}$$

и

$$\operatorname{tg}^* \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon + \psi,$$

$$\operatorname{tg}^* \gamma = \operatorname{tg} \gamma + \theta.$$

## § 9. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ МАГНИТ

Отклоняющий магнит с однородным полем и параллельными входными и выходными границами называется прямоугольным. Линейное преобразование в нем можно рассматривать как частный случай преобразований (2.39) и (2.40) при  $\varphi + \varepsilon + \gamma = 0$ . Рассмотрим сначала случай, когда осевая траектория симметрична относительно средней плоскости магнита, т. е.  $\varepsilon = \gamma = -\varphi/2$ . Для преобразования в направле-

нии оси  $x$  получим

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ -2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Отсюда следует, что для составляющей по оси  $x$  симметричный прямоугольный магнит эквивалентен свободному от поля пространству длиной  $\rho \sin \varphi$ . Можно показать, что его дисперсия определяется угловым отклонением  $-2(\Delta p/p_0) \sin(\varphi/2) = -(L/\rho)(\Delta p/p_0)$  в средней плоскости магнита и фокусирующим действием только второй его половины — в полной аналогии с секторным магнитом [см. выражение (2.28)].

Линейное преобразование (2.41) можно получить путем интегрирования дифференциального уравнения

$$x'' = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.42)$$

в пределах от  $s=0$  до  $s=\rho \sin \varphi$ . Конечно, решение не дает истинной траектории внутри магнита, поскольку уравнение (2.42) соответствует случаю равномерного распределения краевых полей по всей длине магнита. Но решение дает правильные коэффициенты преобразования (2.41) при  $s=\rho \sin \varphi$ . В § 11 мы увидим, что уравнение (2.42) очень удобно для расчетов на аналоговых вычислительных машинах, так как в нем нет тех сложностей, которые связаны с необходимостью вводить в аналоговые цепи дискретные «короткие линзы».

Краевая фокусировка составляющей по оси  $z$ , определяемая из выражения (2.38а), очень упрощается для лиnearизованного краевого поля (2.26). Выражая член  $\delta_b^* = 1/2 b/\rho \cos(\varphi/2)$  через эффективную длину магнита  $L = 2\rho \sin(\varphi/2)$ , измеренную по прямой линии, получаем оптическую силу краевого поля

$$\frac{1}{f_z} = \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b}{L}\right). \quad (2.43)$$

В нашем примере магнита с  $L=1$  м и  $b=0,3$  м (§ 7) дефокусирующий корректирующий член  $-1/3(b/L)$ , который возник из-за отклонения траектории в краевом поле, составляет 10%. Для нелинейного двумерного краевого поля можно снова предположить, что корректирующий член имеет тот же самый вид. При этом необходимо правильно определить протяженность краевого поля. Следовательно, полное преобразование траектории в прямоугольном магните в направлении



оси  $z$  имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b}{L}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b}{L}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0, \\ \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} 1 - \varphi \kappa \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} & \rho \varphi \\ -\frac{1}{\rho} \kappa \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(2 - \varphi \kappa \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) & 1 - \varphi \kappa \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0, \quad (2.44) \end{aligned}$$

где

$$\kappa = 1 - \frac{1}{3} \frac{b}{L}.$$

Далее рассмотрим случай, когда прямоугольный магнит повернут вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$  относительно симметричной конфигурации. При  $\alpha > 0$  на входе в магнит, если знак  $\alpha$  выбран по аналогии со знаком  $\varphi$ , определяемым из уравнений (2.36), преобразования в направлении осей  $x$  и  $z$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\varphi/2 + \alpha)}{\cos(\varphi/2 - \alpha)} & \rho \sin \varphi \\ 0 & \frac{\cos(\varphi/2 - \alpha)}{\cos(\varphi/2 + \alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \\ &+ \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \varphi) \\ -2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_l &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right) & l \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi/2}\right)^{-1} \left[2 - \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi/2}\right)\right] & 1 - \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0. \end{aligned}$$

Во втором преобразовании (2.45) мы пренебрегли поправочным множителем  $\kappa = 1 - 1/3(b/L)$ . Благодаря множителю  $[1 - (\sin^2 \alpha) / (\cos^2 \varphi/2)]^{-1}$  оптическая сила в направлении оси  $z$  увеличивается при возрастании  $|\alpha|$  и становится очень большой, когда величина  $\sin^2 \alpha$  близка к  $\cos^2(\varphi/2)$ . Так будет в

том случае, если одна из границ магнита параллельна входящей или выходящей осевой траектории, а  $|\alpha|$  приближается к величине  $\pi/2 - \varphi/2$ .

## § 10. СИНХРОТРОННЫЙ МАГНИТ И ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА

Наиболее распространенный тип отклоняющего магнита с неоднородным полем это так называемый синхротронный магнит, который широко используется в синхротронных ускорителях высокой энергии. В дальнейших расчетах мы будем аппроксимировать поле такого магнита прямоугольной моделью, полагая величины  $1/\rho$  и  $k$  постоянными вдоль круговой осевой траектории длиной  $l$ . Линейные преобразования в таком магните представляют собой решения соответствующих линейных уравнений траектории (2.17). Очевидно, что на составляющую по оси  $z$  синхротронный магнит действует как квадруполь с силой  $k$ , и преобразование дается матрицами (1.15а) или (1.16а). Для составляющей же по оси  $x$  мы имеем суперпозицию фокусировки и отклонения. Учитывая это, мы получаем следующие преобразования (пользуясь обозначениями  $K = k - 1/\rho^2$ ,  $\sqrt{K} = +\sqrt{|K|}$  и  $\varphi = l\sqrt{K} > 0$ ).

а) Случай фокусировки при  $K < 0$ , т. е. при  $k < 1/\rho^2$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho|K|} (1 - \cos \varphi) \\ -\frac{1}{\rho\sqrt{K}} \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

б) Случай дефокусировки при  $K > 0$ , т. е. при  $k > 1/\rho^2$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \text{sh } \varphi \\ \sqrt{K} \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho K} (1 - \text{ch } \varphi) \\ -\frac{1}{\rho\sqrt{K}} \text{sh } \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Эти преобразования хорошо известны из теории синхротрона [11]. Слагаемое  $k$  в выражении для  $K$  соответствует градиентной фокусировке, а слагаемое  $1/\rho^2$  — слабой секторной фокусировке магнита. Вместо этих величин в теории

синхротронов часто вводят так называемый «показатель неоднородности поля»

$$n = \rho^2 k = \frac{\rho}{B_0} g.$$

Тогда тригонометрические функции в выражении (2.46) записываются в виде  $\cos(l/\rho)\sqrt{1-n}$ ,  $\sin(l/\rho)\sqrt{1-n}$ , а гиперболические в выражении (2.47) — в виде  $\operatorname{ch}(l/\rho)\sqrt{n-1}$ ,  $\operatorname{sh}(l/\rho)\sqrt{n-1}$ .

Вектор дисперсии  $\{D, D\}$  в выражениях (2.46) и (2.47) примет очень простой вид, если его отнести к средней плоскости магнита  $s=m$ . Преобразуем его обратно к этой плоскости (§ 7) путем умножения на обратную матрицу преобразования половины синхротронного магнита. Для случая фокусировки ( $K < 0$ ) получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} & -\frac{1}{\sqrt{K}} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \sqrt{K} \sin \frac{\Phi}{2} & \cos \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho|K|} (1 - \cos \Phi) \\ -\frac{1}{\rho\sqrt{K}} \sin \Phi \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\rho\sqrt{K}} \sin \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.48a) \end{aligned}$$

а для случая дефокусировки ( $K > 0$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{\Phi}{2} & -\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sh} \frac{\Phi}{2} \\ -\sqrt{K} \operatorname{sh} \frac{\Phi}{2} & \operatorname{ch} \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho K} (1 - \operatorname{ch} \Phi) \\ -\frac{1}{\rho\sqrt{K}} \operatorname{sh} \Phi \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\rho\sqrt{K}} \operatorname{sh} \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.48b) \end{aligned}$$

Данные выражения показывают, что дисперсию синхротронного магнита в рамках линейной теории можно охарактеризовать, добавляя дополнительное угловое отклонение траектории в средней плоскости магнита

$$-\frac{\Delta p}{p_0} \frac{2}{\rho\sqrt{K}} \sin \frac{\Phi}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{\Delta p}{p_0} \frac{2}{\rho\sqrt{K}} \operatorname{sh} \frac{\Phi}{2}$$

и учитывая фокусирующее действие только второй его половины.

Рассмотрим теперь наиболее общую геометрию отклоняющего магнита с симметрией относительно его средней плоскости  $s=m$ . С помощью преобразований (2.46) и (2.47) линейное преобразование в направлении оси  $x$  можно охарактеризовать тремя параметрами, а именно эффективной длиной  $l$ , эффективной отклоняющей силой  $1/\rho$  и эффективной фокусирующей силой  $k$ . Другими словами, пользуясь методом, подобным описанному в гл. 1, § 14, мы можем найти для любого магнита с указанной выше симметрией соответствующий синхротронный магнит, который, если по обе стороны от него предусмотреть свободные от поля пространства длиной  $\lambda$ , будет давать такое же линейное преобразование между  $s=0$  и  $s=s_1=2m$ . Таким образом, для случая фокусировки получаем

$$\begin{pmatrix} C_1 & S_1 \\ C'_1 & S'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

и

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho|K|} (1 - \cos \varphi) \\ -\frac{1}{\rho|K|} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где  $C(s)$  и  $S(s)$  — главные траектории отклоняющей магнитной системы, а  $\varphi = l\sqrt{K}$  и  $\lambda = m - 1/2l$ .

Если главные траектории и их производные, а следовательно, и фактические коэффициенты преобразования известны при  $s=s_1$ , то уравнение (2.49) всегда можно решить относительно параметров  $l$ ,  $1/\rho$  и  $k$ , поскольку только три из шести коэффициентов преобразования независимы. Это объясняется наличием симметрии относительно плоскости магнита  $s=m$  и доказывается следующим образом. Если обозначить матрицу преобразования через  $M$ , то линейное преобразование между точками  $s=0$  и  $s=s_1$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_1 = M \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{p_0} \begin{pmatrix} D_1 \\ D'_1 \end{pmatrix}.$$

После умножения на обратную матрицу  $M^{-1}$  получим

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_1 - \frac{\Delta p}{p_0} M^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D'_1 \end{pmatrix}.$$

В то же время вследствие симметрии поля в точках  $s=0$  и  $s=s_1$  мы имеем соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ -x' \end{pmatrix}_0 = M \begin{pmatrix} x \\ -x' \end{pmatrix}_1 + \frac{\Delta p}{\rho_0} \begin{pmatrix} D_1 \\ D'_1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = M^* \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_1 + \frac{\Delta p}{\rho_0} \begin{pmatrix} D \\ -D' \end{pmatrix},$$

где звездочка показывает, что знаки элементов, расположенных вне главной диагонали матрицы, изменились.

Сравнивая это выражение с предыдущим выражением, находим  $M^{-1} = M^*$ , т. е.  $S'_1 = C_1$ , и

$$-M^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ -D'_1 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} S_1 D'_1 - S'_1 D_1 = D_1, \\ C_1 D'_1 - C'_1 D_1 = D'_1. \end{cases}$$

Поскольку  $|M| = 1$ , при  $s = s_1$  получаем следующие три соотношения между шестью коэффициентами преобразования:

$$\begin{aligned} C_1 S'_1 - C'_1 S_1 &= 1, \\ S'_1 &= C_1, \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\frac{D'_1}{D_1} = \frac{S'_1 + 1}{S_1} = \frac{C'_1}{C_1 - 1} \quad (D_1 \neq 0).$$

Матрицы (2.49), конечно, удовлетворяют этим соотношениям, и эффективные параметры  $l_x$ ,  $1/\rho$  и  $k_x = K + 1/\rho^2$  в преобразованиях составляющей по оси  $x$  в случае фокусировки определяются из выражений

$$\begin{aligned} \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi &= C_1 - m C'_1, \\ l_x &= -\frac{1}{C'_1} \varphi \sin \varphi, \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\frac{1}{\rho} = -D'_1 \frac{\sqrt{K}}{\sin \varphi},$$

где  $\varphi = l \sqrt{K}$ . Первые два из этих выражений аналогичны равенствам (1.58), причем  $k$  здесь заменено на  $K$ . В случае дефокусировки вместо выражений (2.51) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sh} \varphi &= C_1 - m C'_1, \\ l_x &= +\frac{1}{C'_1} \varphi \operatorname{sh} \varphi, \end{aligned} \tag{2.51a}$$

$$\frac{1}{\rho} = -D'_1 \frac{\sqrt{K}}{\operatorname{sh} \varphi}.$$

Для составляющей по оси  $z$  эффективная длина  $l_z$  и фокусирующая сила  $k_z$  отклоняющего магнита определяются точно так же, как для квадрупольной линзы в гл. 1, § 14. В случае фокусировки эти параметры даются равенствами (1.58), а в случае дефокусировки — равенствами (1.58а).

Поскольку преобразование в чистом квадруполе представляет собой предельный случай преобразования (2.49) при  $1/\rho \rightarrow 0$ , эффективными параметрами синхротронного магнита  $l_z, k_z, l_x, k_x$  и  $1/\rho$ , введенными выше, точно определяются свойства линейного преобразования любого симметричного магнита. Для ряда характерных осевых траекторий и сил магнитов эти преобразования можно тоже найти заранее обычным лабораторным методом, подобным методу, изложенному в конце § 5. Но эффективные параметры синхротронного магнита часто имеют тот недостаток, что они не связаны напрямую или наглядным образом с «физическими» параметрами. Это объясняется тем, что при данном определении эффективных параметров фокусирующее действие краев магнита распределяется по всей эффективной длине. Именно по этой причине в § 7—9 мы описывали линейное преобразование в отклоняющих магнитах с однородным полем другим методом, основанным на параметрах, которые тесно связаны с «физическими». Такими параметрами являются полный угол отклонения, отклоняющая сила, протяженность краевого поля и угол входа в магнит.

## § 11. АНАЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА

Быстродействующие аналоговые электронно-вычислительные схемы, описанные в гл. 1, § 9, легко можно использовать и для исследования отклоняющего магнита [12]. С этой целью в схему, представленную на фиг. 1.14, необходимо добавить второй генератор ступенчатого сигнала для моделирования отклоняющей силы  $1/\rho(s)$ , которая представляет собой возмущение в неоднородном уравнении траектории (2.17). Такой генератор функции  $1/\rho(s)$ , применяемый в нашей лаборатории<sup>1)</sup>, подает сигнал на 17 спаренных потенциометров совместно с генератором функции  $k(s)$ . Эти потенциометры служат для того, чтобы устанавливать силы 17 «активных элементов». Их можно переключать на моделирование либо фокусирующей силы  $k$ , либо отклоняющей силы  $1/\rho$ , и соответственно этому магнитный элемент становится либо

<sup>1)</sup> W. Kern, A. Krözig, частное сообщение.

квадрупольной линзой, либо секторным магнитом с однородным полем. К любому из 17 элементов можно подключить три дополнительных спаренных потенциометра, и тогда можно задавать одновременно функции  $k$  и  $1/\rho$  в трех элементах, моделирующих синхротронные магниты.

Вычислительная машина решает уравнения (2.17)

$$z'' + kz = 0$$

и

$$x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right)x = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

на основе прямоугольной модели для функций  $k$  и  $1/\rho$ . Следовательно, если эффективные параметры синхротронного магнита  $l_z$ ,  $k_z$ ,  $l_x$ ,  $k_x$  и  $1/\rho$  известны для каждого магнита и если  $l$  и  $k$  хорошо совпадают для обеих координат, то аналоговая машина будет вычислять линейные траектории с достаточной степенью точности. (Впрочем, на фиг. 1.22 представлен пример заметного расхождения между  $l_z$ ,  $l_x$  и  $k_z$ ,  $k_x$ .)

Если же эффективные параметры определены неточно, то аналоговая вычислительная машина может выполнить приближенные вычисления на основе физических параметров, а именно угла отклонения и сил  $k_m$  и  $1/\rho_m$  в средней плоскости магнита. Для магнитов стандартного типа, применяемых для транспортировки пучка, эти вычисления можно выполнить следующим образом.

а) *Квадрупольная линза.* Задаем  $1/\rho=0$ ,  $k=k_m$  (фокусирующая сила в средней плоскости магнита  $s=m$ ) и

$$l = 1/k_m \int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds \text{ («интегральная длина фокусировки»)}.$$

б) *Секторный магнит.* Задаем  $k=0$ ,  $1/\rho=1/\rho_m$  (отклоняющая сила в средней плоскости магнита  $s=m$ ) и  $l = \rho_m \int_{-\infty}^{\infty} [1/\rho(s)] ds = \rho_m \delta$  («интегральная длина отклонения»), где  $\delta$  — угол отклонения.

в) *Прямоугольный магнит.* В цепи, соответствующей координате  $x$ , решаем уравнение (2.42), отключив цепь, задающую  $1/\rho^2$ , и задавая  $k=0$ ,  $l = \rho_m \sin \delta$  и  $1/\rho = 1/\rho_m [1/\cos^2(\delta/2)]$ ,

где  $\delta = \int_{-\infty}^{\infty} [1/\rho(s)] ds$  — угол отклонения. Это дает хорошее

приближение для координаты  $x$  при условии, что относительное влияние краевых полей не слишком велико.

Для координаты  $z$  аналоговая вычислительная машина, о которой здесь идет речь, будет обеспечивать несколько меньшую точность, поскольку нет таких «коротких линз», которые давали бы точно преобразование (2.44а). Но так как фокусировка слабая и обычно требуется максимальная точность по координате  $x$  (ибо разделение по импульсам происходит в направлении оси  $x$ ), то мы можем действовать следующим образом.

Зададим в цепи, соответствующей координате  $z$ , величину  $1/\rho^2 = 1/\rho_m^2$ , и пусть вычислительная машина решает уравнение

$$z'' + \frac{1}{\rho_m^2} z = 0$$

в пределах от  $s=0$  до  $s=\rho_m \sin \delta$ , т. е. зададим  $k=0$ ,  $l = \rho_m \sin \delta$ . Приведем пример, чтобы показать, насколько матричные элементы, полученные при таком приближенном расчете для  $\varphi=\delta$ , будут отличаться от матричных элементов в преобразовании (2.44а). Процентное отклонение матричных элементов при интегральной длине магнита (измеренной по прямой), равной 1,33 м, и при двух разных значениях угла отклонения  $\delta$ , таково:

$$\begin{array}{cc} \delta = 30^\circ & \delta = 50^\circ \\ \left( \begin{array}{cc} + 2,1\% & - 8,3\% \\ - 3,5\% & + 2,1\% \end{array} \right) & \left( \begin{array}{cc} + 21,4\% & - 20,7\% \\ - 6,5\% & + 21,4\% \end{array} \right). \end{array}$$

Например, при  $\delta=30^\circ$  оптическая сила магнита равна  $(1/\rho_m)\delta \approx 0,2 \text{ м}^{-1}$ ; следовательно, отклонение в несколько процентов от этой малой величины в большинстве случаев будет приемлемым.

## § 12. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ В СЛУЧАЕ БОЛЬШОГО РАЗБРОСА ПО ИМПУЛЬСАМ

В § 4 мы получили линейные уравнения траектории (2.17) в криволинейной системе координат  $\{z, x, s\}$ , разлагая поле в ряд по степеням  $z$  и  $x$  и их производным, а импульс — по степеням  $\Delta p/\rho_0$ . При этом предполагалось, что  $\Delta p/\rho_0 \ll 1$ . Для пучков с большим разбросом по импульсам это предположение не обеспечивает хорошего приближения, и поэтому возникает вопрос, как в таком случае следует преобразовать линейные уравнения траектории.



В уравнениях (2.17) отклоняющая сила  $1/\rho$  и фокусирующая сила  $k$  относятся к частице с импульсом  $\rho_0$ , движущейся вдоль осевой траектории. Чтобы подчеркнуть это, отметим указанные величины индексом нуль:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{e}{\rho_0} B_z \Big|_{z=x=0},$$

$$k_0 = \frac{e}{\rho_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{z=x=0}.$$

Пользуясь такими обозначениями, подставляем соотношения  $\dot{w} \approx 0$ ,  $\frac{v}{w} \approx 1 - \frac{x}{\rho_0}$ ,  $\frac{e}{\rho_0} B_z \approx \frac{1}{\rho_0} + k_0 x$ ,  $\frac{e}{\rho_0} B_x \approx k_0 z$ ,  $B_s \approx 0$  в точные уравнения траектории (2.14), как было сделано в § 4, и оставим только линейные члены  $z$ ,  $z'$ ,  $x$ ,  $x'$ . Для частицы с импульсом  $\rho = \rho_0(1 + \Delta\rho/\rho_0)$  получим

$$z'' + \frac{\rho_0}{\rho} k_0 z = 0,$$

$$x'' - \left\{ \frac{\rho_0}{\rho} k_0 - \left[ 1 - \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \frac{1}{\rho_0^2} \right\} x = - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\rho_0}. \quad (2.52)$$

Вводя обозначения

$$\frac{1}{\rho(p)} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\rho_0} = \frac{e}{\rho} B_z \Big|_{z=x=0}$$

и

$$k(p) = \frac{\rho_0}{\rho} k_0 = \frac{e}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{z=x=0}$$

и пренебрегая членом  $(\Delta\rho/\rho_0)^2$ , запишем уравнения траектории (2.52) следующим образом:

$$z'' + k(p)z = 0,$$

$$x'' - \left[ k(p) - \frac{1}{\rho^2(p)} \right] x = - \frac{1}{\rho(p)} \frac{\Delta\rho}{\rho_0}. \quad (2.52a)$$

Они имеют тот же вид, что и уравнения (2.17), но функции  $1/\rho$  и  $k$  здесь изменяются обратно пропорционально импульсу. При расчетах оптики заряженных частиц на цифровых или аналоговых вычислительных машинах целесообразно ввести эту зависимость от импульса в программу, чтобы последняя была пригодной и в случае больших отклонений импульса. В аналоговой вычислительной машине, описанной в предыдущем параграфе, это осуществлено, и относительное отклонение импульса можно плавно менять с помощью одного потенциометра в пределах  $\pm 10\%$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>I. Vorchardt, частное сообщение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Streib J. F., HEPL 104, Stanford University (1960).
2. Langeseth B., Plum G., de Raad B., CERN PS/Int. EA 60-14, Geneva (1960).
3. Foss M., Phillips H. B., ANL-5864, Argonne (1958).
4. Steffen K. G., DESY-Notiz A. 2.81, Hamburg (1961).
5. Hultsching H., Steffen K. G., DESY-magnet type MC.
6. Sigurgeisson T., CERN 55-14, Geneva (1955).
7. Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.82, Hamburg (1961).
8. Lublow D., DESY-Notiz A 2.78, Hamburg (1961).
9. Herzog R. F. K., Acta Phys. Austriaca, 4, 431 (1951).
10. Penner S., Internal Report USCOMM-NBS-DC (1958).
11. Courant E. D., Snyder H. S., Ann. of Phys., 3, 1 (1958).
12. Kern W., Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.80, Hamburg (1961).
- 13\*. Barber N. F., Proc. Leeds. Phil. Soc., 2, 427 (1938).

**Сложные системы и опенетромтры****§ 1. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ ОТКЛОНЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ**

Чтобы охарактеризовать отклонение пучка частиц или разделение его по импульсам, мы ввели ранее понятие дисперсии  $D(s)$  [выражение (2.21)]

$$D = -S \int_0^s \frac{1}{\rho} C d\sigma + C \int_0^s \frac{1}{\rho} S d\sigma.$$

Это выражение справедливо для любого типа магнитных систем.

Во многих экспериментах требуется, чтобы дисперсия, равная нулю в точке  $s=0$ , снова обращалась в нуль в некоторой точке  $s=s_1$ , т. е.

$$D_1 = D'_1 = 0.$$

Мы назовем систему, обладающую таким свойством, бездисперсионной между точками 0 и  $s_1$ . Из выражения (2.21) следуют условия, которые должны выполняться, чтобы система была бездисперсионной:

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C d\sigma = \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S d\sigma = 0. \quad (3.1)$$

Их можно получить таким образом. Подставим  $D_1 = 0$  в выражение (2.21) и умножим его на  $S'_1$ :

$$C_1 S'_1 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S d\sigma - S_1 S'_1 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C d\sigma = 0.$$

Дифференцируя выражение (2.21) при  $D'_1 = 0$ , находим

$$S'_1 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C d\sigma = C'_1 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S d\sigma.$$

Из двух последних выражений получим

$$(C_1 S'_1 - C'_1 S_1) \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S \, d\sigma = \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S \, d\sigma = 0.$$

Подобным же образом получаем

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C \, d\sigma = 0.$$

Условия (3.1) можно записать иначе:

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} (x_0 C + x'_0 S) \, d\sigma = 0. \quad (3.1a)$$

Отсюда следует, что интеграл от любой линейной траектории, умноженной на  $1/\rho$ , должен равняться нулю, если для траектории  $\Delta p/p_0 = 0$ . И наоборот, если интеграл (3.1a) равен нулю для любых двух линейно независимых траекторий частиц с  $\Delta p/p_0 = 0$ , то система бездисперсионна.

В случае магнитных систем, составленных из квадруполей и отклоняющих магнитов, распределения полей которых описываются прямоугольной моделью, интегралы в выражении (3.1) вычисляются непосредственно. Но, прежде чем вычислять их, заметим, что в данный момент нас интересует не только полное преобразование, но и форма траекторий внутри магнита. Поэтому если мы хотим знать траектории внутри магнита с высокой степенью точности, то для магнитов с краевой фокусировкой мы не можем пользоваться эффективными параметрами синхротронного магнита, введенными в гл. 2, § 10, ибо при этом краевая фокусировка не локализована на входе и на выходе, а распределена по всей длине магнита. Следовательно, для достижения большей точности мы должны представить этот магнит как секторный, на входе и выходе которого располагаются соответствующие тонкие линзы. Это значит, что для отклоняющих магнитов с однородным полем нужно пользоваться преобразованием (2.39). В этом случае интегралы (3.1) нужно вычислять только в пределах секторных магнитов, а краевая фокусировка будет учитываться косвенным образом через воздействие на  $C(s)$  и  $S(s)$  вне магнитов.

Для любой траектории в синхротронном магните мы имеем уравнение

$$y(s) = y_0 C(s) + y'_0 S(s) + \frac{\Delta p}{p_0} D(s).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{\sigma=0}^l y d\sigma,$$

где  $l$  — длина магнита. Этот интеграл очень просто можно выразить через величину  $y(m) = y_m$  в средней плоскости магнита. Действительно, для случая фокусировки ( $K < 0$ ), если проинтегрировать уравнение (2.46), мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^l y d\sigma &= \int_0^l \left[ y_0 \cos \sigma \sqrt{K} + y'_0 \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sigma \sqrt{K} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho |K|} (1 - \cos \sigma \sqrt{K}) \right] d\sigma = \\ &= \frac{2}{\sqrt{K}} \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \left[ y_0 \cos \frac{\varphi}{2} + y'_0 \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \frac{\varphi}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho |K|} (1 - \cos \frac{\varphi}{2}) \right] - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho |K|} \left( \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\int_0^l y d\sigma = \frac{2}{\sqrt{K}} \left\{ y_m \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho |K|} \left( \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\},$$

где

$$\varphi = l\sqrt{K}.$$

В случае дефокусировки ( $K > 0$ ) подобным же образом найдем из уравнения (2.47)

$$\int_0^l y d\sigma = \frac{2}{\sqrt{K}} \left\{ y_m \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho K} \left( \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь мы написали  $y$  вместо  $x$ , поскольку выражения (3.2) и (3.3) справедливы и для составляющей по оси  $z$  при  $1/\rho = 0$  и  $K = k$ .

Для секторного магнита при  $k = 0$  выражение (3.2) принимает очень простой вид, если ограничиться приближением, в котором получено преобразование (2.27а) в гл. 2, § 7. В этом случае имеем  $K = -1/\rho^2$ ,  $\varphi = |l/\rho|$  и  $2 \sin(\varphi/2) = |L/\rho|$  (фиг. 2.4), и, следовательно,

$$\int_{\sigma=0}^l x d\sigma = Lx_m - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \rho (l - L). \quad (3.4)$$

Если не учитывать малый корректирующий член, который пропорционален разности между длиной магнита, измеренной по прямой линии, и длиной, измеренной вдоль криволинейной осевой траектории, то интеграл определяется произведением эффективной длины магнита, измеренной по прямой линии, на смещение (в направлении оси  $x$ ) траектории от осевой в средней плоскости магнита. В приближении, введенном в гл. 2, § 8, отклоняющий магнит с однородным полем при произвольных углах входа и выхода можно рассматривать как секторный магнит с тонкими линзами на краях. Следовательно, выражение (3.4) справедливо и для этого более общего случая.

Теперь подставим выражения (3.2) и (3.3) в выражение (2.21), применив его к системе нескольких магнитов. Чтобы не усложнять изложение, мы напишем окончательную формулу дисперсии для систем, составленных только из отклоняющих магнитов с однородным полем и квадрупольей. Это соответствует тому, что мы пользуемся выражением (3.4), а не более общими выражениями (3.2) и (3.3), которыми, впрочем, также нетрудно было бы воспользоваться.

Таким образом, дисперсия равна

$$D(s) = -S(s) \sum_i \left( \frac{L}{\rho} C_m \right)_i + C(s) \sum_i \left( \frac{L}{\rho} S_m \right)_i, \quad (3.5)$$

где

$$\left( \frac{L}{\rho} C_m \right)_i = \frac{L_i}{\rho_i} C(m_i).$$

Индекс  $i$  указывает, что данная величина относится к  $i$ -му магниту. Отсюда для бездисперсионной отклоняющей системы получим

$$\sum_i \left( \frac{L}{\rho} C_m \right)_i = \sum_i \left( \frac{L}{\rho} S_m \right)_i = 0. \quad (3.6)$$

Интересно применить формулу (3.5) к следующим частным случаям.

а) Для фокальной плоскости  $s = s_1$ , где в силу равенства  $C(s_1) = 0$  выполняется соотношение

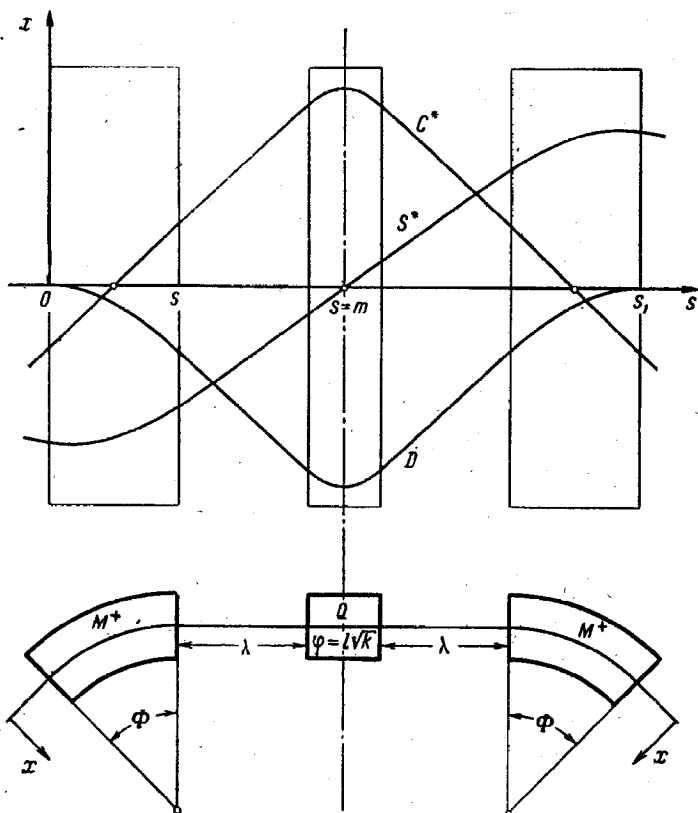
$$\frac{D(s_1)}{S(s_1)} = - \sum_i \left( \frac{L}{\rho} C_m \right)_i. \quad (3.7)$$

Чтобы в фокальной плоскости дисперсия отсутствовала, сумма в правой части должна равняться нулю.

б) Для плоскости изображения  $s = s_2$ , где в силу равенства  $S(s_2) = 0$  выполняется соотношение

$$\frac{D(s_2)}{C(s_2)} = \sum_i \left( \frac{L}{\rho} S_m \right)_i. \quad (3.8)$$

Чтобы в плоскости изображения дисперсия отсутствовала, сумма в правой части также должна равняться нулю.



Фиг. 3.1. Бездисперсионная отклоняющая система.

Приведем несколько примеров простых бездисперсионных систем. Отклоняющая система, изображенная на фиг. 3.1, состоит из двух секторных магнитов с квадрупольной линзой

между ними<sup>1)</sup>. Система симметрична относительно средней плоскости  $s=m$ . На фиг. 3.1 показаны главные траектории  $C^*$  и  $S^*$ , отнесенные к этой средней плоскости. Очевидно, что благодаря симметрии можно написать

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S^* ds = 0.$$

Сила квадруполя в фокусирующей плоскости выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C^* ds = 0.$$

Это означает, что из-за наличия симметрии такой интеграл должен равняться нулю для каждого магнита в отдельности. Согласно выражению (3.4), это соответствует случаю, когда  $C^*$  пересекает осевую траекторию в средней плоскости магнита. Отсюда следует, что на выходе из магнита  $z=s_e$  должно выполняться равенство

$$\frac{C_e^*}{C_e^{*'}} = \rho \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{D_e}{D_e'} \quad (3.9)$$

Перемножая матрицы и пользуясь равенством (3.9), мы находим, что между фазовым углом магнита  $\Phi$ , радиусом кривизны  $\rho$ , длиной свободного от поля пространства  $\lambda$  и фазовым углом квадруполя  $\varphi = l\sqrt{k}$  существует следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \rho \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} + \lambda \quad (3.10)$$

Дисперсия достигает максимальной величины в средней плоскости  $s=m$

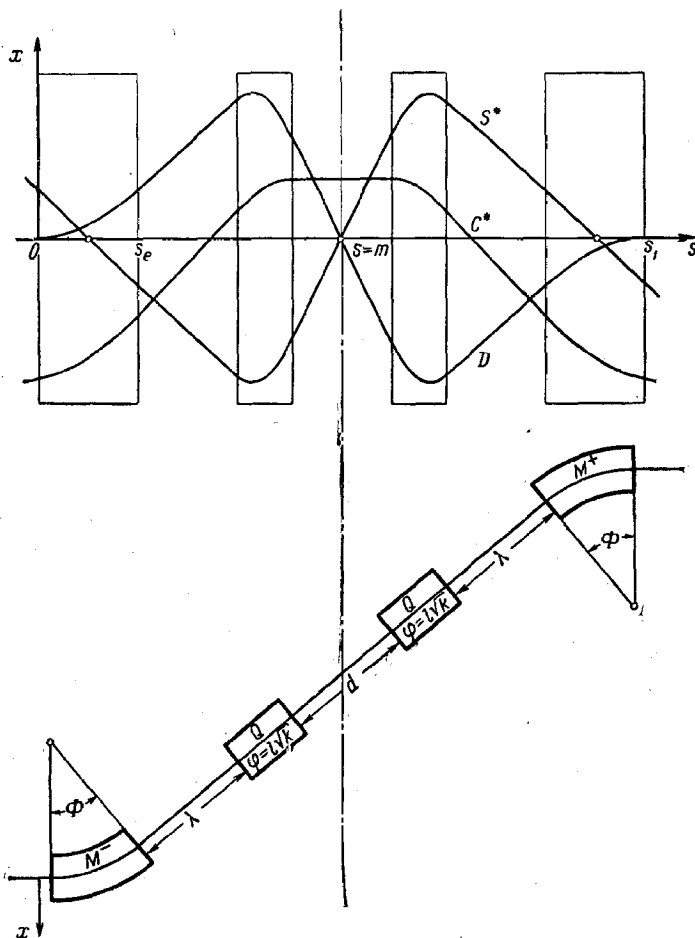
$$D_m = - \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sin \Phi}{2 \sin(\varphi/2)} \quad (3.11)$$

Сохраняя симметрию относительно плоскости  $s=m$ , можно модифицировать систему, поместив между секторными магнитами вместо одиночной квадрупольной линзы симметричный триплет из них. Это позволяет обеспечить фокусировку одновременно в обоих направлениях.

<sup>1)</sup> W. K. H. Rapofsky, частное сообщение. (См. также [28]. — Прим. ред.)



На фиг. 3.2 представлена бездисперсионная система, которая смещает весь пучок, не меняя его направления. Она состоит из двух секторных магнитов с двумя квадрупольми



Фиг. 3.2. Бездисперсионная система для параллельного смещения пучка.

между ними. Если не учитывать противоположной полярности отклоняющих магнитов, то система опять будет симметрична относительно средней плоскости  $s=m$ . Из-за наличия

симметрии

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C^* ds = 0.$$

Сила квадруполь выбирается так, чтобы в пределах каждого магнита выполнялось условие

$$\int \frac{1}{\rho} S^* ds = 0.$$

Для этого должно выполняться равенство

$$\frac{S_e^*}{S_e^{*'}} = \rho \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{D_e}{D_e'} \quad (3.12)$$

Отсюда вытекает следующее соотношение между параметрами  $\Phi$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi = l\sqrt{k}$  и длиной центрального свободного от поля пространства  $d$ :

$$\rho \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} + \lambda = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{d \sqrt{k} \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{d \sqrt{k} \sin \varphi - 2 \cos \varphi} \quad (3.13)$$

Можно обеспечить одновременную фокусировку в двух направлениях, если добавить третий квадруполь (противоположной полярности), расположив его в центральном пространстве, свободном от поля.

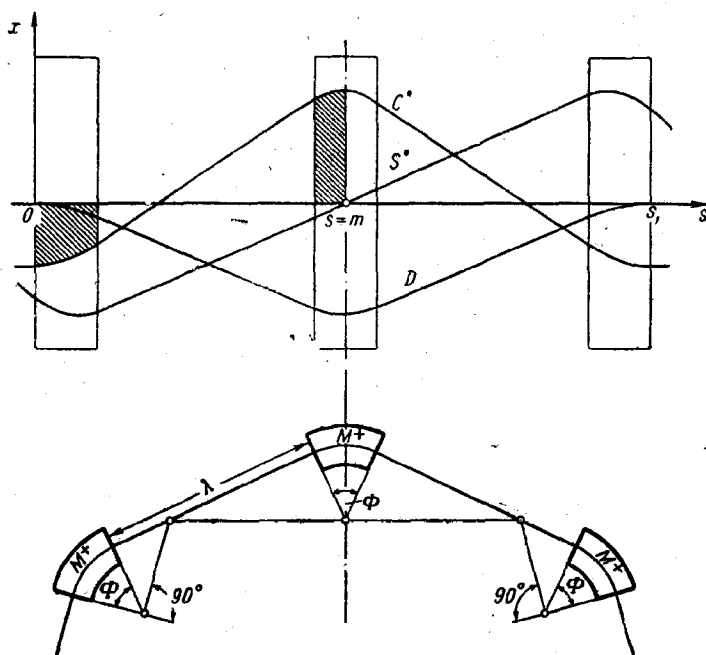
На фиг. 3.3а и 3.3б показаны два разных варианта бездисперсионной отклоняющей системы, состоящей из трех одинаковых секторных магнитов. Оба варианта симметричны относительно средней плоскости  $s=m$ . Центральный магнит системы, изображенной на фиг. 3.3а, отклоняет пучок в том же самом направлении, что и два внешних магнита, тогда как в системе, представленной на фиг. 3.3б<sup>1)</sup>, этот магнит отклоняет в противоположном направлении. Следовательно, в первом случае полный угол отклонения составляет  $3\Phi$ , а во втором он равен  $\Phi$ . В обоих случаях в силу симметрии

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S^* ds = 0,$$

а длина свободного от поля пространства  $\lambda$  выбирается так, чтобы для каждой половины системы в отдельности выполнялось равенство

$$\int \frac{1}{\rho} C^* ds = 0.$$

<sup>1)</sup> К. Л. В г о w n, частное сообщение. (См. также статью [10] в гл. 2.)



Фиг. 3.3а. Бездисперсионная система, составленная из секторных магнитов.

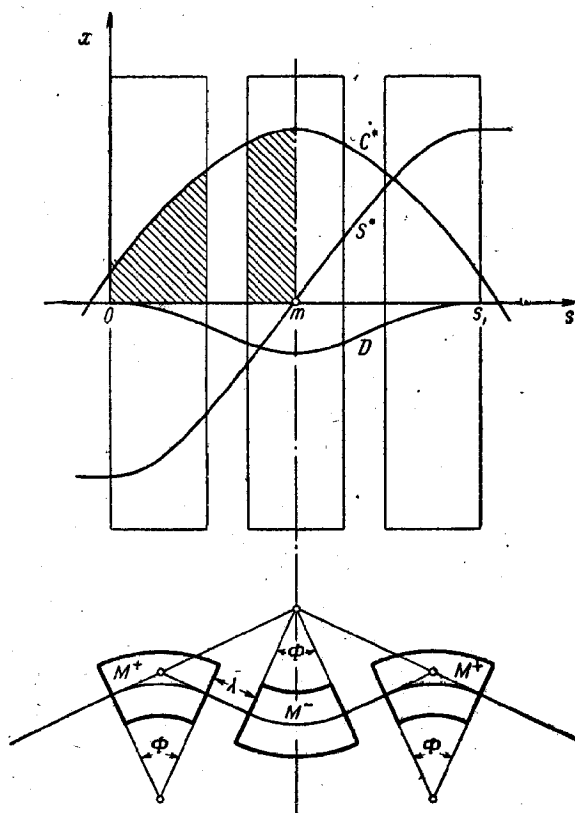
Это означает, что площади заштрихованных областей на фиг. 3.3 равны между собой. Тогда длина свободного от поля пространства  $\lambda$  и оптические свойства этих систем таковы.

Для системы, изображенной на фиг. 3.3а (полный угол отклонения равен приблизительно  $3\Phi$ ),

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{2 \cos \Phi + 1}{\sin \Phi} = \operatorname{ctg} \Phi + \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}. \quad (3.14)$$

Преобразование в первой половине системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\Phi}{2} & \lambda \cos \frac{\Phi}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2 \cos (\Phi/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \begin{pmatrix} -\rho (2 \cos \frac{\Phi}{2} + 1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$



Фиг. 3.36. Бездисперсионная система, составленная из секторных магнитов.

Тогда матрица полного преобразования запишется так:

$$M(0 \rightarrow s_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Для системы, изображенной на фиг. 3.36 (полный угол отклонения приблизительно равен  $\Phi$ ),

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{2 \cos \Phi - 1}{\sin \Phi} = \operatorname{ctg} \Phi - \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}. \quad (3.17)$$

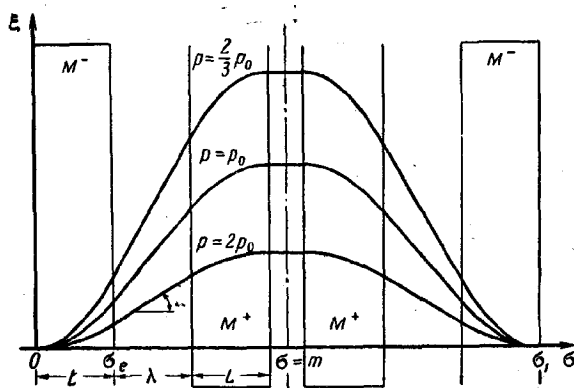
Преобразование в первой половине системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2 \sin(\Phi/2)} \\ -\frac{2 \sin(\Phi/2)}{\rho} & \frac{\lambda}{\rho} \sin \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{\rho_0} \begin{pmatrix} -\rho \left( 2 \cos \frac{\Phi}{2} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Тогда матрица полного преобразования запишется так:

$$M(0 \rightarrow s_1) = - \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Матрицы (3.16) и (3.19) показывают, что обе системы, изображенные на фиг. 3.3а и 3.3б, обладают очень простыми



Фиг. 3.4. Бездисперсионная система, разделяющая по импульсам, при большом разбросе по импульсам.

свойствами, действуя подобно свободным от поля пространствам отрицательной длины  $-\lambda$  с изменением знака в первом случае и без изменения во втором.

До сих пор мы рассматривали бездисперсионные системы в линейном приближении. Но при больших изменениях импульса в таких бездисперсионных системах первого порядка все же должны появляться некоторые дисперсионные эффекты, обусловленные нелинейными абберациями. Метод, изложенный в гл. 2, § 5, позволяет учесть эти эффекты до второго порядка малости.

Мы закончим данный параграф примером системы, разделяющей частицы по импульсам, которая бездисперсионна до любого порядка в плоскости симметрии  $z=0$ . Система показана на фиг. 3.4. Она симметрична относительно средней плоскости  $\sigma=m$  и состоит из четырех одинаковых прямоугольных магнитов с такой широкой апертурой, что поле можно рассматривать как двумерное поле вида (2.6). Очевидно, что такая система совершенно бездисперсионна. Коллиматор, расположенный в точке  $\sigma=m$ , позволяет выбрать желаемый интервал импульсов.

Уравнения траекторий, представленных на фиг. 3.4, в неподвижной системе координат  $\{z, \xi, \sigma\}$  можно получить из уравнений (2.10а) и (2.15а) в приближении прямоугольной модели поля:

$$\sin \theta = \frac{L}{\rho},$$

$$\xi'_e = \operatorname{tg} \theta = \frac{L/\rho}{\sqrt{1 - (L/\rho)^2}}$$

(угол  $\theta$  отмечен на нижней кривой фиг. 3.4). После интегрирования получаем

$$\xi_e = \rho(1 - \cos \theta) = \rho \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{\rho}\right)^2} \right].$$

Величина  $\xi$  максимальна в средней плоскости системы  $\sigma=m$  и равна в ней

$$\xi_m = 2\rho(1 - \cos \theta) + \lambda \operatorname{tg} \theta. \quad (3.20)$$

При  $L/\rho \ll 1$ , т. е. в случае малых отклонений, эта максимальная величина обратно пропорциональна импульсу.

## § 2. ДЛИНА ТРАЕКТОРИИ И ИЗОХРОННЫЕ ОТКЛОНЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Иногда бывает желательным сохранить сгустки в пучке (или вообще временную структуру пучка) при его прохождении через отклоняющую систему. Например, пучки, создаваемые линейными ускорителями, работающими при частотах выше 1000 Мгц, состоят из отдельных сгустков. При такой структуре пучка метод разделения по импульсам и техника запаздывающих счетчиков или высокочастотных отклоняющих полей позволяют определять массу вторичных частиц [1].

В то же время в других экспериментах крайне нежелательно, чтобы пучок состоял из отдельных сгустков, поскольку

при такой структуре пучка уменьшается отношение числа истинных совпадений к числу случайных в счетчиках совпадений с высоким разрешением. В таких случаях нужна «сглаживающая» система, которая ликвидировала бы сгустки в первоначально сгруппированном пучке. «Разгруппирователь» можно в принципе применять и для уменьшения разброса по импульсам в «сгруппированном» пучке, если установить зависимость фазы от импульса и затем пропускать пучок через высокочастотное ускоряющее поле, фазу и амплитуду которого следует подобрать так, чтобы разброс по импульсам уменьшался [2—4].

Такого рода проблемы транспортировки пучка можно решать, анализируя зависимость длины траектории от начальных условий и импульса. Прежде чем рассматривать конкретные задачи, мы приведем сначала некоторые формулы, которые будут нам полезны при их решении. Затем мы подробно рассмотрим «изохронную систему».

Обозначим через  $\sigma = \sigma(s)$  длину отдельной траектории, которая зависит от длины  $s$ , измеренной вдоль осевой траектории. В криволинейной системе координат  $\{z, x, s\}$  из выражения (2.16) мы получим

$$\sigma'^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = z'^2 + x'^2 + \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2,$$

или

$$\sigma' = \sqrt{z'^2 + x'^2 + \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2} = 1 - \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) (z'^2 + x'^2) + O(4). \quad (3.21)$$

Применим выражение (3.21) к системе квадрупольных линз, у которой  $1/\rho \equiv 0$ , и обозначим разность между длиной траектории  $y(s)$  и длиной осевой траектории через  $\Delta l = \sigma - s$ . Путем интегрирования для траектории  $y(s)$  получим

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^s y'^2(\tau) d\tau. \quad (3.22)$$

Сравнивая это выражение с выражениями (1.34а) и (1.36а), мы видим, что хроматическая аберрация для траектории  $S(s)$  в фокальной плоскости и для траектории  $S(s)$  в плоскости изображения пропорциональна  $\Delta l$  [5].

Теперь рассмотрим системы, содержащие отклоняющие магниты. В этом случае член  $-(x/\rho)$  есть единственный линейный член в разложении  $\sigma'$ . Пренебрегая членами более

высокого порядка, из выражения (3.21) получаем

$$\Delta l = - \int_0^s \frac{1}{\rho} x \, d\tau = - x_0 \int_0^s \frac{1}{\rho} C \, d\tau - x'_0 \int_0^s \frac{1}{\rho} S \, d\tau - \frac{\Delta p}{\rho_0} \int_0^s \frac{1}{\rho} D \, d\tau. \quad (3.23)$$

Интегрируя по всей длине одиночного синхротронного магнита (только для случая фокусировки, когда  $K < 0$ ), согласно выражению (3.2), имеем

$$\Delta l = - \frac{2}{\rho \sqrt{K}} \left[ x_m \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\Delta p}{\rho_0} \frac{1}{\rho |K|} \left( \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Для секторного магнита, где  $K = -1/\rho^2$ ,  $\varphi = l/\rho$  и  $2 \sin \varphi/2 = l/\rho$ , это выражение упрощается и принимает вид

$$\Delta l = - \frac{L}{\rho} x_m + \frac{\Delta p}{\rho_0} (l - L). \quad (3.25)$$

Применим теперь выражение (3.23) к сложной системе. Чтобы сделать нашу формулу более компактной, предположим, как и в предыдущем параграфе, что система состоит только из квадрупольей и отклоняющих магнитов с однородным полем. В результате получим

$$\Delta l = - \int_0^s \frac{1}{\rho} x \, d\tau = - \sum_i \left( \frac{l}{\rho} x_m \right)_i + \frac{\Delta p}{\rho_0} \sum_i (l - L)_i. \quad (3.26)$$

Для отклоняющей системы, в которой сохранялась бы временная структура пучка, должно выполняться равенство  $\Delta l = 0$  между  $s=0$  и  $s=s_1$  для всех траекторий независимо от начальных условий  $x_0$ ,  $x'_0$  и  $\Delta p/\rho_0$ . Такая система называется «изохронной» между этими точками. Из выражения (3.23) видно, что она одновременно удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C \, ds = 0, \quad \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S \, ds = 0, \quad \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} D \, ds = 0. \quad (3.27)$$

Если учесть выражение (3.1), то условия (3.27) означают, что изохронная система всегда бездисперсионна. Обратное утверждение неверно, т. е. бездисперсионная система не обязательно изохронна. Мы увидим, что третье из условий (3.27) представляет собой довольно жесткое дополнительное требование.



Общее выражение для интеграла  $\int (1/\rho) D d\sigma$  можно получить, воспользовавшись формулой (2.21):

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1}{\rho} D d\sigma &= - \int_0^s \frac{1}{\rho} S \left( \int_0^\sigma \frac{1}{\rho} C d\tau \right) d\sigma + \int_0^s \frac{1}{\rho} C \left( \int_0^\sigma \frac{1}{\rho} S d\tau \right) d\sigma = \\ &= - \int_0^s \frac{1}{\rho} S d\sigma \int_0^s \frac{1}{\rho} C d\sigma + 2 \int_0^s \frac{1}{\rho} C \left( \int_0^\sigma \frac{1}{\rho} S d\tau \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В системе, бездисперсионной между  $s=0$  и  $s=s_1$ , первый член в правой части этого выражения равен нулю и, следовательно,

$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} D d\sigma = 2 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} C \left( \int_0^\sigma \frac{1}{\rho} S d\tau \right) d\sigma = - 2 \int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} S \left( \int_0^\sigma \frac{1}{\rho} C d\tau \right) d\sigma. \quad (3.29)$$

Для систем, состоящих только из квадруполей и магнитов с однородным полем, интеграл (3.28) можно записать в виде

$$\int_0^s \frac{1}{\rho} D d\sigma = \sum_i \left( \frac{L}{\rho} D_m \right)_i - \sum_i (l - L)_i. \quad (3.30)$$

Этот интеграл можно получить из выражения (3.26), подставив  $x=D$  и, следовательно,  $\Delta\rho/\rho_0=1$ . Соответствующее выражение для систем, содержащих синхротронные магниты, легко найти из формулы (3.24). Согласно условиям (3.27) и равенству (3.30), изохронная система, составленная из квадруполей и отклоняющих магнитов с однородным полем, удовлетворяет условию

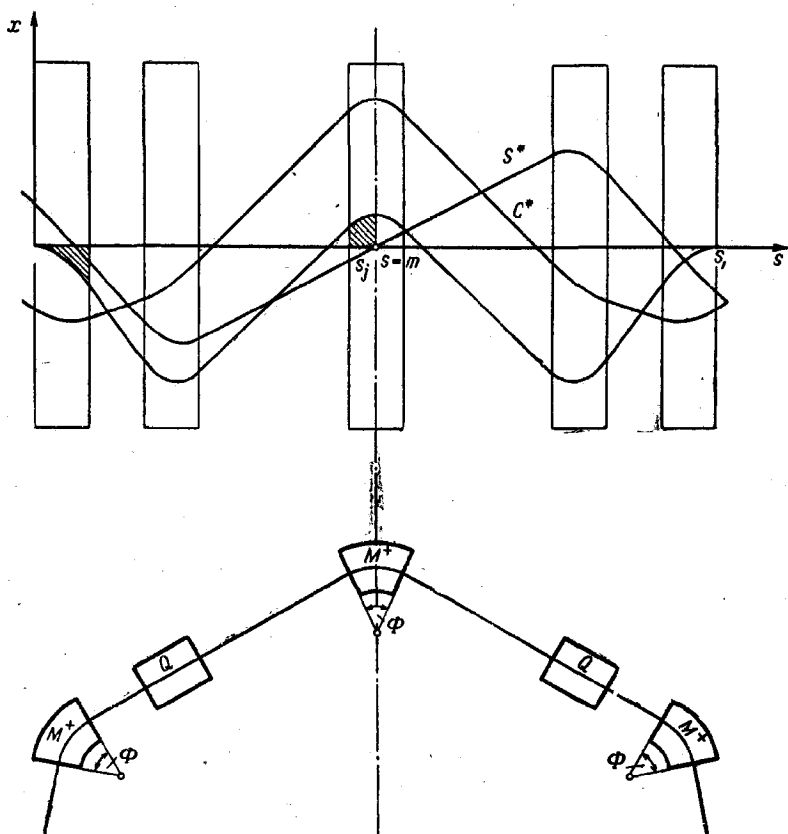
$$\int_0^{s_1} \frac{1}{\rho} D d\sigma = \sum_i \left( \frac{L}{\rho} D_m \right)_i - \sum_i (l - L)_i = 0. \quad (3.31)$$

Для одиночного секторного магнита с дисперсией  $D$ , соответствующей траектории с нулевым начальным наклоном и нулевым начальным смещением относительно осевой траектории, выражение (3.30) можно легко вычислить. При  $D_m = -\rho[1 - \cos(\Phi/2)]$  и  $L/\rho = 2 \sin(\Phi/2)$  получим

$$\frac{L}{\rho} D_m - (l - L) = -\rho(\Phi - \sin \Phi) \approx -\frac{\rho}{6} \Phi^3 \quad \text{при } \Phi \ll 1. \quad (3.32)$$

Бездисперсионная система, составленная из квадруполей и магнитов с однородным полем, должна содержать по край-

ней мере два отклоняющих магнита, и величины, характеризующие их неизохронность, суммируются, так как знак выражения (3.32) не зависит от знака  $\rho$ . При данном отклонении



Ф и г. 3.5. Симметричная изохронная отклоняющая система.

импульса  $\Delta p/p_0$  эти два магнита вызывают следующее изменение длины траектории:

$$\Delta l = 2 \frac{\Delta p}{p_0} \rho (\Phi - \sin \Phi) \approx \frac{\Delta p}{p_0} \frac{\rho}{3} \Phi^3 \quad \text{при } \Phi \ll 1. \quad (3.33)$$

Поэтому бездисперсионная система, содержащая только два отклоняющих магнита, не может быть полностью изохронной. Но при достаточно малых  $\Phi$  она почти изохронна, так как изменение длины возрастает пропорционально кубу угла

отклонения<sup>1)</sup>. На фиг. 3.1 и 3.2 показаны бездисперсионные системы такого типа.

Взяв три или большее число отклоняющих магнитов, можно спроектировать полностью изохронные системы. Пример такой системы приведен на фиг. 3.5. Она состоит из трех одинаковых секторных магнитов и двух квадрупольных линз и симметрична относительно средней плоскости  $s=m$ . В соответствии с выражением (3.22) площадь заштрихованной области в центре системы должна быть равна  $\rho(\Phi - \sin \Phi)$ . Если обозначить через  $D_j$  и  $D'_j$  значения дисперсии и ее производной на входе в центральный магнит ( $s=s_j$ ), то эта площадь вычисляется следующим образом:

$$\int_{s_j}^m \frac{1}{\rho} D ds = D_j \sin \frac{\Phi}{2} + \rho D'_j \left(1 - \cos \frac{\Phi}{2}\right) - \rho \left(\frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Phi}{2}\right) = \rho(\Phi - \sin \Phi).$$

Поскольку система симметрична, мы должны потребовать дополнительно равенства нулю  $D'$  в средней плоскости  $s=m$ , что приводит к соотношению

$$\frac{1}{\rho} D_j = D'_j \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2} - 1.$$

Из этих двух выражений получим при  $s=s_j$

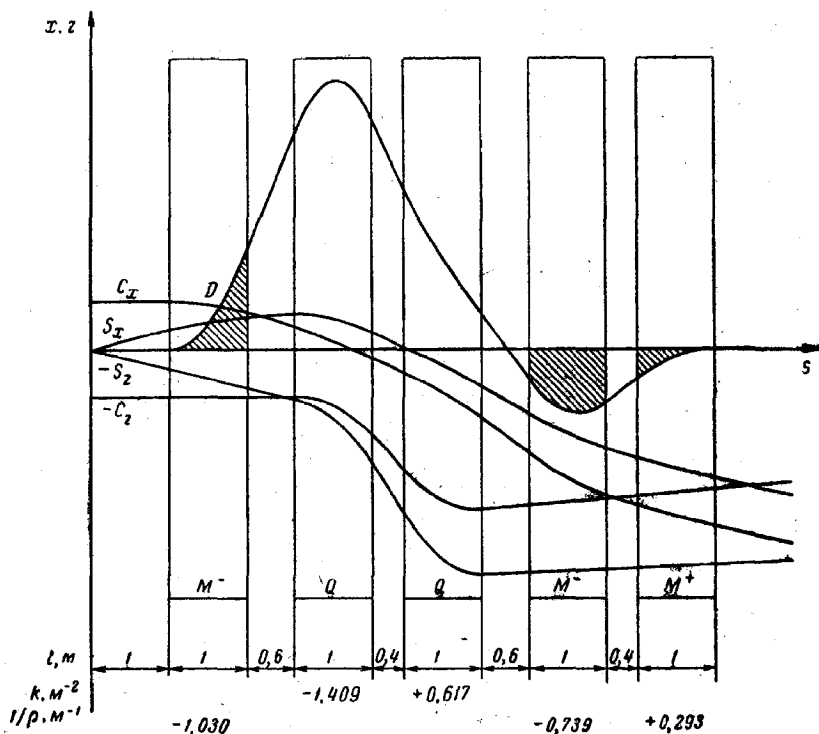
$$\begin{aligned} D_j &= \rho \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2} \left(\frac{3}{2} \Phi - \sin \Phi\right) - 1, \\ D'_j &= \frac{3}{2} \Phi - \sin \Phi. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Параметры квадрупольной линзы и свободного от поля пространства между магнитами следует выбрать таким образом, чтобы обеспечить выполнение начальных условий (3.34) при  $s=s_j$ . Для получения фокусировки и в направлении оси  $z$  одиночный квадруполь в каждой половине системы можно заменить дублетом, который также должен обеспечивать выполнение начальных условий (3.34).

На фиг. 3.6 показан другой пример несимметричной изохронной отклоняющей системы, которая была спроектирована при помощи аналоговой вычислительной машины, описанной в гл. 1, § 9, и в § 11 предыдущей главы. Эту систему можно рассматривать как модификацию бездисперсионной системы, показанной на фиг. 3.1. Основное отклонение по-

<sup>1)</sup> W. K. H. Panofsky, частное сообщение.

прежнему осуществляется двумя секторными магнитами, а третий, более слабый секторный магнит добавляется к системе для полной изохронности последней. Система может работать и с одним квадруполем, но, чтобы обеспечить некоторую фокусировку по  $z$ , здесь вводится второй квадруполь.



Фиг. 3.6. Несимметричная изохронная отклоняющая система.

На фиг. 3.6 заштрихованы три участка. Сумма их площадей, умноженных на соответствующую величину  $1/\rho$ , равна нулю.

### § 3. ТИПЫ СПЕКТРОМЕТРОВ

Магнитный спектрометр, с помощью которого определяется распределение по углу и импульсу заряженных частиц, вылетающих из мишени, представляет собой очень важный

прибор в экспериментах с пучками высоких энергий. Простейший с оптической точки зрения прибор такого рода — годоскопический спектрометр, в котором имеется только один отклоняющий магнит и нет магнитной фокусировки. Перед магнитом и после него расположена пара годоскопических систем счетчиков или искровых камер, отделенных от магнита свободным от поля пространством. При их помощи определяют положение и направление движения частицы до и после магнита. Если распределение поля магнита известно, то можно установить начальное положение частицы на мишени, угол ее вылета и импульс с точностью, определяющейся пространственным разрешением годоскопов.

В спектрометре с фокусировкой, который состоит из фокусирующего и отклоняющего магнитов, счетчики часто располагают в плоскости изображения  $s=s_2$  или в фокальной плоскости  $s=s_1$ , причем начало отсчета  $s=0$  совмещают с мишенью. Если в линейном приближении траектории частиц имеют вид (2.18)

$$x(s) = x_0 C(s) + x'_0 S(s) + \frac{\Delta p}{p_0} D(s),$$

то в первом случае в плоскости изображения  $S(s_2) = S_2 = 0$ . Это означает, что в точке  $x=x_2$  пересекаются все траектории частиц, удовлетворяющие условию

$$x_0 C_2 + \frac{\Delta p}{p_0} D_2 = x_2 = \text{const.} \quad (3.35)$$

Условие (3.35) представляет собой линейное соотношение между смещением  $x_0$ , определяющим начальное положение частицы на мишени, и относительным изменением ее импульса  $\Delta p/p_0$ , причем в это соотношение не входит величина  $x'_0$ . Поэтому разрешение по импульсу такого «спектрометра с изображением» определяется размерами мишени и будет большим, если они малы. Характеристики такого спектрометра подробно рассматриваются в § 5, а о некоторых разновидностях его мы скажем в § 6.

Во втором случае счетчики располагаются в фокальной плоскости, где  $C(s_1) = C_1 = 0$ . В точке  $x=x_1$  пересекутся все траектории частиц, удовлетворяющие условию

$$x'_0 S_1 + \frac{\Delta p}{p_0} D_1 = x_1 = \text{const.} \quad (3.36)$$

Из него явствует, что относительное изменение импульса частицы линейно связано с углом ее вылета из мишени  $x'_0$ . В то же время оно не зависит от  $x_0$ , т. е. от начального положения

частицы на мишени, которое зачастую нас совершенно не интересует. Чаще всего нам важны такие физические параметры, как  $x'_0$  и  $\Delta p/p_0$ . Частицы, пересекающие плоскость  $s=s_1$  в точке  $x=x_1$ , можно представлять точками на плоскости  $\{x'_0, \Delta p/p_0\}$ . Поскольку мы пользуемся линейным приближением, связь между параметрами таких частиц на указанной плоскости изображается наклонной прямой. Частицам, попадающим на счетчик малых размеров, находящийся в точке с координатами  $x=x_1$  и  $s=s_1$ , соответствует узкое наклонное «окно» в плоскости  $\{x'_0, \Delta p/p_0\}$ .

Мы назовем спектрометр подобного типа спектрометром с наклонным окном. Он обладает особыми преимуществами в отношении кинематического разделения частиц, возникающих при двухчастичном взаимодействии. При данной начальной энергии частицы импульс частицы после столкновения в силу законов сохранения импульса и энергии определяется только углом рассеяния. Поэтому таким частицам на плоскости  $\{x'_0, \Delta p/p_0\}$  соответствует кривая линия, которую в узком интервале можно аппроксимировать прямой. Если параметры магнита выбрать так, чтобы наклон окна спектрометра совпал с наклоном данной прямой [6], то тем самым будет обеспечена максимальная селективность для нужных частиц. Спектрометр с наклонным окном будет более подробно рассмотрен в следующем параграфе.

При описании спектрометров с изображением и с наклонным окном мы предполагали, что кинематическая селекция происходит в плоскости рассеяния частиц, которую мы совместили с плоскостью  $\{x, s\}$ . Тогда одновременная фокусировка в направлении оси  $z$  нужна лишь для увеличения светосилы спектрометра и уменьшения размера счетчика. Но в некоторых случаях желательно использовать обе координаты, чтобы отделить эффекты, связанные с импульсом, от эффектов, связанных с углом рассеяния. Если высота мишени мала, то для этого можно отклонить пучок частиц в вертикальном направлении<sup>1)</sup> и поместить в плоскость, в которой одновременно находятся вертикальное изображение мишени и горизонтальный фокус, матрицу из счетчиков, состоящую из  $n$  «строчек» и  $m$  «столбцов». Благодаря небольшому вертикальному размеру мишени мы получим  $n$  различных интервалов импульса в вертикальной плоскости. По отношению же к «горизонтальной» проекции матрица из счетчиков располо-

---

1) R. E. Taylor, частное сообщение.

жена в фокальной плоскости и поэтому будет регистрировать  $m$  различных интервалов угла рассеяния. Другие примеры будут даны в § 4 и 6.

#### § 4. СПЕКТРОМЕТР С НАКЛОННЫМ ОКНОМ

При бесконечно малой ширине счетчика спектрометр с наклонным окном в линейном приближении обеспечивает бесконечно большое разрешение для тех частиц, которым на плоскости  $\{x'_0, \Delta p/p_0\}$  соответствует прямая линия (3.36). Но если принять во внимание хроматическую aberrацию, то линия, характеризующая параметры частиц, регистрируемых точечным счетчиком, несколько искривляется, а благодаря конечным размерам мишени слегка расширяется.

Чтобы количественно оценить эти эффекты второго порядка малости, вместо выражения (2.18) для проекции траектории частиц на плоскость  $sx$  мы напишем следующее выражение:

$$x(s) = x_0 \left[ C(s) + \frac{\Delta p}{p_0} \tau(s) \right] + x'_0 \left[ S(s) + \frac{\Delta p}{p_0} \sigma(s) \right] + \frac{\Delta p}{p_0} \left[ D(s) + \frac{\Delta p}{p_0} \nu(s) \right]. \quad (3.37)$$

Здесь  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $\nu$  — коэффициенты хроматической aberrации, введенные в гл. 2, § 5 (табл. 1). Они описывают линейные изменения главных траекторий  $C$ ,  $S$  и дисперсии  $D$  при изменении импульса.

Если импульс частицы равен  $p = p_0$ , то положение фокальной плоскости ( $s_f = s_1$ ) определяется из условия

$$C(s_1) = C_1 = 0.$$

При относительном изменении импульса, равном  $\Delta p/p_0$ , это положение меняется в соответствии с уравнением

$$C(s_f) + \frac{\Delta p}{p_0} \tau(s_f) = 0. \quad (3.38)$$

При  $x_0 = x'_0 = 0$  и  $d(\Delta p/p_0) = (1/p_0) dp$  поперечная дисперсия в плоскости  $s = s_1$  равна

$$p_0 \frac{dx_f}{dp} = D_1. \quad (3.39)$$

Продифференцировав выражение (3.38) и подставив в полученное выражение  $\Delta p/p_0 = 0$ , мы найдем при  $s = s_1$  так называемую «продольную дисперсию», т. е. изменение фокусного

расстояния с изменением импульса,

$$p_0 \frac{ds_f}{dp} = - \frac{\tau_1}{C_1'} = \tau_1 S_1. \quad (3.40)$$

Следовательно, линия фокусов образует с осевой траекторией угол  $\psi$ , который определяется равенством [7]

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dx_f}{ds_f} = \frac{D_1}{\tau_1 S_1}. \quad (3.41)$$

Во всех случаях, встречающихся на практике, угол  $\psi$  мал (порядка 5—10°). Из-за конечной же толщины счетчика и многократного рассеяния счетчики трудно установить вдоль линии фокусов. Но систему счетчиков можно расположить в плоскости  $s=s_1$ , перпендикулярной осевой траектории, поскольку при этом разрешение будет ненамного ниже.

В случае точечной мишени на точечный счетчик такой системы, расположенный в  $x_1$ , будут попадать только те частицы, для которых проекция траектории на плоскость  $sx$  удовлетворяет уравнению

$$x_1 = x_0' S_1 + \frac{\Delta p}{p_0} D_1 + \frac{\Delta p}{p_0} \left( x_0' \sigma_1 + \frac{\Delta p}{p_0} v_1 \right).$$

При  $x_1=0$ , т. е. для точечного счетчика на осевой траектории, это уравнение можно записать в виде

$$x_0' = - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{D_1 + \frac{\Delta p}{p_0} v_1}{S_1 + \frac{\Delta p}{p_0} \sigma_1} \approx - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{D_1}{S_1} + \left( \frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \frac{D_1}{S_1} \left( \frac{\sigma_1}{S_1} - \frac{v_1}{D_1} \right). \quad (3.42)$$

Благодаря наличию квадратичного члена в уравнении (3.42) линия на плоскости  $\{x_0', \Delta p/p_0\}$ , соответствующая регистрируемым частицам, искривляется (фиг. 3.7, а). Она относится к точечному счетчику, находящемуся на осевой траектории, и ее наклон в точке  $x_0' = \Delta p/p_0 = 0$  определяется выражением

$$\Sigma = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dx_0'} = - \frac{S_1}{D_1}. \quad (3.43)$$

Величина  $\Sigma$  называется «наклоном» спектрометра. Как мы увидим ниже, это важнейший параметр спектрометра при исследовании кинематики двухчастичного взаимодействия.

Максимальные отклонения кривой линии (3.42) от прямой, соответствующей только линейным членам, зависят от угловой апертуры  $\pm \Delta x_0'$  спектрометра, и эту зависимость можно



приблизительно записать следующим образом (фиг. 3.7, а):

$$\begin{aligned}\delta(x'_0) &= \frac{S_1}{D_1} \left( \frac{\sigma_1}{S_1} - \frac{v_1}{D_1} \right) (\Delta x'_0)^2, \\ \frac{1}{p_0} \delta(p) &= \left( \frac{S_1}{D_1} \right)^2 \left( \frac{\sigma_1}{S_1} - \frac{v_1}{D_1} \right) (\Delta x'_0)^2.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Если спектрометр предназначен для выделения тех частиц, которым соответствует прямая линия, определяемая линейными членами в уравнении (3.42), то отклонения (3.44) представляют собой минимальные изменения угла и импульса, которые могут быть разрешены точечным счетчиком. Они пропорциональны квадрату  $\Delta x'_0$  и, следовательно, их можно существенно уменьшить, если уменьшить угол захвата спектрометра.

До сих пор мы рассматривали только точечные мишени, расположенные на осевой траектории. Если точечную мишень сдвинуть в поперечном направлении, то наклон кривой линии на фиг. 3.7 изменится. Следовательно, конечный размер  $\pm \Delta x_0$  мишени означает, что область начальных значений  $x'_0$  и  $\Delta p/p_0$  для частиц, регистрируемых точечным счетчиком, расширяется и превращается в область, состоящую из двух клиньев (фиг. 3.7, б). Предельные значения наклона даются теперь не выражением (3.43), а приближенным выражением

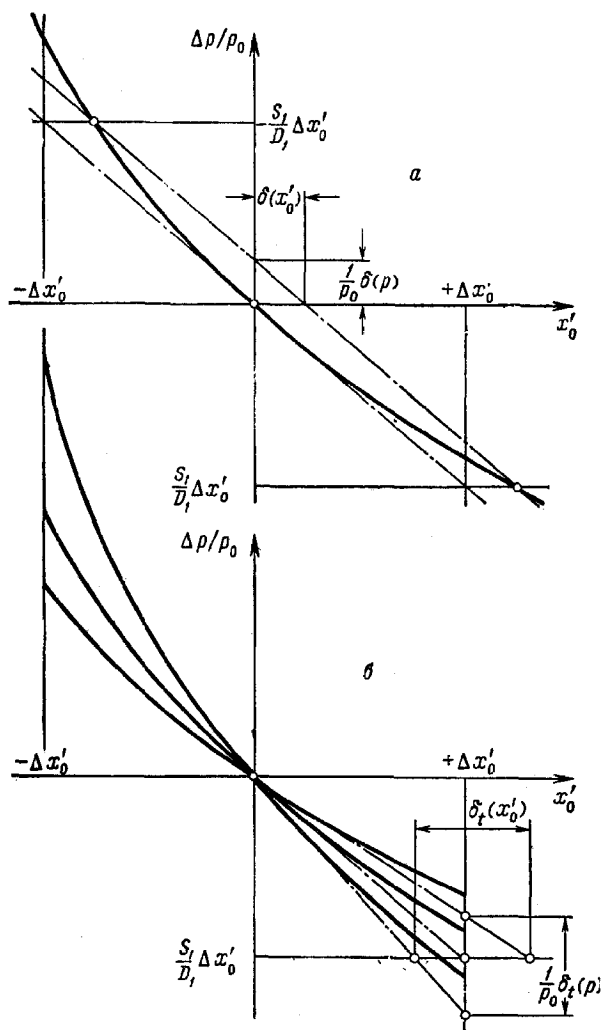
$$\frac{1}{p_0} \frac{dp}{dx'_0} \approx - \frac{S_1}{D_1 \pm \Delta x_0 \tau_1}. \quad (3.45)$$

При данной угловой апертуре  $\pm \Delta x'_0$  оно приводит к следующему разбросу по углу и импульсу относительно кривой, соответствующей точечной мишени:

$$\begin{aligned}\delta_t(x'_0) &= 2 \left| \frac{\tau_1}{D_1} \right| \Delta x_0 \Delta x'_0, \\ \frac{1}{p_0} \delta_t(p) &= 2 \left| \frac{S_1 \tau_1}{D_1^2} \right| \Delta x_0 \Delta x'_0.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Эти величины отмечены на фиг. 3.7, б. Они характеризуют ограничение, накладываемое на разрешение спектрометра конечной шириной мишени, и пропорциональны произведению размера мишени  $\Delta x_0$  на угловую апертуру  $\Delta x'_0$ , т. е. пропускной способности спектрометра (гл. 4, § 2).

Перейдем теперь к вопросам применения спектрометра с наклонным окном. Рассмотрим сначала задачу разделения частиц, возникающих при двухчастичном взаимодействии. Это такое взаимодействие двух сталкивающихся частиц, при



Фиг. 3.7. Наклонное окно в плоскости  $\{x'_0, \Delta p/\rho_0\}$ .

котором возникают только две частицы. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что импульс  $p$  каждой вторичной частицы является функцией только угла рассеяния  $\theta$  и начальной энергии взаимодействующих частиц. Так, если моноэнергетический параллельный пучок частиц бомбардирует жидкую водородную мишень, то каждая вторичная частица, возникшая в результате двухчастичного взаимодействия и имеющая определенный импульс, будет эмиттироваться в конус, половина угла при вершине которого равна  $\theta$ , а ось совпадает с направлением первичного пучка.

Пусть для наблюдения такой частицы имеется спектрометр с наклонным окном. Его плоскость  $z=0$  параллельна направлению первичного пучка, а осевая траектория проходит через центр мишени под углом  $\theta_0$  к первичному пучку (см., например, фиг. 3.10). Тогда, если угловые апертуры  $\Delta x'_0$  и  $\Delta z'_0$  малы по сравнению с  $\sin \theta_0$ , то угол  $\theta_0 + x'_0$  для наблюдаемой частицы почти равен ее углу рассеяния  $\theta$ , т. е.

$$x'_0 = \theta - \theta_0 = \Delta\theta.$$

Следовательно, наклон спектрометра, определяемый выражением (3.43), можно записать так:

$$\Sigma = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{d\theta} = - \frac{S_1}{D_1}. \quad (3.43a)$$

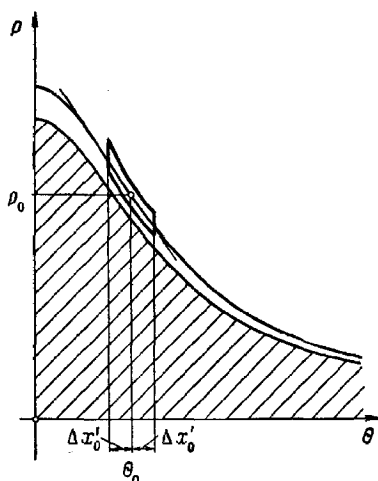
Это означает, что в фокальной плоскости  $s=s_1$  точечный счетчик будет регистрировать (в линейном приближении) только те частицы, которым на плоскости  $\{\theta, p\}$  соответствует прямая с наклоном  $-S_1/D_1$ . В то же время упруго рассеянным при некотором взаимодействии частицам с данной начальной энергией и различными углами рассеяния на плоскости  $\{\theta, p\}$  соответствует кинематическая кривая типа показанной на фиг. 3.8. Спектрометр будет обладать максимальной селективностью для таких частиц, когда его наклон (3.43a) будет равен наклону кинематической кривой в точке  $\{\theta_0, p_0\}$ . В этом случае центральный счетчик конечной ширины будет регистрировать частицы, параметры которых в плоскости  $\{\theta, p\}$  лежат в пределах наклонного окна, изображенного схематически на фиг. 3.8. Заштрихованная область на фиг. 3.8 соответствует параметрам неупруго рассеянных частиц, так что можно надежно отсортировать нежелательные взаимодействия.

Во многих экспериментах большое значение придается измерению угловых распределений. Поскольку нам желательно сохранить селективность по всем углам, возникает вопрос о том, как изменять наклон спектрометра. Если спектро-

метр состоит из квадрупольных линз и отклоняющих магнитов с однородным полем [27], то ответ на этот вопрос можно получить из выражения (3.7), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{\Sigma} = -\frac{D_1}{S_1} = 2 \sum_k \left( C_m \sin \frac{\Phi}{2} \right)_k.$$

Здесь  $k$  — порядковый номер отклоняющего магнита. В приближении, введенном в гл. 2, § 8, угол  $\Phi = l/\rho$  есть угол



Ф и г. 3.8. Наклонное окно в плоскости  $\{\theta, \rho\}$ .

отклонения для данного магнита, а величина  $C_m$  — значение, соответствующее косинусообразной траектории, в его средней плоскости  $s = m_k$ . Следовательно, наклон спектрометра можно менять путем изменения

- 1) углов отклонения магнитов,
- 2) фокусирующих сил квадрупольных линз и одновременно максимального значения  $C(s)$  в пределах магнитов.

При первом методе практически нельзя плавно изменять наклон, поскольку для этого требуется менять всю геометрию спектрометра. В большинстве случаев возможны только два или три дискретных значения угла отклонения. Второй метод удобнее, ибо для изменения наклона в данном случае достаточно регулировать возбуждение квадруполя. Правда, при этом изменяются фокусирующие свойства, а следовательно,

меняется светосила спектрометра и затрудняется его калибровка.

Если мишень не слишком велика, то возможен третий метод, который позволяет менять наклон так, чтобы геометрия магнита и светосила спектрометра почти не менялись [8]. Предположим, что счетчики сместились в направлении оси  $s$  на величину  $\Delta s$ . Тогда, согласно выражению (3.37), при  $x_c = x_0 = 0$  для нового положения счетчика  $s_c = s_1 + \Delta s$  наклон будет определяться выражением

$$\Sigma = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{d\theta} = -\frac{S_c}{D_c} = -\frac{S_1 + S'_1 \Delta s}{D_1 + D'_1 \Delta s}. \quad (3.47)$$

Таким образом, смещая счетчик на разные расстояния  $\Delta s$ , можно получать разный наклон. Вместо того чтобы менять положение счетчика, можно, конечно, изменить немного оптическую силу предшествующей квадрупольной линзы, чтобы получить относительное смещение  $\Delta s$  между фокальной плоскостью и плоскостью счетчика, не оказывая заметного влияния на светосилу спектрометра.

Продифференцировав выражение (3.47) по  $s_c$ , получим для относительного изменения угла при  $s = s_1$  выражение

$$\frac{1}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds} = \frac{S'_1}{S_1} - \frac{D'_1}{D_1}. \quad (3.48)$$

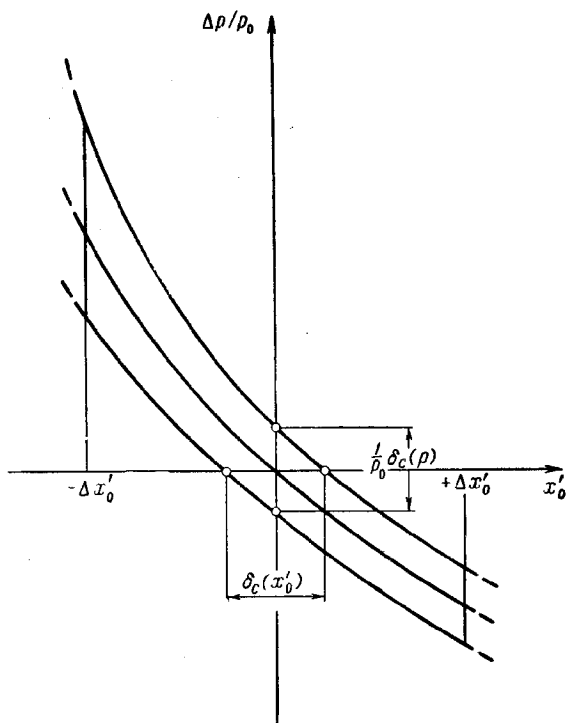
Данный метод согласования наклонов применим лишь при очень малых размерах мишени  $\pm \Delta x_0$ . Поскольку координата косинусообразной траектории в плоскости счетчика при  $\Delta s \neq 0$  больше не равна нулю, смещение частицы  $x_c$  в этой плоскости даже в линейном приближении будет зависеть от ее начального положения на мишени. На плоскости  $\{x'_0, \Delta p/p_0\}$  линия, соответствующая частицам, регистрируемым точечным счетчиком (фиг. 3.7, а), при смещении точечной мишени в поперечном направлении сдвигается. Если размер мишени равен  $\pm \Delta x_0$ , то эта линия, согласно выражению (3.37), превращается в область конечной ширины

$$\begin{aligned} \delta_c(x'_0) &= 2 \left| \frac{C_c + \frac{\Delta p}{p_0} \tau_c}{S_c + \frac{\Delta p}{p_0} \sigma_c} \right| \Delta x_0 \approx \\ &\approx 2 \left| \frac{C'_1 \Delta s}{S_1 + S'_1 \Delta s} \right| \Delta x_0 = \left| \frac{2 \Delta s}{S_1 (S_1 + S'_1 \Delta s)} \right| \Delta x_0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Соответствующее относительное изменение импульса равно

$$\frac{1}{p_0} \delta_c(p) \approx \left| \frac{2 \Delta s}{D_1 (S_1 + S'_1 \Delta s)} \right| \Delta x_0.$$

Эти изменения показаны на фиг. 3.9, где схематически изображена новая наклонная область, которая соответствует

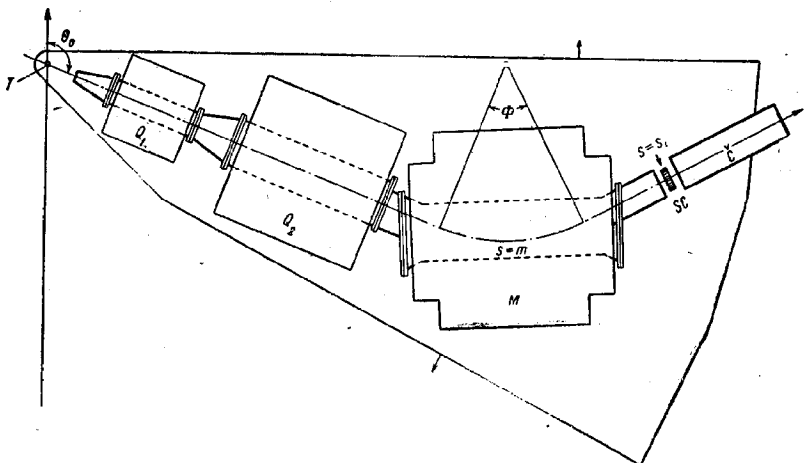


Фиг. 3.9. Расширение наклонного окна при смещении счетчика вдоль осевой траектории.

точечному счетчику на осевой траектории при  $\Delta s \neq 0$ . Хроматическая aberrация (фиг. 3.7, б) приводит к еще большему расширению этой области.

Рассмотрим теперь численный пример — спектрометр с наклонным окном, предназначенный для детектирования электронов с первичной энергией от 1 до 6 Гэв, упруго рассеянных на протонной мишени в пределах угла  $\theta_0$  от 85 до 145°. Геометрия спектрометра схематически показана на фиг. 3.10 (вид

сверху). Его длина была ограничена имеющейся свободной площадью помещения. Две квадрупольные линзы  $Q_1$  и  $Q_2$  создают горизонтальный фокус в плоскости  $s=s_1$ , где расположены сцинтилляционные счетчики  $SC$ . За этими счетчиками помещен пороговый черенковский счетчик  $C$ , который регистрирует только электроны. Прямоугольный магнит  $M$  отклоняет пучок так, что угол  $\theta$  уменьшается, и при этом, как



Фиг. 3.10. Спектрометр с наклонным окном для упругого  $e-p$ -рассеяния ( $T$  — мишень).

и требуется, наклон спектрометра оказывается отрицательным. Следовательно, отклоняющая сила  $1/\rho$  отрицательна, а угол отклонения равен  $\Phi = 1/\rho = -50^\circ$ . В вертикальном направлении вблизи  $s_1$  формируется изображение, и поэтому можно пользоваться счетчиками небольшой высоты.

На фиг. 3.11 представлены некоторые траектории частиц в системе, иллюстрирующие ее оптические свойства. Эти траектории были рассчитаны на аналоговой вычислительной машине, описанной в гл. 1, § 9, и гл. 2, § 11, в соответствии с п. «а» и «в» гл. 2, § 11. Параметры системы, которые были заданы при расчете, указаны на фиг. 3.11.

Спектрометр был оптимизирован так, чтобы обеспечивались хорошее угловое разрешение в плоскости рассеяния и хорошая наклонная характеристика при максимальном телесном угле. Чтобы диапазон изменения угла рассеяния  $\theta_0 \pm \Delta\theta'_0$  был мал, а величина  $C(s_m)$ , необходимая для согласования наклона спектрометра с наклоном кинематической

кривой, была большой (фиг. 3.7), первый квадруполь сделан рассеивающим в горизонтальной плоскости. На фиг. 3.11, *a* показаны характерные траектории, в горизонтальной плоскости при следующих значениях параметров: размер мишени  $\Delta x_0 = \pm 0,5$  см, угловая апертура  $\Delta x'_0 = \pm 18$  мрад  $\approx \pm 1^\circ$  и относительное изменение импульса  $\Delta p/p_0 = \pm 1,4\%$ . Поскольку траектории частиц с  $x'_0 = +18$  мрад и  $\Delta p/p_0 = -1,4\%$  пересекают траектории частиц с  $x'_0 = 0$ ,  $\Delta p/p_0 = 0\%$  и с  $x'_0 = -18$  мрад,  $\Delta p/p_0 = 1,4\%$  в фокальной плоскости  $s = s_1$ , наклон спектрометра равен примерно  $-1,4\%/град$ . При отсутствии хроматических aberrаций траектории должны были бы пересекаться точно в фокусе на осевой траектории. Из-за хроматических же aberrаций точка фокуса превращается в небольшой треугольник (фиг. 3.11, *a*). Высота этого треугольника связана с отклонением кривой (3.42) для точечного счетчика от соответствующей касательной на плоскости  $\{\theta, p\}$  и пропорциональна квадрату угловой апертуры  $\Delta x'_0$ . Из фиг. 3.11, *a* явствует, что при данном размере мишени и данной угловой апертуре минимальное разрешаемое изменение импульса меньше  $0,4\%$ .

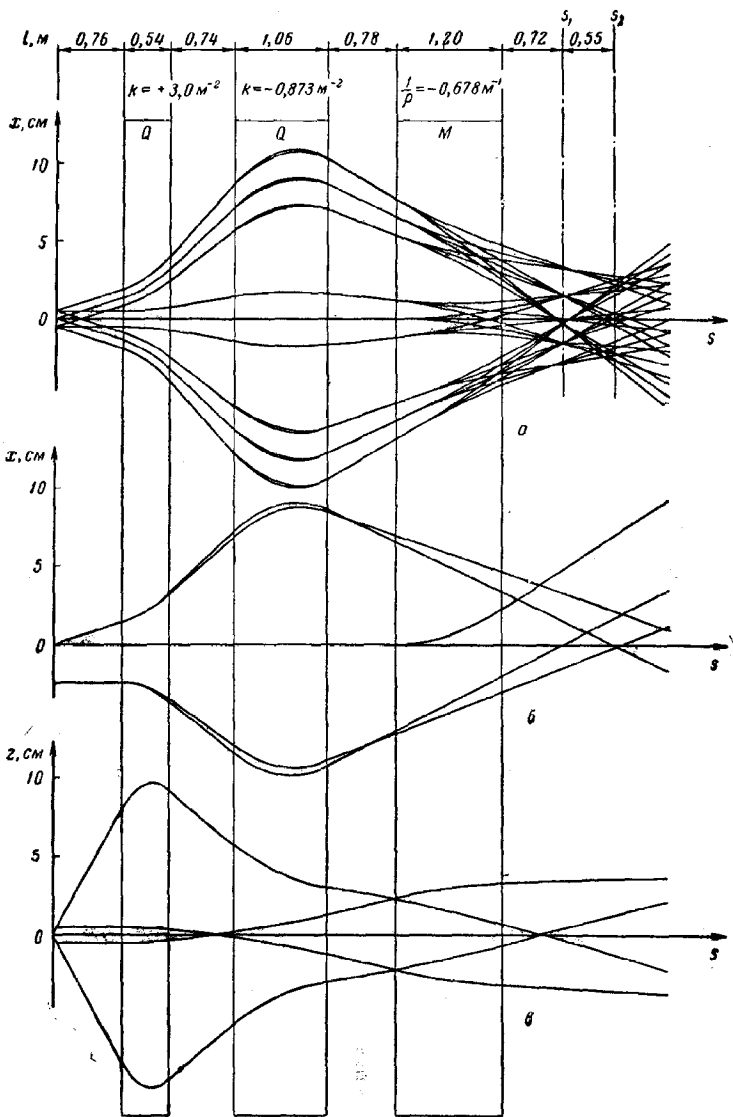
Таблица 6

Коэффициенты преобразования в спектрометре с наклонным окном, изображенным на фиг. 3.10 и 3.11

	Фокальная плоскость $s = s_1$	Плоскость изображения $s = s_2$
$C$	0	-0,68
$C', м^{-1}$	-1,21	-1,21
$S, м$	0,83	0
$S', м$	-1,48	-1,48
$D, м$	1,06	1,53
$D'$	0,82	0,82
$\tau$	5,8	7,2
$\sigma, м$	9,1	10,8
$\nu = -D, м$	-1,06	-1,53

На фиг. 3.11, *b* представлены отдельно дисперсия  $D + (\Delta p/p_0)\nu$  с учетом хроматической aberrации и главные траектории  $C$  и  $S$  с учетом и без учета хроматических aberrаций  $(\Delta p/p_0)\tau$  и  $(\Delta p/p_0)\sigma$  при относительном изменении импульса  $\Delta p/p_0 = 10\%$ . Смещения и наклон этих траекторий в





Ф и г. 3.11. Траектории в спектрометре с наклонным окном, который изображен на фиг. 3.10.

*a* — проекции на горизонтальную плоскость при  $x_0 = \pm 0,5$  см,  $x'_0 = \pm 18$  мрад,  $\Delta p/p_0 = \pm 1,4\%$ ; *б* — проекции на горизонтальную плоскость кривых  $x_0 C$ ,  $x_0 [C + (\Delta p/p_0) \tau]$ ,  $x'_0 S$ ,  $x'_0 [S + (\Delta p/p_0) \sigma]$ ,  $D + (\Delta p/p_0) \nu$  при  $x_0 = -2,5$  см,  $x'_0 = 18$  мрад,  $\Delta p/p_0 = +10\%$ ; *в* — проекции на вертикальную плоскость при  $z_0 = \pm 0,5$  см,  $z'_0 = \pm 100$  мрад.

фокальной плоскости  $s=s_1$  дают коэффициенты преобразования, представленные в табл. 6. В данном частном случае, согласно уравнению (2.42) и соответственно сказанному нами в гл. 2, § 12, имеем  $v=-D$ , поскольку вычислительная машина должна решать уравнение для прямоугольного магнита

$$x'' = -\frac{1}{\rho(p)} \frac{1}{\cos^2(\Phi/2)} \frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\cos^2(\Phi/2)} \frac{\Delta p}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} + \dots\right),$$

полученное с учетом обозначения  $1/\rho(p) = (p_0/p)(1/\rho_0)$ , которое было введено в уравнении (2.52а).

Теперь мы можем подставить значения коэффициентов при  $s=s_1$  в уравнения, полученные выше, и найти рабочие характеристики спектрометра до второго порядка малости включительно:

Поперечная дисперсия

$$p_0 \frac{dx_f}{dp} = 1,06 \text{ м},$$

т. е. 1,1 см на 1%

Продольная дисперсия

$$p_0 \frac{ds_f}{dp} = 4,8 \text{ м},$$

т. е. 4,8 см на 1%

Угол между линией фокусов и осевой траекторией

$$\text{tg } \psi = \frac{dx_f}{ds_f} = 0,220,$$

т. е.  $\psi = 12,4^\circ$

Наклон спектрометра

$$\Sigma = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dx_0} = -0,78,$$

т. е.  $-1,4\%$  на  $1^\circ$

Разброс по углу и импульсу в случае точечной мишени

$$\delta(x'_0) = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{1}{p_0} \delta(p) = 1,9 \cdot 10^{-3}$$

Дополнительный разброс, связанный с конечным размером мишени

$$\delta_t(x'_0) = 1 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{1}{p_0} \delta_t(p) = 0,8 \cdot 10^{-3}$$

Смещение  $\Delta s$  фокальной плоскости относительно плоскости счетчика, необходимое для того, чтобы изменить наклон спектрометра  $\Sigma$  на  $\pm 50\%$ , определяется из выражения (3.48) и равно

$$\Delta s = \pm 0,2 \text{ м}.$$

Согласно выражению (3.49), такое смещение приводит к следующему дополнительному разбросу по углу и импульсу:

$$\delta_c(x') = \begin{cases} 4,5 \cdot 10^{-3} & \text{при } \Delta s = + 0,2 \text{ м,} \\ 2,1 \cdot 10^{-3} & \text{при } \Delta s = - 0,2 \text{ м,} \end{cases}$$

$$\frac{1}{p_0} \delta_c(p) = \begin{cases} 3,5 \cdot 10^{-3} & \text{при } \Delta s = + 0,2 \text{ м,} \\ 1,7 \cdot 10^{-3} & \text{при } \Delta s = - 0,2 \text{ м.} \end{cases}$$

Следовательно, при заданном размере мишени 1 см наклон спектрометра можно изменять на  $\pm 50\%$ . При этом изменение импульса, разрешаемое спектрометром, увеличивается не более чем на 0,7%.

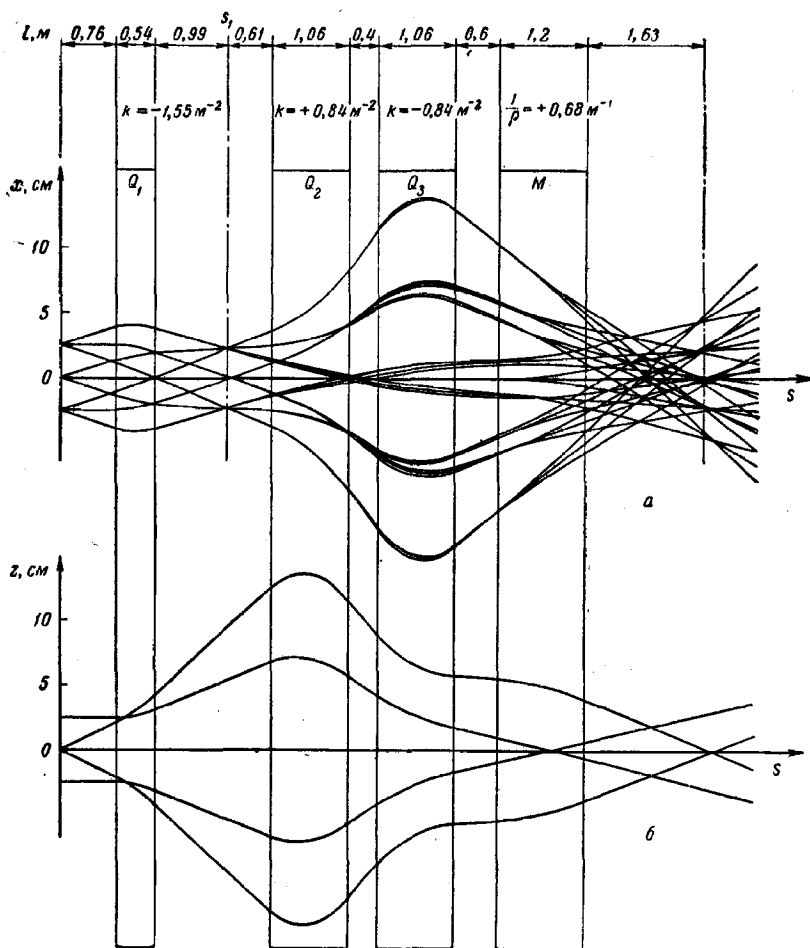
Если переместить счетчик из фокальной плоскости  $s=s_1$  в плоскость изображения  $s=s_2$  (фиг. 3.11), то наклон стремится к  $-\infty$ . В этом случае влияние размера мишени становится преобладающим и спектрометр с наклонным окном преобразуется в спектрометр с изображением. Этот случай мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас кратко остановимся на различных усовершенствованиях в спектрометре с наклонным окном, которые дают возможность точно измерять импульс и угол рассеяния. Именно, в спектрометр вводится вторая система счетчиков [6], включенных на совпадения со счетчиками первой системы. Пример такого спектрометра представлен на фиг. 3.12. Фокус первого квадруполя  $Q_1$  находится в месте расположения первой системы счетчиков ( $s=s_1$ ). Поскольку в этой точке дисперсия еще равна нулю, с помощью первых счетчиков измеряется непосредственно угол рассеяния  $\theta$ , а угловое разрешение при данной ширине счетчика в линейном приближении определяется соотношением

$$\frac{dx_1}{d\theta} = S_1. \quad (3.50)$$

Здесь мы снова приняли, что угловые апертуры  $\Delta x'_0$  и  $\Delta z'_0$  малы по сравнению с  $\sin \theta_0$ . Следующие два квадруполя создают изображение предмета, находящегося в плоскости  $s=s_1$  в месте расположения второй системы счетчиков ( $s=s_3$ ).

Поскольку между  $s_1$  и  $s_3$  имеется отклоняющий магнит  $M$ , с помощью вторых счетчиков измеряется линейная комбинация изменения импульса и угла рассеяния, которая опять характеризуется наклоном

$$\Sigma = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{d\theta} = - \frac{S_3}{D_3}.$$



Ф и г. 3.12. Траектории в спектрометре с наклонным окном для одновременного измерения импульса и угла вылета.

*a* — проекции на горизонтальную плоскость при  $x_0 = \pm 2,5$  см,  $x'_0 = \pm 18$  мрад,  $\Delta p/p_0 = 1,2\%$ ; *б* — проекции на вертикальную плоскость при  $x_0 = \pm 2,5$  см,  $x'_0 = \pm 27$  мрад.

Здесь знак величины  $S$  обратен знаку  $S$  в спектрометре, изображенном на фиг. 3.11, так как между  $s_1$  и  $s_3$  имеется кроссовер. Если наклон отрицательный, то приходится менять и знак  $D$ , изменяя знак  $1/\rho$  в отклоняющем магните. Тогда магнит отклоняет пучок так, что угол  $\theta$  (фиг. 3.10) увеличивается<sup>1)</sup>, и это оказывается выгодным в ряде случаев. Интересно, что многократное рассеяние в первой системе счетчиков, расположенной в плоскости  $s_1$ , не влияет на разрешение второй системы. Там можно даже поместить поглотитель, чтобы, например, удалить нежелательный фон электронов.

Если обе системы счетчиков в усовершенствованном спектрометре с наклонным окном содержат по  $n$  счетчиков, то интервал углов и интервал импульсов, пропускаемых спектрометром, разобьются на  $n$  интервалов. При включении счетчиков на совпадения частицы разделятся так, что на плоскости  $\{\theta, \rho\}$  им будет соответствовать матрица из  $n^2$  небольших параллелограммов.

Недавно авторы работы [9] предложили при использовании мишени небольших размеров  $\pm \Delta z_0$  поместить в плоскости  $s=s_1$  вместо первой системы счетчиков квадрупольную линзу, повернутую вокруг оси пучка. В таком повернутом квадрупольном поле составляющая поля  $B_x$  в плоскости  $z=0$  пропорциональна  $x$  [см. выражение (3.69)]. Эта составляющая поля вызывает угловое разделение по  $z$  частиц с различными углами рассеяния, так как величина их смещения по оси  $x$  в этой точке зависит только от угла рассеяния. Следовательно, частицы с различными углами рассеяния фокусируются в плоскости счетчиков  $s=s_3$  при разных значениях  $z$ . Поэтому матрица из  $n \times m$  счетчиков, расположенная в этой плоскости, будет рассортировывать частицы в  $n$  различных ячеек по углу рассеяния  $\theta$  и одновременно в  $m$  различных ячеек, соответствующих  $m$  наклонным окнам на плоскости  $\{\theta, \rho\}$ . Таким образом, импульс и угол рассеяния снова определяются отдельно для каждой частицы.

Был исследован также вопрос о том, нельзя ли в спектрометре такого типа воспользоваться секступольными магнитами [21—23], чтобы уменьшить хроматические aberrации и тем самым повысить разрешение в плоскости счетчиков, перпендикулярной оси пучка<sup>2)</sup>. Расчетным путем было найдено, что с помощью двух довольно слабых секступолей, расположенных до отклоняющего магнита и после него, можно почти

<sup>1)</sup> P. Joos, G. Sommer, P. Stähelin, частное сообщение.

<sup>2)</sup> W. K. H. Rapofsky, частное сообщение; R. E. Taylor, частное сообщение.

полностью уничтожить хроматические aberrации по осям  $x$  и  $z$  в плоскости счетчиков, не увеличив при этом значительно других aberrаций.

## § 5. СПЕКТРОМЕТР С ИЗОБРАЖЕНИЕМ

Если размер мишени достаточно мал, то система счетчиков, расположенная в плоскости изображения  $s=s_2$  спектрометра с отклоняющим магнитом, будет непосредственно измерять усредненный спектр импульсов частиц в пределах угла захвата спектрометра  $\pm \Delta x'_0$ . Мы назовем такой спектрометр спектрометром с изображением и рассмотрим в данном параграфе его основные параметры и факторы, определяющие эти параметры.

Примем снова для произвольной траектории частицы уравнение (3.37), в котором учитываются хроматические aberrации до членов второго порядка малости. Рассмотрим плоскость изображения  $s=s_2$ , где для частицы с импульсом  $p=p_0$  имеем

$$S(s_2) = S_2 = 0.$$

Если изменение импульса равно  $\Delta p/p_0$ , то положение плоскости изображения  $s=s_1$  в продольном направлении меняется согласно выражению

$$S(s_1) + \frac{\Delta p}{p_0} \sigma(s_1) = 0. \quad (3.51)$$

Поперечная дисперсия при  $s=s_2$  равна

$$p_0 \frac{dx_i}{dp} = D_2. \quad (3.52)$$

Дифференцируя выражение (3.51) и подставляя  $\Delta p/p_0 = 0$ , получаем величину продольной дисперсии при  $s=s_2$

$$p_0 \frac{ds_1}{dp} = - \frac{\sigma_2}{S_2} = - \sigma_2 C_2. \quad (3.53)$$

Это означает, что линия изображений образует с осевой траекторией угол  $\psi$ , который определяется равенством [7]

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dx_i}{ds_1} = - \frac{D_2}{\sigma_2 C_2}. \quad (3.54)$$

Поскольку угол  $\psi$  обычно мал, систему счетчиков чаще всего располагают в плоскости  $s=s_1$  перпендикулярно осевой траектории.

Поперечное увеличение спектрометра равно

$$\frac{dx_2}{dx_0} = C_2. \quad (3.55)$$

Чтобы найти „продольное увеличение“ системы, возьмем на мишени точку, смещенную вдоль осевой траектории на бесконечно малую величину  $ds_0$ , и выразим синусообразную траекторию  $S^*$ , относящуюся к этой новой точке на мишени, через величины  $C$  и  $S$ , определенные при  $s=0$ . Мы получим

$$S^* = S - C ds_0.$$

Новое положение точечного изображения определяется условием  $S_i^* = 0$ , и, поскольку  $S_i = S_2' ds_2$ , имеем [7]

$$\frac{ds_2}{ds_0} = \frac{C_2}{S_2'} = C_2'. \quad (3.56)$$

Согласно уравнению (3.37), на точечный счетчик, расположенный в плоскости изображения и смещенный в поперечном направлении на величину  $x_2$ , будут попадать те частицы, которые удовлетворяют соотношению

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{x_2 - C_2 x_0}{D_2 + v_2 \frac{\Delta p}{p_0} + \tau_2 x_0 + \sigma_2 x_0'}.$$

Пренебрегая членами, содержащими  $x_0$  и  $x_0'$  во второй степени, это соотношение можно приближенно записать в виде

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx \frac{x_2}{D_2} \left( 1 - \frac{v_2}{D_2^2} x_2 \right) - \frac{1}{D_2} \left\{ \left( C_2 + \frac{\tau_2}{D_2} x_2 \right) x_0 + \left( \frac{\sigma_2}{D_2} x_2 \right) x_0' \right\}.$$

Поэтому разрешение по импульсам определяется конечным размером мишени  $\pm \Delta x_0$  и интервалом угла захвата  $\pm \Delta x_0'$  спектрометра. Относительный разброс по импульсу для точечного счетчика имеет вид

$$\frac{1}{p_0} \delta(p) = \frac{2}{|D_2|} \left\{ |C_2| \Delta x_0 + \left| \frac{\tau_2}{D_2} \right| |x_2| \Delta x_0 + \left| \frac{\sigma_2}{D_2} \right| |x_2| \Delta x_0' \right\}. \quad (3.57)$$

Первый член в правой части этого выражения обусловлен только конечными размерами мишени; последний член можно свести к нулю, если расположить счетчики вдоль линии изображений. Чтобы сделать первый член малым, нужно сделать большим отношение  $|D_2/C_2|$ . В соответствии с выражением (3.8) это отношение равно

$$\frac{D_2}{C_2} = 2 \sum_k \left( S_m \sin \frac{\Phi}{2} \right)_k,$$

где  $k$  — порядковый номер отклоняющего магнита, а  $S_m$  — амплитуда синусообразной траектории в его средней плоскости  $s = mR$ . Поэтому, чтобы обеспечить высокое разрешение по импульсу, магниты нужно поместить там, где амплитуда синусообразной траектории велика.

Рассмотрим численный пример. Из табл. 6 можно определить члены, которые вносят вклад в минимальный интервал импульсов (3.57), разрешаемый спектрометром, изображенным на фиг. 3.11 и работающим как спектрометр с изображением. При размере мишени 1 см мы получим для первого члена, который соответствует точечному счетчику на осевой траектории, величину

$$\frac{1}{p_0} \delta(p) = 4,5 \cdot 10^{-5}.$$

Если спектрометр должен пропускать полосу импульсов, полная относительная ширина которой равна, скажем, 8%, то выходные счетчики смещаются относительно осевой траектории на величину  $x_2 = (\Delta p/p_0)_{\text{макс}} D_2 = 6$  см, а второй и третий члены в выражении (3.57) равны  $1,9 \cdot 10^{-3}$  и  $1 \cdot 10^{-2}$ .

Пользуясь значениями, указанными в табл. 6, получим остальные характеристические параметры этого спектрометра:

Поперечное увеличение	$\frac{dx_2}{dx_0} = -0,68,$
Продольное увеличение	$\frac{ds_2}{ds_0} = 0,46,$
Поперечная дисперсия	$p_0 \frac{dx_i}{dp} = 1,53 \text{ м},$
Продольная дисперсия	$p_0 \frac{ds_i}{dp} = 7,4 \text{ м},$
Угол между линией изображений и осевой траекторией	$\text{tg } \psi = 0,208,$ т. е. $\psi = 11,7^\circ.$

## § 6. ПРИМЕРЫ СПЕКТРОМЕТРОВ С ИЗОБРАЖЕНИЕМ

В данном параграфе мы опишем три спектрометра с изображением, которые применяются в экспериментах с частицами высоких энергий и подробно разобраны в литературе.

Первый пример — это так называемый спектрометр с полукруговой фокусировкой [10—12]. Он симметричен относительно средней плоскости  $s = m$  и представляет собой синхротронный магнит, который отклоняет частицы на угол  $\theta = |l/\rho| = \pi$ . Сила градиентной фокусировки магнита



выбирается таким образом, чтобы обеспечить одинаковую фокусировку в направлении осей  $x$  и  $z$ . Согласно выражению (2.46), для этого должно выполняться равенство

$$K = k - \frac{1}{\rho^2} = -k,$$

т. е.

$$n = \rho^2 k = \frac{1}{2}.$$

При  $\varphi = l\sqrt{k} = \theta/\sqrt{2} = \pi/\sqrt{2}$  и  $\rho > 0$  расстояние  $d$  от мишени до входной границы магнита или от выходной границы до изображений в горизонтальной и вертикальной плоскостях определяется равенством

$$d = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \rho \sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 0,70\rho. \quad (3.58)$$

Полную матрицу преобразования от мишени до изображения, расположенного в точке  $s = s_2 = l + 2d$ , можно получить из выражения (2.46):

$$\begin{pmatrix} C_2 & S_2 \\ C_2' & S_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{k} \sin \varphi & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

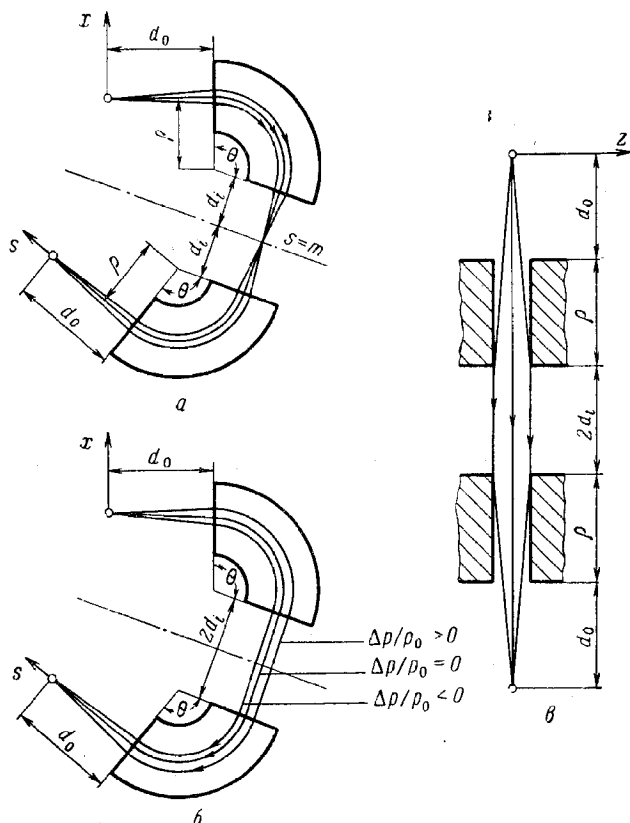
Вектор дисперсии равен

$$\begin{pmatrix} D_2 \\ D_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\rho \\ -\sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если изменение импульса равно, например, 1%, то расстояние между изображениями составляет 4% радиуса кривизны.

Второй спектрометр [1] схематически показан на фиг. 3.13. Он симметричен относительно средней плоскости  $s = m$  и состоит из двух 110-градусных синхротронных магнитов, которые создают изображение мишени по обоим направлениям в месте расположения счетчика. В плоскости отклонения (плоскость  $\{x, s\}$ ) спектрометра, изображенного на фиг. 3.13,  $a$ , в точке  $s = m$  образуется промежуточное изображение мишени. Здесь же помещается щель коллиматора для разделения по импульсу. Показатель неоднородности поля  $n = \rho^2 k = 0,27$  и расстояния  $d_0 = 1,25\rho$  и  $d_i = 0,95\rho$  выбраны так, чтобы дисперсия была равна нулю в месте расположения счетчика. Когда такой спектрометр работает со сгруппированным первичным пучком, подобным тому, который выходит из линейного ускорителя, он может служить также масс-сепаратором, если в непосред-

венной близости от щели коллиматора поместить СВЧ-дефлектор [13]. Дефлектор работает на высокой частоте синхронно с линейным ускорителем и отклоняет проходящие частицы в направлении оси  $z$  перпендикулярно отклоняющей плоскости

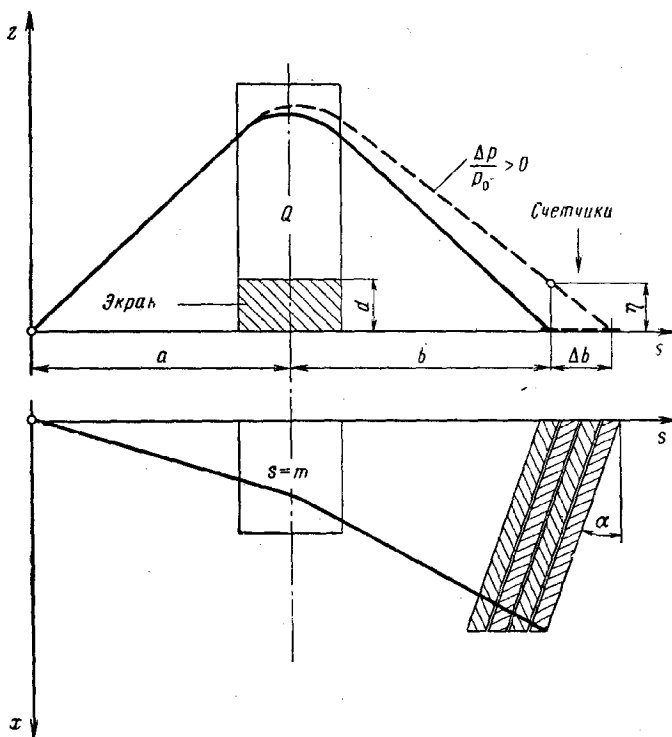


Фиг. 3.13. Спектрометр с нулевой дисперсией [1].

магнитов. Регулируя фазу, можно пропускать нужные частицы без отклонения, тогда как частицы с нежелательными скоростями будут отклоняться в направлении оси  $z$ , поскольку они будут входить в поле с запаздыванием или с опережением и изображение, создаваемое ими в плоскости счетчика, будет сдвинуто.

Третий спектрометр представляет собой просто квадруполь [14—16], а для разделения частиц по импульсам в нем

используется хроматическая aberrация, т. е. зависимость фокусного расстояния от импульса частиц. Он применяется только при малой высоте мишени  $\pm \Delta z_0$  и снабжен экраном для центрального пучка, который не пропускает к счетчикам частицы с  $|z_m| \leq d$ . Геометрия спектрометра схематически



Фиг. 3.14. Одиночный квадруполь в качестве спектрометра (схема).

показана на фиг. 3.14. Счетчики расположены в горизонтальной плоскости  $z=0$ ; в направлении оси  $z$  их ширина мала, а в направлении оси  $x$  они вытянуты, поскольку квадруполь рассеивает в горизонтальной плоскости. Горизонтальное смещение частицы в месте расположения счетчика зависит от ее угла рассеяния. Поэтому если счетчики повернуть на угол  $\alpha$  относительно вертикали, как показано на фиг. 3.14, то они будут регистрировать частицы, которым соответствует на-

клонное окно на плоскости  $\{\theta, \rho\}$ , а наклон окна можно менять, изменяя угол  $\alpha$ .

Чтобы представить себе требуемые размеры счетчика и достигаемое разрешение по импульсу, рассмотрим простой численный пример. В приближении тонкой линзы расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения связаны с оптической силой квадруполя соотношением

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

При  $a=b$ , т. е. при увеличении, равном единице, получим следующую зависимость между изменением расстояния от линзы до изображения и изменением импульса:

$$\frac{\Delta b}{b} = 2 \frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{\Delta p}{p_0}.$$

Например, если мы выберем  $a=b=2$  м, то изменение  $\Delta b$  будет равно 4 см на 1%. Минимальный наклон траектории при входе в счетчики определяется высотой  $d$  экрана для пучка и равен

$$|z'_{\text{мин}}| = \frac{d}{b}.$$

Следовательно, при  $d=10$  см и  $b=2$  м мы имеем  $|z'_{\text{мин}}| = 50$  мрад, и при разнице импульсов в 1% разделение  $\eta$  в месте расположения счетчиков достигает 2 мм (фиг. 3.14). Поэтому, если требуется разделение по импульсу порядка 1%, высота счетчика и высота мишени должны быть порядка 2 мм.

## § 7. УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Метод гибкого проводника с током — это очень распространенный метод проверки оптических параметров системы. Если тонкий гибкий проводник с током  $I$  подвешен с натяжением  $T$  в магнитном поле, то, как нетрудно убедиться, форма его описывается дифференциальным уравнением того же вида, что и траектория заряженной частицы, движущейся в поле с постоянной скоростью  $v$  [17, 18]. В самом деле сила, действующая со стороны магнитного поля на бесконечно малый элемент проводника длиной  $ds$ , равна

$$\mathbf{K}_1 ds = I \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{B} \right) ds$$

(здесь использованы обозначения, указанные на фиг. 2.1 и в гл. 2, § 4).

Если проводник находится в равновесии, то сила  $\mathbf{K}_1 ds$  должна быть скомпенсирована силой  $\mathbf{K}_2 ds$ , вызванной натяжением  $T$  проводника. Последняя определяется выражением

$$\mathbf{K}_2 ds = T \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} ds.$$

Предположим, что конец радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  движется вдоль гибкого проводника со скоростью  $v$ , т. е.  $d\mathbf{r}/ds = (1/v)(d\mathbf{r}/dt)$ . Тогда условие равновесия  $\mathbf{K}_2 = -\mathbf{K}_1$  можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{I}{T} v (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (3.60)$$

Сравнивая уравнение (3.60) с уравнением движения заряженной частицы (1.1)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{p} v (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}),$$

мы видим, что дифференциальные уравнения для проводника и для частицы с импульсом  $p$  идентичны при

$$\frac{p}{e} = -\frac{T}{I}. \quad (3.61)$$

При условии (3.61) форма гибкого проводника с током будет совпадать с траекторией заряженной частицы при соответствующих начальных условиях, если проводник находится в устойчивом равновесии (см. ниже). Знак минус в равенстве (3.61) указывает, что направление тока в проводнике — техническое, т. е. совпадает с направлением положительно заряженной частицы, движущейся вдоль той же траектории. Мы назовем величину

$$P = -\frac{eT}{I} \quad (3.62)$$

эквивалентным импульсом проводника.

Переходя к вопросу об устойчивости проводника, предположим, что его длина равна  $s_e - s_i$  и что он подвешен между двумя точками  $s_i$  и  $s_e$ . Пусть проводник закреплен в точке  $s_i$ , а в точке  $s_e$  переброшен через поворотный блок, силой трения в котором можно пренебречь. Проводник натягивается грузом определенного веса, прикрепленным к свободному концу. Тогда в криволинейной системе координат, связанной с проводником, траектории, которые выходят из той же самой на-

чальной точки, что и осевая, имеют вид <sup>1)</sup>

$$y = y'_i S + \frac{\Delta p}{\rho_0} D.$$

Это уравнение показывает, что при данном отклонении импульса существует лишь одна траектория, которая также проходит через вторую опорную точку  $s_e$ , если только  $s_e$  не является изображением  $s_i$ . Начальный наклон этой траектории равен

$$y'_i = - \frac{\Delta p}{\rho_0} \frac{D_e}{S_e}.$$

Следовательно, при изменении  $\Delta p/\rho_0$  однопараметрическое семейство траекторий, проходящих через  $s_i$  и  $s_e$ , определяется равенством

$$y = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left( D - \frac{D_e}{S_e} S \right). \quad (3.63)$$

Согласно выражению (3.63), длина траектории, принадлежащей данному семейству, отличается от длины осевой траектории на величину [19]

$$\Delta l = - \int_{s_i}^{s_e} \frac{1}{\rho} y ds = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left( \frac{D_e}{S_e} \int_{s_i}^{s_e} \frac{1}{\rho} S ds - \int_{s_i}^{s_e} \frac{1}{\rho} D ds \right). \quad (3.64)$$

При  $C_e \neq 0$  первый интеграл в правой части можно преобразовать с помощью выражения (2.21), и, мы получим

$$\rho_0 \frac{\Delta l}{\Delta p} = \frac{D_e^2}{S_e C_e} + \frac{D_e}{C_e} \int_{s_i}^{s_e} \frac{1}{\rho} C ds - \int_{s_i}^{s_e} \frac{1}{\rho} D ds. \quad (3.64a)$$

Выражение (3.64a) показывает, что длина всех траекторий, проходящих через  $s_i$  и  $s_e$ , отличается от длины осевой траектории на величину  $\Delta l$ , пропорциональную соответствующему изменению импульса  $\Delta p$ . Предположим, что эквивалентный импульс проводника  $P$ , определяющийся равенством (3.62), также зависит от длины проводника. В принципе этого можно добиться, снабдив блок возвратной пружиной [19, 20] или изменяя ток через проводник в соответствии с угловым поло-

<sup>1)</sup> Поскольку проводник совпадает по форме с траекторией, автор обозначает их длину одинаково и в изложении не всегда делает различие между ними. — *Прим. ред.*

жением блока. Тогда при небольшом увеличении длины проводника на  $\Delta l$  он переходит из начального положения с эквивалентным импульсом  $P_0$ , соответствующего осевой траектории частицы с импульсом  $p_0$ , в другое, близкое положение с эквивалентным импульсом  $P_0 + \Delta P$ , которое соответствует траектории частицы с импульсом  $p = p_0 + \Delta p$ . Что касается устойчивости проводника, то теперь мы можем рассматривать следующие случаи. При  $\Delta P > \Delta p$  натяжение проводника превышает величину, необходимую при новой конфигурации, и груз будет тянуть проводник обратно в начальное положение, т. е. оно будет устойчивым. При  $\Delta P < \Delta p$  натяжение проводника меньше требуемого, и он будет больше отклоняться от начального положения, т. е. положение будет неустойчивым. В предельном случае  $\Delta P = \Delta p$  проводник находится в состоянии безразличного равновесия в любом положении. Рассуждая подобным же образом в случае отрицательного  $\Delta l$ , мы видим, что начальная конфигурация проводника устойчива, когда  $\Delta p / \Delta l < \Delta P / \Delta l$ , т. е. при

$$\frac{dp}{dl} + \frac{d}{dl} \left( \frac{eT}{l} \right) < 0. \quad (3.65)$$

В самом простом устройстве с гибким проводником эквивалентный импульс проводника  $P$  это константа, не зависящая от длины. Тогда второе слагаемое в левой части неравенства (3.65) равно нулю, и проводник находится в состоянии устойчивого равновесия, если импульс уменьшается при увеличении длины. Это соответствует случаю, когда между конечными точками  $s_i$  и  $s_e$  не находится изображение опорной точки  $s_i$ . Обозначив первое изображение начальной опорной точки через  $s_2$ , мы тогда можем показать [19], что при переходе от  $s_e < s_2$  к  $s_e > s_2$  проводник переходит из устойчивого состояния в неустойчивое. В окрестности точки изображения амплитуда синусообразной траектории мала, и поэтому первый член в правой части выражения (3.64а) становится преобладающим. Пренебрегая другими двумя членами, мы можем написать

$$\frac{dp}{dl} = p_0 \frac{S_e C_e}{D_e^2}. \quad (3.66)$$

Тогда при  $S_2' < 0$  имеем  $C_2 < 0$ , так как  $C_2 S_2' = 1$ . Следовательно, правая часть равенства (3.66) отрицательна при  $s_e < s_2$  и положительна при  $s_e > s_2$ , что указывает на устойчивость в первом случае и неустойчивость во втором.

## § 8. ЮСТИРОВКА ПУЧКА И ДОПУСКИ

В первой части данного параграфа мы кратко изложим требования к юстировке магнитов и стабильности поля в оптических системах, транспортирующих пучок. Для этого мы рассмотрим по отдельности влияние различных ошибок юстировки и отклонения поля от расчетного и дадим некоторые простые численные оценки допусков, характерных для тщательно отъюстированной и стабилизированной системы. Затем во второй части мы укажем некоторые полезные методы юстировки пучка.

### Ошибка в силе квадрупольной линзы

Формулы для расчета влияния ошибок в фокусирующих силах квадрупольных линз можно получить совершенно аналогично тому, как были найдены выражения для хроматической аберрации в гл. 1, § 10 и 13. Если сила  $i$ -го квадрупольного элемента отличается от расчетной силы  $k_i$  коэффициентом  $(1 + \varepsilon_i)$ , то аналогично выражению (1.56) находим, что траектория  $[y(s) + \gamma(s)]$  отклоняется от расчетной траектории  $y(s)$  на величину

$$\gamma(s) = \pm \left[ C(s) \sum_i \varepsilon_i \int_i k_i S y d\sigma - S(s) \sum_i \varepsilon_i \int_i k_i C y d\sigma \right]. \quad (3.67)$$

Суммирование здесь производится по всем квадрупольным, расположенным до точки  $s$ .

В плоскости изображения  $s = s_2$  величина этого отклонения от расчетной траектории  $y = y'_0 S$  равна

$$\gamma(s_2) = \pm C(s_2) \sum_i \varepsilon_i \int_i \frac{1}{\rho(y)} S d\sigma, \quad (3.68)$$

где  $1/\rho(y) = ky$  — отклоняющая сила, которая действует на частицу, движущуюся по этой траектории. Из выражения (3.68) видно, что в плоскости изображения относительная ошибка в силе линзы  $\varepsilon_i$  приводит к отклонению траектории, которое пропорционально  $\varepsilon_i$  и отклоняющей силе, умноженной на амплитуду синусообразной траектории в линзе.

Если принять, что распределение поля в квадрупольной линзе можно сделать линейным с точностью до  $10^{-3}$ , то разумно поддерживать ту же самую точность в возбуждении квадруполья, т. е.

$$\varepsilon_i \leq 10^{-3}.$$



### Поворот квадрупольной линзы

Если квадрупольная линза, сила которой равна  $k$ , повернута вокруг оси пучка на угол  $\alpha$  по отношению к ее идеальной ориентации, то поле такой линзы можно рассматривать как суперпозицию полей повернутой квадрупольной линзы с силой  $k \cos 2\alpha$  и повернутой на  $45^\circ$  линзы, сила которой равна  $k \sin 2\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} B_z \\ B_x \end{pmatrix} = g \cos 2\alpha \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + g \sin 2\alpha \begin{pmatrix} -z \\ x \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Это соотношение легко получается из выражений (1.48); из него следует, что при малых  $\alpha$  сила повернутой линзы остается практически неизменной, но к ней добавляется сила повернутой на  $45^\circ$  квадрупольной линзы, приблизительно равная  $2k\alpha$ .

Согласно уравнениям (1.3), линейные уравнения траектории частицы, движущейся в повернутом на  $45^\circ$  поле, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} z'' + kx \sin 2\alpha &= 0, \\ x'' + kz \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Следовательно, в таком поле создается связь между  $z$  и  $x$ , и линейное преобразование нельзя записать отдельно для каждой проекции.

Потребовав снова, чтобы относительная сила повернутой на  $45^\circ$  линзы была меньше  $10^{-3}$ , получим верхний предел для угла поворота:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

### Поперечное смещение квадрупольной линзы

Если квадрупольная линза смещена по оси  $x$  на величину  $a$  в отрицательном направлении, то поле на осевой траектории не равно нулю. Это поле вызывает дисперсию и отклонение пучка. Но дисперсией можно пренебречь по сравнению с хроматической aberrацией линзы, когда  $a$  значительно меньше полуширины пучка  $b$ . Покажем это, сравнив оба эффекта в плоскости изображения  $s = s_2$  отдельного квадруполя. Влияние дисперсии можно оценить, пользуясь выражением (2.21):

$$\frac{\Delta p}{p_0} D(s_2) = \frac{\Delta p}{p_0} C(s_2) \int \frac{1}{\rho_a} S d\sigma,$$

где  $1/\rho_a \approx ka$  — значение отклоняющей силы на осевой траектории. В то же время хроматическая aberrация для траек-

тории  $x(s) = x'_{0(\text{макс})} S(s)$ , согласно выражению (1.36), равна

$$\eta(s_2) = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} C(s_2) \int \frac{1}{\rho_b} S d\sigma,$$

где  $1/\rho_b = kb$  — величина отклоняющей силы на траектории  $x(s)$ . Из сравнения этих двух выражений видно, что дисперсией можно пренебречь, когда  $a \ll b$ .

Отклонение пучка, вызванное поперечным смещением  $a$  квадруполя, — более значительный эффект. Смещение пучка  $d$  в фокальной плоскости, связанное с отклонением, равно смещению  $a$ , так как угол отклонения равен  $akl$ , а фокусное расстояние в приближении тонкой линзы равно  $1/kl$ . Следовательно, если нам нужно, чтобы  $d$  было меньше, скажем 0,1 мм, то мы должны потребовать выполнения условия

$$a \leq 0,1 \text{ мм.}$$

### Ошибка в силе отклоняющего магнита

При малых относительных ошибках  $\varepsilon_i$  в силах отклоняющих магнитов соответствующее относительное изменение дисперсии также равно  $\varepsilon_i$ , и, вообще говоря, им можно пренебречь. Верхний предел для возможного относительного изменения угла отклонения можно получить, потребовав, например, чтобы на расстоянии 10 м смещение пучка при максимальном угле отклонения было меньше 1 мм. Предположив, что этот максимальный угол порядка 1 рад, получим

$$\varepsilon_i \leq 10^{-4}.$$

Если сравнить этот результат с требуемой точностью в возбуждении квадруполя, то оказывается, что стабильность питания отклоняющих магнитов должна быть намного больше, чем стабильность питания квадруполей.

### Поворот отклоняющего магнита

Если магнит с однородным полем, отклоняющая сила которого в направлении оси  $x$  равна  $1/\rho$ , повернут вокруг продольной оси на угол  $\alpha$  по отношению к идеальной ориентации, то в направлении оси  $z$  появляется отклоняющая сила, равная  $-1/\rho \sin \alpha$ . Чтобы при этом угол отклонения в направлении оси  $z$  не превышал  $10^{-4}$  рад, должно выполняться требование

$$\alpha \leq 10^{-1} \text{ рад.}$$

Для обеспечения указанных выше допусков необходима юстировочная система, которая позволяла бы устанавливать ось квадруполя в заданном положении с точностью до 0,1 мм на обоих его концах, а плоскость симметрии магнита устанавливать горизонтально с точностью до 1 мрад. Если к полюсам магнита имеется свободный доступ, то юстировку можно осуществить, например, геометрическим путем, поместив в апертуру точные шаблоны с нанесенными на них отметками для оптической юстировки. Если же полюсы находятся внутри вакуумной камеры, которую трудно разбирать, то юстировку приходится проводить, контролируя непосредственно поле.

Для этой цели можно воспользоваться изящным оптическим методом [24], который позволяет визуализировать нулевую ось поля. Он основан на так называемом эффекте Коттона—Мутона. В этом методе применяется световой луч, направленный на пару скрещенных поляризационных фильтров, между которыми находится сосуд длиной несколько сантиметров с коллоидным раствором окиси железа. Это устройство помещают в апертуру квадрупольной линзы и поляризаторы настраивают так, чтобы свет не проходил, когда поле равно нулю. Если же поле отлично от нуля, появляется тонкий темный крест на красноватом фоне. Центр креста указывает положение оси поля с точностью не ниже 0,05 мм. Поскольку угловая ориентация креста зависит только от ориентации поляризаторов, им нельзя пользоваться для определения плоскости симметрии поля, и, следовательно, для этого требуется дополнительное устройство<sup>1)</sup>.

Апертуры магнитов часто бывают загорожены оборудованием и экранами, что затрудняет установку в них приспособлений для юстировки пучка. Поэтому желательно предусмотреть сверху на каждом магните юстировочную плоскость, параллельную плоскости симметрии магнита, и пару оптических юстировочных меток, точно связанных с осью поля. Тогда, пользуясь обычной измерительной техникой, можно юстировать магнит с точностью порядка  $\pm 0,1$  мм. Точные регулировочные приспособления на станине магнита должны быть такими, чтобы они могли работать под нагрузкой. В случае тяжелых магнитов для облегчения этой задачи можно применить простую гидравлическую систему, которая снимала бы часть весовой нагрузки во время юстировки.

Характеристики оптической системы для транспортировки пучка можно экспериментально исследовать с точностью по-

<sup>1)</sup> L. G. Rabner, частное сообщение.

рядка 0,5% методом гибкого проводника с током (см. предыдущий параграф). Но существует и другой экспериментальный метод [25, 26], которым можно пользоваться, когда в системе имеется вакуумная камера. При таком методе в месте расположения мишени помещают тонкий источник  $\alpha$ -частиц  $\text{Po}^{210}$ . С помощью тонких регулируемых коллиматорных пластин вырезаются пучки  $\alpha$ -частиц (их импульс равен 197,6 Мэв/с), которые проходят через нужную часть апертуры. Эти частицы можно зарегистрировать, например, сцинтилляционными счетчиками, расположенными в различных точках системы. Указанный метод особенно удобен для определения фазового объема, пропускаемого системой (гл. 4, § 2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Alvarez R. A., Brown K. L., Panofsky W. K. H., Rockholt C. T., Rev. Sci. Instr., **31**, 556 (1960).
2. Johnson K., CERN PS/KJ 29, Geneva (1955).
3. Lichtenberg A. J., CEA-22, Cambridge (1957).
4. Steffen K. G., CEA-56, Cambridge (1958).
5. de Raad B., CERN AR/Int. GS/62-5, Geneva (1962).
6. Kern W., Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.72, Hamburg (1961).
7. Streib J. F., HEPL 104, Stanford University (1960).
8. Kern W., Steffen K. G., DESY E3 4, 5-Nr. 6, Hamburg (1962).
9. Panofsky W. K. H., Coward D., SLAC-TN-64-39, Stanford (1964).
10. Judd D. L., Rev. Sci. Instr., **21**, 213 (1950).
11. Judd D. L., Bludman S. A., Nucl. Instr., **1**, 46 (1956).
12. Chambers E. E., Hofstadter R., в книге CERN Symposium 1956, Vol. 2, CERN, 1956.
13. Panofsky W. K. H., в книге International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, 1959, p. 428.
14. Wilson R. R., Nature, **188**, 94 (1960).
15. Schopper H. F., Internal Report, Cornell University, 1961.
16. Galster S., Hartwig G., Kernforschungszentrum Karlsruhe KFK 113, 127, 1962.
17. Loeb J., Compt. Rend., **222**, 488 (1946); L'Onde Electrique, **27**, 27 (1947).
18. Carlile R. N., HEPL 33, Stanford University (1957).
19. Bounin P., Milman B., Rev. Sci. Instr., **34**, 1448 (1963). [См. перевод: Приборы для научных исследований, № 12, 150 (1963).]
20. Citron A., Farley F. J. M., Michaelis E. G., Overas H., CERN 59-8, Geneva (1959).
21. van der Meer S., CERN 60-22, Geneva (1960).
22. Marcowitz S., ANL/PAD Internal Report SM-5, Argonne (1961).
23. King N. M., CERN MPS/EP-26, Geneva (1962).
24. Gouiran R., CERN MPS/Int. AL 62-4, Geneva (1962).
25. Sacerdoti G., Tau L., LNF-62/19, Internal Note No. 123, Frascati (1962).
26. Behrend H. J., DESY F 21-1, Hamburg (1964).
27. Bizot J. C., Buon J. M., Lefrancois J., Pezer y Jorba J., Roy Ph., Phys. Rev., Letters, **11**, 480 (1963).
- 28\*. Penner S., Rev. Sci. Instr., **32**, 150 (1961). [См. перевод: Приборы для научных исследований, № 2, 45 (1961).]

## Оптика огибающих и пучки частиц

### § 1. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

В предыдущих главах мы описывали фокусирующие и диспергирующие свойства магнитных систем, рассматривая ход траекторий отдельных частиц. Но существует другой способ описания оптических свойств системы, который особенно важен и полезен для согласования и оптимизации пучков. При таком методе используется определенная характеристика магнитной системы, называемая ее «пропускной способностью». Пропускная способность системы представляет собой область начальных значений координат и импульсов частиц, или фазовый объем пучка, который может быть пропущен системой при ее апертуре и фокусирующей и отклоняющей силе. Другое важное понятие, которое мы введем и которым будем пользоваться, это понятие огибающих пучка, характеризующее физические границы фазового объема.

Эти понятия основаны на том, что всякий пучок состоит из многих частиц, движущихся по траекториям, которые проходят вблизи осевой траектории. Вместо того чтобы рассматривать отдельные частицы с дискретными начальными условиями  $\{z_0, z'_0, x_0, x'_0, \Delta p/p_0\}$ , которыми определяются их траектории, мы допустим, что эти начальные значения непрерывно меняются в каких-то пределах. Таким образом, частицы будут заполнять некоторый объем в пятимерном пространстве переменных  $z_0, z'_0, x_0, x'_0, \Delta p/p_0$ , и поверхность этого объема будет определять границы пучка. Интенсивность пучка в каждой точке фазового объема мы будем характеризовать плотностью частиц.

При переходе от точки  $s=0$  к любой другой точке данной системы фазовый объем меняется в соответствии с оптическим преобразованием пучка. При таком преобразовании плотность частиц в фазовом объеме подчиняется фундаментальному закону, известному под названием теоремы Лиувилля<sup>1)</sup>. Чтобы сформулировать и доказать эту теорему<sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup> См., например, [30, 31]. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> В. Rossi, частное сообщение.

мы введем шестимерное пространство, координатами которого будут координаты  $z, x, s$  и составляющие импульса  $p_z, p_x, p_s$ <sup>1)</sup>, и запишем число частиц в бесконечно малом фазовом объеме следующим образом:

$$f(z, x, s, p_z, p_x, p_s, t) dz dx ds dp_z dp_x dp_s = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p},$$

где  $f$  — плотность частиц. Применительно к движению частицы в фазовом пространстве теорема Лиувилля утверждает следующее: если частицы движутся во внешнем магнитном поле или в любом внешнем поле, в котором силы не зависят от скорости, то в окрестности любой частицы плотность частиц в фазовом пространстве постоянна.

Для доказательства этой теоремы введем вектор тока частиц

$$\{f\dot{z}, f\dot{x}, f\dot{s}, f\dot{p}_z, f\dot{p}_x, f\dot{p}_s\}.$$

Поскольку число частиц постоянно, мы имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial t} &= \operatorname{div} (f\dot{\mathbf{r}}) + \operatorname{div}_p (f\dot{\mathbf{p}}) = \\ &= (\operatorname{grad} f, \dot{\mathbf{r}}) + f \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} + (\operatorname{grad}_p f, \dot{\mathbf{p}}) + f \operatorname{div}_p \dot{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Индекс  $p$  в  $\operatorname{div}_p$  и  $\operatorname{grad}_p$  означает дифференцирование по импульсам. Так как вектор скорости частицы

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}}$$

зависит только от импульсов и не зависит от пространственных координат, можно написать

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Кроме того, поскольку мы предположили, что силы  $\dot{\mathbf{p}}$  не зависят от скорости, мы имеем также

$$\operatorname{div}_p \dot{\mathbf{p}} = 0.$$

В результате из уравнения (4.1) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f, \dot{\mathbf{r}}) + (\operatorname{grad}_p f, \dot{\mathbf{p}}) = \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, действительно, плотность частиц в окрестности рассматриваемой частицы не меняется со временем.

<sup>1)</sup> Последние являются обобщенными импульсами (без учета магнитного поля), и для краткости в дальнейшем мы будем называть их «импульсами». — *Прим. ред.*

В магнитном поле сила Лоренца

$$\dot{\mathbf{p}} = e [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}]$$

зависит от скорости, и, следовательно, мы должны доказать, что  $\operatorname{div}_p[\mathbf{r} \times \mathbf{B}]$  тем не менее равна нулю. Запишем выражение для дивергенции следующим образом:

$$\operatorname{div}_p[\mathbf{r} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B}, \operatorname{rot}_p \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \operatorname{rot}_p \mathbf{B}).$$

Очевидно, что второй член в правой части равен нулю, так как  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(z, x, s, t)$  не зависит от импульсов. Что касается первого члена, то рассмотрим, например, в декартовой системе координат  $z$ -составляющую  $\operatorname{rot}_p \dot{\mathbf{r}}$ , которая имеет вид

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial p_x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_s}.$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{cp_s}{\sqrt{p_z^2 + p_x^2 + p_s^2 + m_0^2 c^2}} = -\frac{cp_s p_x}{(p^2 + m_0^2 c^2)^{3/2}} = -\frac{\partial \dot{x}}{\partial p_s}.$$

Другие составляющие  $\operatorname{rot}_p \dot{\mathbf{r}}$  также равны нулю. Тем самым доказана справедливость теоремы Лиувилля и при наличии магнитных полей.

Из теоремы Лиувилля следует, что фазовый объем совокупности частиц остается постоянным по величине, хотя форма его, вообще говоря, меняется. Если смещение частицы в одном направлении, например в направлении оси  $z$ , не зависит от других координат, то теорема Лиувилля справедлива отдельно для фазовой плоскости  $(z, p_z)$ , ибо в таком случае плотность частиц можно представить как произведение  $f_z f_{x,s}$ , причем  $df_z/dt = df_{x,s}/dt = 0$ . В параксиальной оптике заряженных частиц, в рамках которой мы ведем изложение в данной книге, в линейном приближении мы имеем для каждой частицы  $p_s = mv = \text{const}$ . В этом случае для систем с эквипотенциальной плоскостью симметрии  $z \equiv 0$  движение частицы в направлении каждой из осей  $z$ ,  $x$  и  $s$  можно считать независимым. Так как  $p_y = p_s y' = \text{const} \cdot y'$ , мы получаем, что при оптическом преобразовании площадь, занимаемая представляющими точками частиц пучка на фазовой плоскости  $\{y, y'\}$ , не меняется по величине. Эта инвариантность двумерного фазового объема находит свое выражение в том, что определитель матрицы преобразования всегда равен единице.

Взаимосвязи между двумерными фазовыми объемами в плоскостях  $\{z, z'\}$  и  $\{x, x'\}$  можно добиться, если отказаться от условий симметрии поля (1.40) и ввести, например, квадрату-

поли, повернутые на  $45^\circ$  вокруг своей оси [1] [см. уравнения (3.70)]. Для этой цели можно также воспользоваться отклоняющими магнитами типа показанного на фиг. 2.3, г.

## § 2. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ

В оптической системе, состоящей из мишени, магнитов, коллиматоров и счетчиков, каждый из ее элементов может ограничивать эффективную апертуру. Поэтому очень важно знать, какие траектории пройдут через эффективную апертуру, а какие — нет. В спектрометре, например, это необходимо для того, чтобы можно было установить связь между скоростью счета и эффективным сечением наблюдаемой реакции. В общем случае довольно сложно определить форму и величину фазового объема, содержащего все представляющие точки частиц, которые пройдут через систему. Так, если мы хотим полностью использовать круглую или крестообразную апертуру квадруполей, показанных на фиг. 1.19, то апертурные ограничения нельзя рассматривать отдельно для каждой из поперечных координат и границы фазового объема, например на плоскости  $\{z, z'\}$ , будут зависеть от величин  $x$  и  $x'$ .

Во всех случаях, кроме простейших, фазовый объем, пропускаемый системой, можно рассчитать с необходимой точностью лишь методом Монте-Карло [2]<sup>1)</sup> (на цифровой вычислительной машине), при котором берется большое число пробных траекторий и затем вычисляется пропускаемый объем. Со значительно меньшей эффективностью граничные траектории, соответствующие поверхностным точкам фазового объема, можно найти с помощью аналоговой вычислительной машины типа описанной в гл. 1, § 9, и гл. 2, § 11. При этом апертурные ограничения можно задавать с помощью компараторов напряжения, которые дают выходной сигнал, когда величины  $|z|$  или  $|x|$  в случае прямоугольных границ апертуры,  $\sqrt{z^2 + x^2}$  в случае круглой апертуры и  $|zx|$  в случае гиперболических границ превысят заданное значение. Фазовый же объем по-прежнему приходится находить численными методами.

Задача сильно упрощается, если границы апертур в системе зависят только от одной из переменных  $z$  и  $x$ , т. е. если апертуры имеют прямоугольную форму. Тогда границы фазового объема в координатах  $z$  и  $z'$  не зависят от величин  $x$

<sup>1)</sup> А также Е. В а з а г, частное сообщение.



и  $x'$ , и наоборот. Следовательно, при данном импульсе фазовый объем можно характеризовать пропускными способностями в каждой из фазовых плоскостей  $\{z, z'\}$  и  $\{x, x'\}$  отдельно. Эти пропускные способности можно определить отдельно для каждого элемента, ограничивающего апертуру, и затем преобразовать к общей точке  $s=s_0$  в начале системы путем преобразования, обратного линейному преобразованию между плоскостью  $s=s_0$  и плоскостью, в которой расположена ограничивающая апертура рассматриваемого элемента. Тогда пропускная способность (в каждой из фазовых плоскостей) для всей системы при  $s=s_0$  будет определяться областью, в которой пропускные способности отдельных элементов перекрываются. Размер и форма этой области, естественно, будут меняться при изменении импульса.

### § 3. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ ОДИНОЧНОГО МАГНИТА

На фиг. 4.1 представлена пропускная способность в фазовой плоскости  $\{x, x'\}$  синхротронного магнита длиной  $l$  с постоянной шириной апертуры  $a$ , отнесенная к средней плоскости магнита  $s=m$ , для случаев фокусировки и дефокусировки [3]. Она представляет собой максимальную площадь, расположенную между прямыми  $x=-a/2$  и  $x=a/2$  при эллиптическом или гиперболическом преобразовании фазовой плоскости, описанном в гл. 1, § 7. Квадруполью здесь соответствует частный случай  $K=k$ , а секторному магниту — случай  $K=-1/\rho^2$ . При  $K=0$  получаем пропускную способность параллельной свободной от поля коллиматорной щели длиной  $l$  и шириной  $a$ , также показанную на фиг. 4.1. Зависимость от импульса учитывается в величине угла  $\varphi$ , так как величины  $k$  и  $1/\rho$  обратно пропорциональны  $1/\rho$  [см. уравнения (2.52a)].

Согласно фиг. 4.1, величина  $F$  пропускной способности дается выражением

$$F_{\text{фок}} = \begin{cases} \frac{a^2}{l} \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\varphi}{2} + \text{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) & \text{при } \varphi \leq \pi, \\ \frac{a^2}{l} \frac{\pi}{4} \varphi & \text{при } \varphi \geq \pi \end{cases}$$

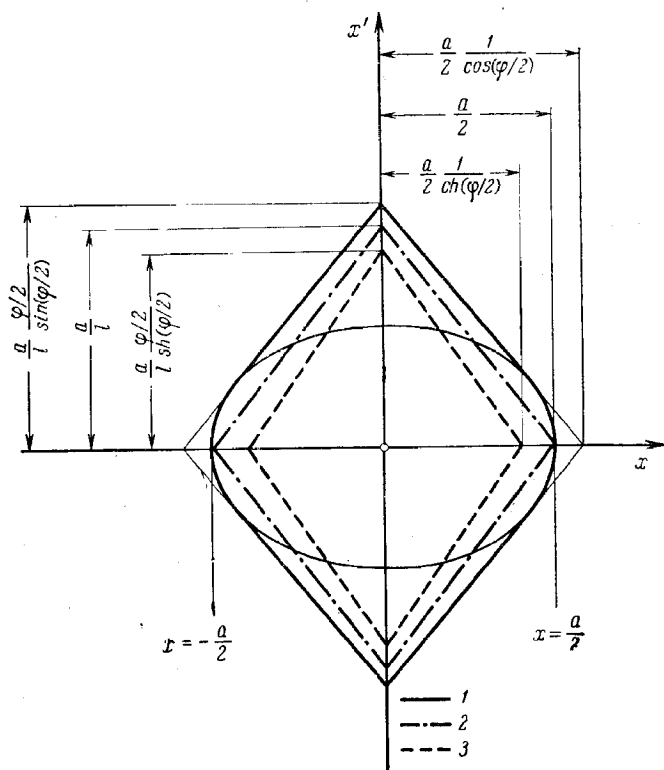
для фокусирующего синхротронного магнита ( $K < 0$ ), выражением

$$F_0 = \frac{a^2}{l}$$

для коллиматорной щели ( $K = 0$ ) и выражением

$$F_{\text{дефок}} = \frac{a^2}{l} \frac{\psi}{\text{sh } \psi}$$

для дефокусирующего синхротронного магнита ( $K > 0$ ).



Фиг. 4.1. Пропускная способность синхротронного магнита и коллиматорной щели.

Сплошная кривая — синхротронный магнит, фокусировка ( $K < 0$ ); штриховая — синхротронный магнит, дефокусировка ( $K > 0$ ); штрих-пунктирная — коллиматорная щель ( $K = 0$ );  $\psi = l \sqrt{K}$ ;  $K = k - 1/\rho^2$ .

Таким образом, полная пропускная способность квадрупольного поля с квадратной апертурой при данном импульсе и  $\psi \ll \pi$  равна

$$F_z F_x = \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 \psi^2 \frac{\psi/2 + \text{ctg } (\psi/2)}{2 \text{sh } \psi} = \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{7}{720} \psi^4 + O(6)\right].$$

При  $\varphi < 1$  эта величина очень близка к значению  $(a^2/l)^2$  для коллиматора с квадратной апертурой.

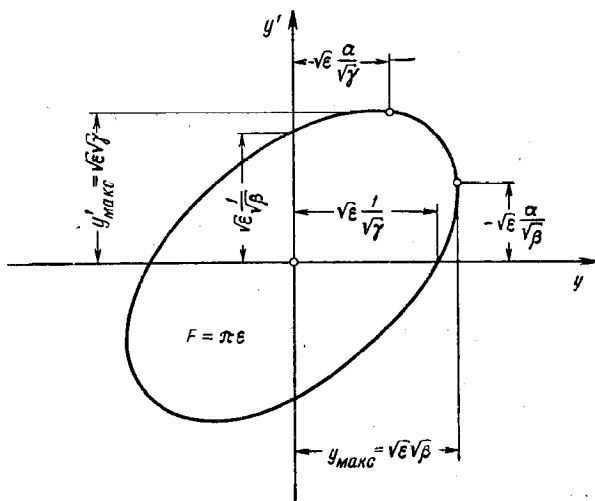
#### § 4. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФАЗОВОГО ЭЛЛИПСА ПУЧКА

В принципе пропускную способность любой оптической системы с симметричной прямоугольной эффективной апертурой можно определить непосредственно методом, описанным в конце § 2, вычислив пропускную способность одиночного магнита так, как указано в § 3. Но на практике такие расчеты сложных систем весьма утомительны и создают необходимость в упрощенном методе, который позволял бы быстро оценивать пропускную способность приближенно. Такой метод был бы особенно полезным на стадии предварительного расчета системы.

Один из возможных вариантов — находить вместо полной пропускной способности в фазовой плоскости площадь максимального параллелограмма, вписанного в соответствующую фигуру. Такой параллелограмм, как и сама фигура, симметричен относительно начала координат фазовой плоскости  $y=y'=0$ , и его можно описывать посредством двух траекторий, проходящих через две любые соседние вершины. При преобразовании в оптической системе параллелограмма на фазовой плоскости максимальное отклонение от осевой траектории всегда соответствует одной из двух «крайних траекторий», и та из них, которая дальше отходит от оси, представляет собой «огibaющую» семейства траекторий, проходящих через параллелограмм. Наклон «огibaющей» меняется скачком в точках, где амплитуды обеих траекторий одинаковы и происходит смена «крайней» траектории. Максимальный параллелограмм можно найти, изменяя начальные условия крайних траекторий и следя при этом, чтобы огibaющая не выходила за апертуру системы.

Недостаток параллелограмма — наличие острых углов, в которых заключена только небольшая часть площади на фазовой плоскости, что приводит к нерациональному использованию апертуры в определенных местах системы. Полная пропускная способность сложной системы в фазовой плоскости, вообще говоря, больше похожа на многоугольник. На практике во многих случаях такой многоугольник может быть значительно лучше аппроксимирован не параллелограммом, а эллипсом. К тому же эллипс на фазовой плоскости, симметричный относительно начала координат  $y=y'=0$ , можно опи-

сывать с помощью трех параметров вместо четырех, требуемых для описания параллелограмма. При прохождении через систему эллиптическая форма сохраняется, и при изменении  $s$  огибающая будет плавно переходить от одной граничной траектории к другой. Поэтому наклон огибающей не будет иметь скачков. В последующем мы будем пользоваться по-



Фиг. 4.2. Эллипс пучка.

Размеры выражены через амплитудную функцию  $\beta$ .

нятием эллипса на фазовой плоскости [4, 5], которое позволит нам сформулировать проблемы «акцептанса» в удобной форме.

Фазовый эллипс показан на фиг. 4.2. Если записать его уравнение в виде

$$\gamma y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 = \epsilon, \tag{4.3}$$

где

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1,$$

то величина  $\epsilon$  равна площади эллипса  $F$ , деленной на  $\pi$ :

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} F. \tag{4.4}$$

Можно считать, что эллипс характеризует либо пропускную способность оптической системы, либо семейство траекторий,

образующих «пучок». В первом случае он называется эллипсом пропускной способности системы с *аксептансом*  $\varepsilon$ , а во втором — эллипсом пучка с *эмиттансом*  $\varepsilon$ .

При преобразовании эллипса пучка системой *огibaющая пучка* дается выражением

$$y_{\max} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta}. \quad (4.5)$$

Коэффициент  $\beta$  называется *амплитудной функцией*. Эта функция  $\beta = \beta(s, \beta_0, \alpha_0, \varepsilon)$  зависит от  $s$  и от начальных значений параметров эллипса  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  и  $\varepsilon$ . Она представляет собой [6] обобщенную амплитудную функцию, которой пользуются в теории ускорителей [7], где при периодических граничных условиях она зависит только от  $s$ . Максимальное угловое отклонение в пучке равно

$$y'_{\max} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\gamma} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{\beta}}. \quad (4.6)$$

В точке  $s = s_i$ , где  $\alpha(s_i) = 0$ , оси эллипса совпадают с осями  $y$  и  $y'$  и *огibaющая пучка* имеет экстремум. Если точка  $s_i$  находится в фокусирующем магните, то этот экстремум — либо максимум, либо минимум, тогда как в соответствующей точке  $s_i$  дефокусирующего магнита это всегда минимум, т. е. у пучка имеется *перетяжка*. Расстояние от некоторой точки  $s$  до перетяжки для пучка, движущегося в пространстве, свободном от поля, определяется выражением

$$s - s_i = -\frac{\alpha(s)}{\gamma(s)}. \quad (4.7)$$

При  $\alpha > 0$  перетяжка находится впереди, т. е. пучок «сходящийся», а при  $\alpha < 0$  перетяжка позади и пучок «расходящийся».

Основное преимущество параметров эллипса  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$  [см. выражение (4.3)] в том, что при прохождении пучка через оптическую систему они изменяются соответственно линейному трехмерному преобразованию. Чтобы получить это преобразование при  $\Delta p/p_0 = 0$ , подставим в уравнение (4.3) обратное преобразование траектории

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

и получим в матричной форме [7, 8]

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + SC' & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Преобразование (4.8) пригодно для численных расчетов огибающих пучка. Из матрицы преобразования легко найти соотношение между  $\beta(s)$  и  $\alpha(s)$ ,

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta'. \quad (4.9)$$

Соотношение

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

сохраняется при преобразовании, так как  $CS' - C'S = 1$ ; это означает, что эмиттанс пучка  $\epsilon$  постоянен в соответствии с теоремой Лиувилля.

Преобразование эллипса (4.8) относится только к огибающим пучкам без разброса по импульсам. При определении же огибающих реальных пучков заряженных частиц, импульсы которых лежат в пределах  $\pm \Delta p/p_0$ , следует принимать во внимание дисперсию и хроматическую aberrацию. Если матричные элементы в выражении (4.8) переписать с учетом хроматических aberrаций, то преобразование эллипса при  $+\Delta p/p_0$  будет иметь несколько иную форму, нежели при  $-\Delta p/p_0$ . Кроме того, эллипс будет смещен в фазовой плоскости на величину  $\pm (\Delta p/p_0)\{D, D'\}$ , если в систему входят отклоняющие магниты. Итак, точно огибающую пучка можно определить следующим образом. Находят огибающие эллипсы как при  $+\Delta p/p_0$ , так и при  $-\Delta p/p_0$  и прибавляют к ним абсолютные значения соответствующих дисперсий, умноженных на  $|\Delta p/p_0|$ . Более удаленная от осей кривая будет представлять собой общую огибающую во всех точках системы, кроме небольших переходных участков, где более удаленной от оси оказывается другая кривая.

При рассмотрении элементов оптической системы в приближении тонких линз (гл. 1, § 6) матрица преобразования эллипса пучка (4.8) принимает простую форму

$$\begin{pmatrix} 1 & -2l & l^2 \\ 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

для свободного от поля пространства длиной  $l$  и

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ \frac{1}{f^2} & 2\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

для тонких линз с фокусным расстоянием  $f$ . Преобразования

эллипса, соответствующие этим матрицам, можно представить следующим образом [5].

Для свободного от поля пространства запишем эллипс в комплексной форме в виде

$$Z = R + jX, \quad (4.12)$$

где

$$R = \frac{1}{\gamma}, \quad X = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

и применим преобразование свободного пространства

$$R_1 = R_0, \quad X_1 = X_0 + l. \quad (4.13)$$

Тогда получим

$$Z_1 = Z_0 + jl.$$

Для тонкой линзы запишем эллипс в комплексной форме как

$$Y = G + jB, \quad (4.14)$$

где

$$G = \frac{1}{\beta}, \quad B = \frac{\alpha}{\beta},$$

и применим преобразование тонкой линзы

$$G_1 = G_0, \quad B_1 = B_0 + \frac{1}{f}; \quad (4.15)$$

тогда

$$Y_1 = Y_0 + j\frac{1}{f}.$$

Величины, определяемые выражениями (4.12) и (4.14), выбираются так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2}, & B &= -\frac{X}{R^2 + X^2}, \\ Y &= \frac{1}{Z}, \\ R &= \frac{G}{G^2 + B^2}, & X &= -\frac{B}{G^2 + B^2}, \\ Z &= \frac{1}{Y}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Таким образом, переход от представления  $Z$  эллипса свободного от поля пространства к представлению  $Y$  эллипса тонкой линзы, и наоборот, состоит просто в нахождении обратных комплексных чисел.

Для иллюстрации этого изящного метода напишем преобразование эллипса в системе из двух квадруполей, изображен-

ной на фиг. 1.6, в приближении тонких линз

$$Z_{z,5} = \left( \left( \left( (Z_{z,0} + j l_1)^{-1} - j \frac{1}{f_2} \right)^{-1} + j l_3 \right)^{-1} + j \frac{1}{f_4} \right)^{-1} + j l_5,$$

$$Z_{x,5} = \left( \left( \left( (Z_{x,0} + j l_1)^{-1} + j \frac{1}{f_2} \right)^{-1} + j l_3 \right)^{-1} - j \frac{1}{f_4} \right)^{-1} + j l_5.$$

Данный метод весьма полезен при нахождении преобразования пучков в заданной оптической системе. Но при решении этим методом задач двумерного «согласования», когда нужно найти параметры системы, обеспечивающие заданные свойства пучка в обеих координатных плоскостях, получаются сложные уравнения, неудобные для численных расчетов даже в таких простых случаях, как наш пример. При решении таких задач лучше проводить расчет на быстродействующей аналоговой вычислительной машине с прямой индикацией огибающих пучка (§ 8).

## § 5. УРАВНЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ

Вместо уравнения (4.3) мы введем теперь новую запись уравнения эллипса пучка, которая дает возможность более прямой физической интерпретации. В новой записи вместо функций  $\beta$  и  $\alpha$  мы воспользуемся понятием огибающей или «функции огибающей»  $E$  и ее производной  $E' = dE/ds$ . Эти параметры эллипса (фиг. 4.3) связаны с  $\beta$  и  $\alpha$  следующим образом:

$$E = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta},$$

$$E' = -\sqrt{\varepsilon} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}.$$
(4.17)

При таких обозначениях уравнение эллипса (4.3) принимает вид

$$A^2 y^2 - 2EE' y y' + E^2 y'^2 = \varepsilon^2,$$
(4.18)

где

$$A^2 = \frac{\varepsilon^2}{E^2} + E'^2.$$
(4.19)

Величина  $A$  — максимальное угловое отклонение в пучке, которое мы будем называть *угловой огибающей*.

Чтобы вывести дифференциальное уравнение для функции огибающей, перепишем уравнение (4.18) таким образом:

$$(E'y - Ey')^2 + \frac{\varepsilon^2}{E^2} y^2 = \varepsilon^2.$$
(4.18a)



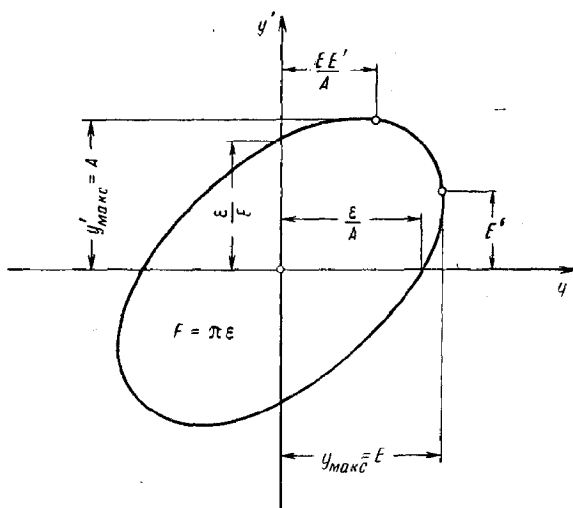
Дифференцируя по  $s$ , находим

$$E''y - Ey'' - \frac{\epsilon^2}{E^3}y = 0.$$

Заменяя  $y''$  на  $\mp ky$ , мы получаем уравнение огибающей<sup>1)</sup>

$$E'' \pm kE - \frac{\epsilon^2}{E^3} = 0. \quad (4.20)$$

Уравнением (4.20) можно пользоваться при расчете функции огибающей на аналоговой вычислительной машине (§ 8). Оно



Фиг. 4.3. Эллипс пучка.

Размеры выражены через функцию огибающей  $E$ .

отличается от уравнения траекторий добавочным членом  $-(\epsilon^2/E^3)$ , который пренебрежимо мал при больших значениях  $E$ , но становится очень большим в перетяжках пучка, где величина  $E$  мала. В этих местах член  $-(\epsilon^2/E^3)$  характеризует дефокусирующий эффект, благодаря которому функция огибающей не может стать отрицательной. Дифференцируя выражение (4.19) и пользуясь уравнением (4.20), мы получаем соотношение

$$AA' = \mp kEE', \quad (4.21)$$

<sup>1)</sup> Н. О. Wüster, частное сообщение.

которое внутри магнита, где  $k \neq 0$ , можно записать в виде

$$\frac{EE'}{A} = \mp \frac{1}{k} A'$$

## § 6. ВЫРАЖЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ОГИБАЮЩЕЙ

Если в магнитной системе известна огибающая  $E(s)$ , соответствующая определенным начальным параметрам эллипса  $E_0$ ,  $E'_0$ ,  $\varepsilon$ , то линейные фокусирующие свойства такой системы полностью определены, и мы можем выразить главные траектории через функцию  $E(s)$ . Для этого введем *фазовую функцию*

$$\Phi(s) = \int_0^s \frac{\varepsilon}{E^2} d\tau, \quad (4.22)$$

где

$$\Phi' = \frac{\varepsilon}{E^2},$$

которая представляет собой обобщенную фазовую функцию, используемую в теории ускорителей [7]. Пользуясь этой функцией, косинусообразную траекторию можно записать в виде

$$C(s) = \frac{E(s)}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \Phi(s) - E'_0 \sin \Phi(s) \right]. \quad (4.23)$$

Тогда имеем

$$C' = \frac{E'}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \Phi - E'_0 \sin \Phi \right) - \frac{1}{E} \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \sin \Phi + E'_0 \cos \Phi \right) \quad (4.24)$$

и, используя уравнение огибающих (4.20), найдем

$$C'' = \frac{1}{\varepsilon} \left( E'' - \frac{\varepsilon^2}{E^3} \right) \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \Phi - E'_0 \sin \Phi \right) = \mp kC.$$

Тем самым мы показали, что функция  $C(s)$  является решением уравнения траектории (1.14а) и удовлетворяет требуемым начальным условиям  $C(0) = 1$  и  $C'(0) = 0$ .

Точно так же синусообразную траекторию можно записать в виде

$$S(s) = \frac{E_0}{\varepsilon} E(s) \sin \Phi(s). \quad (4.25)$$

Отсюда

$$S' = \frac{E_0}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{E} \cos \Phi + E' \sin \Phi \right) \quad (4.26)$$

и

$$S'' = \frac{E_0}{\varepsilon} \left( E'' - \frac{\varepsilon^2}{E^3} \right) \sin \Phi = \mp kS,$$

и, следовательно, эта траектория также является решением уравнения (1.14а) и удовлетворяет необходимым начальным условиям  $S(0)=0$  и  $S'(0)=1$ .

На основе формул (4.23)—(4.26) общую матрицу преобразования [6, 7, 9] можно следующим образом записать через огибающую:

$$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \Phi - E'_0 \sin \Phi \right) & \frac{E_0}{\varepsilon} E \sin \Phi \\ \frac{E'}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \Phi - E'_0 \sin \Phi \right) & \frac{E_0}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{E} \cos \Phi + E' \sin \Phi \right) \\ -\frac{1}{E} \left( \frac{\varepsilon}{E_0} \sin \Phi + E'_0 \cos \Phi \right) & \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

где  $\Phi = \int_0^s (\varepsilon/E^2) d\tau$ , согласно выражению (4.22).

## § 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ ПРИ ПОМОЩИ СОПРЯЖЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Огибающую  $E(s)$  и угловую огибающую  $A(s)$  в свою очередь можно рассчитать прямым методом с помощью двух сопряженных траекторий  $y_1(s)$  и  $y_2(s)$ , соответствующих двум сопряженным точкам на фазовом эллипсе пучка<sup>1)</sup>. Если траектория на границе эллипса дается выражением

$$y_1(s) = E_0 \cos \psi C(s) + \left( E'_0 \cos \psi - \frac{\varepsilon}{E_0} \sin \psi \right) S(s), \quad (4.28a)$$

где  $\psi$  — фазовый параметр, то сопряженная ей траектория определяется так:

$$y_2(s) = E_0 \sin \psi C(s) + \left( E'_0 \sin \psi + \frac{\varepsilon}{E_0} \cos \psi \right) S(s). \quad (4.28б)$$

Легко видеть, что эти траектории удовлетворяют уравнению эллипса (4.18а) при  $s=0$ . Выражая главные траектории  $C$  и  $S$  через огибающую  $E(s)$  и фазовую функцию

$$\Phi(s) = \int_0^s (\varepsilon/E^2) d\tau, \quad \text{т. е. подставляя выражения (4.23) и (4.25)}$$

в (4.28), запишем сопряженные траектории в следующем простом виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= E \cos(\Phi - \psi), \\ y_2 &= E \sin(\Phi - \psi). \end{aligned} \quad (4.29)$$

<sup>1)</sup> P. Lapostolle, M. Weiss, частное сообщение.

Представляющие точки траекторий  $\{y_1, y_1'\}$  и  $\{y_2, y_2'\}$  в данной плоскости  $s = \text{const}$  делают один оборот по эллипсу против часовой стрелки, если фазовый параметр непрерывно возрастает на величину  $2\pi$ . При возрастании же  $s$  фазовая функция  $\Phi(s)$  увеличивается таким образом, что фазовый параметр  $\psi$  для граничных траекторий, определяющих огибающую пучка, непрерывно возрастает. В тех местах, где пучок широкий, величина  $1/E^2$  мала и  $\Phi$  растет медленно, а в узких перетяжках пучка величина  $1/E^2$  велика и  $\Phi$  растет быстро. Каждый раз, когда фазовая функция увеличивается на  $2\pi$ , огибающая в двух сопряженных точках определяется той же самой траекторией. Дифференцируя (4.29), получаем выражения для наклонов сопряженных траекторий

$$\begin{aligned} y_1' &= E' \cos(\Phi - \psi) - \frac{\varepsilon}{E} \sin(\Phi - \psi), \\ y_2' &= E' \sin(\Phi - \psi) + \frac{\varepsilon}{E} \cos(\Phi - \psi). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Любые две сопряженные точки на эллипсе пучка связаны следующим образом: радиус-вектор одной из точек параллелен касательной к эллипсу в другой точке.

Аналитически эту связь можно записать в виде соотношений

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{\partial y_2' / \partial \psi}{\partial y_2 / \partial \psi}, \quad \frac{y_2'}{y_2} = \frac{\partial y_1' / \partial \psi}{\partial y_1 / \partial \psi}, \quad (4.31)$$

поскольку изменение  $\psi$  вызывает перемещение точек по эллипсу. Из выражений (4.29) и (4.30) мы получим для любой точки  $s = \text{const}$

$$\begin{aligned} \frac{y_1'}{y_1} &= \frac{E'}{E} - \frac{\varepsilon}{E^2} \operatorname{tg}(\Phi - \psi) = \\ &= \frac{(\partial / \partial \psi) [E' \sin(\Phi - \psi) + (\varepsilon/E) \cos(\Phi - \psi)]}{(\partial / \partial \psi) [E \sin(\Phi - \psi)]} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{y_2'}{y_2} &= \frac{E'}{E} + \frac{\varepsilon}{E^2} \operatorname{ctg}(\Phi - \psi) = \\ &= \frac{(\partial / \partial \psi) [E' \cos(\Phi - \psi) - (\varepsilon/E) \sin(\Phi - \psi)]}{(\partial / \partial \psi) [E \cos(\Phi - \psi)]}, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость соотношений (4.31).

Из уравнения (4.29) непосредственно следует искомая формула для функции огибающей <sup>1)</sup>

$$E(s) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (4.32)$$

Точно так же из выражений (4.30) и (4.19) получаем формулу для угловой огибающей

$$A(s) = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}. \quad (4.33)$$

Эти формулы очень удобны для определения  $E$  и  $A$  на аналоговой вычислительной машине (см. следующий параграф).

## § 8. АНАЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА

Быстрая индикация огибающих пучка имеет большое практическое значение при расчетах на аналоговых машинах системы с заданным согласованием фазовых пространств или с максимальным аксептансом. Чтобы можно было быстро составить представление о характере согласования, необходима одновременная индикация огибающих в обеих координатных плоскостях. В системах с прямоугольной эффективной апертурой по двум огибающим кривым можно быстро найти «оптимальную» систему с максимальным аксептансом, варьируя  $E_0$ ,  $E_0'$  и  $e$  и следя за тем, чтобы отдельные кривые не выходили за пределы апертуры. Если в системе имеются квадрупольные крестообразные апертуры (фиг. 1.24), то две координаты взаимно связаны. Аксептанс для одной координаты можно увеличить в некоторых пределах за счет аксептанса для другой координаты, и наоборот. Поскольку в этом случае огибающие  $E_z$  и  $E_x$  проходят через систему только тогда, когда их произведение не превышает определенного значения, такие системы можно оптимизировать, если кроме индикации отдельных огибающих  $E_z$  и  $E_x$ , предусмотреть индикацию произведения  $E_z E_x$  и наблюдать за пределами его изменения. Точно так же для оптимизации системы с круглыми апертурами нужно предусмотреть индикацию величины  $E_z^2 + E_x^2$ . Правда, здесь задача сильно упростится без больших потерь в информации, если круглые апертуры при расчете заменить квадратными.

При аналоговых расчетах огибающих пучка были найдены два метода, которые и были применены. При первом методе

<sup>1)</sup> P. Lapostolle, M. Weiss, частное сообщение.

используется уравнение огибающей (4.20)

$$E'' \pm KE - \frac{\varepsilon^2}{E^3} = 0$$

и расчет проводится на несколько усложненном аналоговом устройстве, описанном в гл. 1, § 9 [10]. В обе аналоговые цепи, показанные на фиг. 1.14, добавляется по генератору, которые при данном входном напряжении  $y$  вырабатывают выходное напряжение, пропорциональное  $\varepsilon^2/y^3$ , и прибавляют его к  $\mp ky = y''$  на входе в первый интегратор. Тогда вместо  $z$  и  $x$  в цепях будут вычисляться величины  $E_z$  и  $E_x$  при данных начальных значениях  $E_0, E'_0$  и  $\varepsilon$ . К сожалению, у данного метода имеется тот недостаток, что, поскольку величина  $1/E^3$  сильно возрастает там, где величина  $E$  мала, его относительная точность невелика. Предположим, например, что погрешность напряжения на аналоговой вычислительной машине составляет  $10^{-4}$  максимального напряжения и что ширина пучка в самом узком месте составляет 1% его максимальной ширины. Тогда в перетяжке относительная точность расчета  $E$  равна 1%, а доминирующий в уравнении (4.20) член  $\varepsilon^2/E^3$  определяется только с точностью до 3%. Относительную точность при данном методе можно повысить лишь в том случае, если ограничиться расчетом пучков с небольшим «коэффициентом модуляции»  $E_{\max}/E_{\min}$ .

Во втором методе эта трудность устранена, и он, по-видимому, более перспективен. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, при таком методе огибающая рассчитывается с помощью двух сопряженных траекторий по формуле (4.32)

$$E = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Для одновременной индикации обеих огибающих необходимы четыре аналоговые цепи, на входе которых задаются соответствующим образом связанные начальные условия. Удобно выбрать начальные условия

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon/E_0 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

которые вытекают из выражений (4.28) при  $\psi=0$ . Предельная точность определяется в основном точностью цепей, в которых рассчитываются траектории.

Система такого типа была создана на основе аналогового устройства, описанного в гл. 1, § 9, и гл. 2, § 11. Как уже говорилось в указанных параграфах, для моделирования

фокусирующей силы  $k(s)$  желательнее было бы использовать генератор ступенчатого сигнала с понижающими потенциометрами. Но тогда для каждого магнита потребовались бы четыре идентичных прецизионных потенциометра, регулируемых одной ручкой. Поскольку в нашем распоряжении были только сдвоенные потенциометры, был найден следующий выход<sup>1)</sup>. В быстром режиме работы, применяющемся для предварительного расчета, на потенциометры подавалось постоянное напряжение, и таким образом мы получали непосредственно функцию  $k(s)$ , которая после этого с помощью четырех умножителей вводилась в четыре цепи. Чтобы затем уточнить результат для каждой из координат, можно перейти ко второму, более точному режиму работы. В этом режиме используются две точные аналоговые цепи для расчета траекторий, в которых применен генератор со спаренным потенциометром, работающим в первоначальном понижающем режиме, так что умножители не нужны. В обоих режимах в соответствии с выражением (4.33) могут быть рассчитаны и показаны на экране индикаторного осциллографа также угловые огибающие.

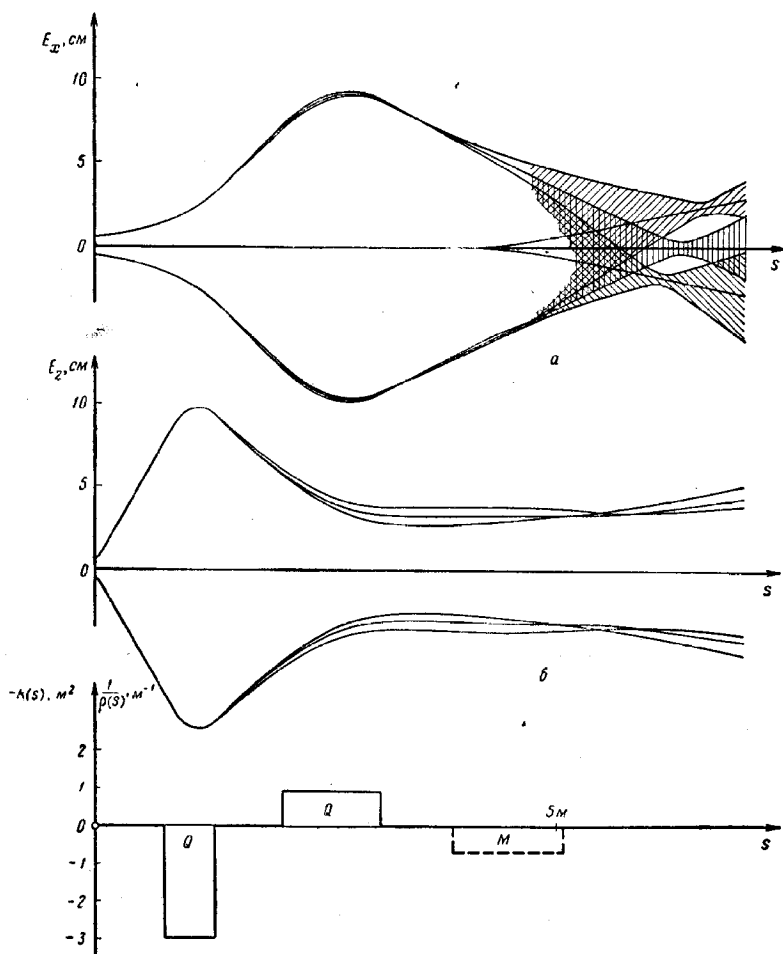
На фиг. 4.4 в качестве примера приведены огибающие  $E$  и угловые огибающие  $A$ , рассчитанные на аналоговой вычислительной машине для произвольно выбранной магнитной системы. Для наглядности огибающие слегка смещены относительно соответствующих семейств граничных траекторий и их производных.

При расчете ширины и положения пучка с относительным разбросом по импульсу  $\Delta p/p_0$  к огибающей должна быть добавлена дисперсия  $D$ , умноженная на  $\Delta p/p_0$  (§ 4). Это можно сделать в быстром режиме работы, если ввести пятую цепь, в которой одновременно с расчетом огибающих в других цепях системы рассчитывалась бы дисперсия. На фиг. 4.5 в качестве примера показано, как изменяется и смещается огибающая пучка в спектрометре, изображенном на фиг. 3.11, при относительном разбросе по импульсам  $\pm 1,4\%$ .

## § 9. ОГИБАЮЩАЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ФОДО

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим в качестве примера применения метода огибающих канал неограниченной длины с периодической структурой [11], который состоит из квадрупольных линз чередующейся полярности с

<sup>1)</sup> I. Vorchardt, частное сообщение.



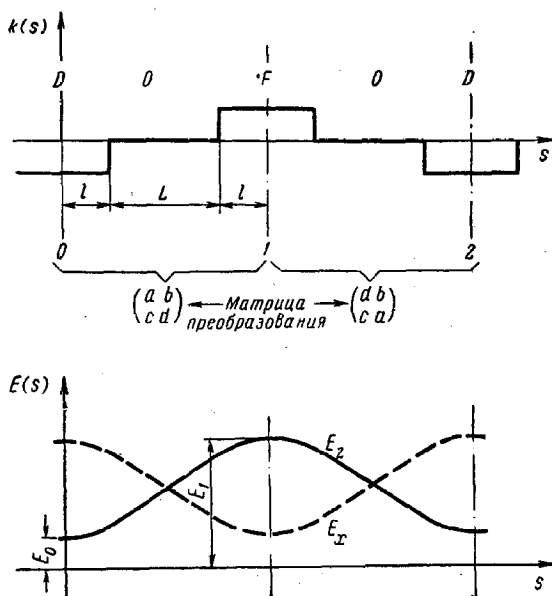
Ф и г. 4.5. Огибающие  $E_x$  и  $E_z$  в спектрометре, изображенном на фиг. 3.11, при  $\Delta p/p_0 = 0$ ,  $\Delta p/p_0 = \pm 1,4\%$ ,  $E_0 = 0,5 \text{ см}$ ,  $E'_0 = 0$ .

$a$  — при  $A_0 = e/E_0 = 18 \text{ мрад}$ ;  $b$  — при  $A_0 = e/E_0 = 100 \text{ мрад}$ .

одинаковыми длиной  $2l$ , силой  $|k|$  и расстоянием между соседними линзами  $L$ . Ввиду симметрии такого «канала ФОДО» (фокусировка — нуль — дефокусировка — нуль) в пределах линейной теории его свойства полностью определяются этими тремя параметрами и для него легко получить аналитические



выражения. Зависимость силы линзы  $k$  от  $s$  для одного периода канала представлена на фиг. 4.6.



Фиг. 4.6. Структурные параметры и огибающие в периодическом канале ФОДО.

Матрица преобразования половины периода равна

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi + \sin \varphi \operatorname{sh} \varphi + \frac{L}{\varphi} \left\{ \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi + \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi + \right. \\ \left. + \frac{L}{l} \varphi \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi \right. & \left. + \frac{L}{l} \varphi \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi \right\} \\ \frac{\varphi}{l} \left\{ \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi - \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi - \right. & \left. \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi - \sin \varphi \operatorname{sh} \varphi - \right. \\ \left. - \frac{L}{l} \varphi \sin \varphi \operatorname{sh} \varphi \right\} & \left. - \frac{L}{l} \varphi \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi \right\} \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

где  $\varphi = l \sqrt{k}$ .

Поскольку длина канала, по нашему предположению, неограничена, мы будем рассматривать только такую огибаю-

щую  $E(s)$ , которая обладает той же симметрией, что и канал, потребовав выполнения равенств

$$E'_0 = 0 \quad \text{и} \quad E'_1 = 0. \quad (4.36)$$

Тогда на основании выражения (4.27) мы можем записать матрицу преобразования половины периода в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{E_0} \cos \Phi & \frac{E_0 E_1}{\varepsilon} \sin \Phi \\ -\frac{\varepsilon}{E_0 E_1} \sin \Phi & \frac{E_0}{E_1} \cos \Phi \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

где  $\Phi = \int_{(0)}^{(1)} (\varepsilon/E^2) ds$  — величина, называемая фазовым сдвигом на половине периода. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_1^2}{E_0^2} &= \frac{a}{d}, & E_0^2 E_1^2 &= -\varepsilon^2 \frac{b}{c}, \\ E_0^4 &= -\varepsilon^2 \frac{bd}{ac}, & E_1^4 &= -\varepsilon^2 \frac{ab}{cd}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Поскольку матричные элементы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  зависят только от структурных параметров, периодическое решение уравнения огибающей определено однозначно с точностью до множителя  $\sqrt{\varepsilon}$ . Это решение (фиг. 4.6) связано с периодической амплитудой функции  $\beta$  в теории синхротрона следующим образом:

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon} E^2.$$

Оно принимает максимальное значение  $E_{\text{макс}} = E_1$  в средней плоскости фокусирующего квадрупольа и минимальное  $E_{\text{мин}} = E_0$  в средней плоскости дефокусирующего квадрупольа. Огибающая для другой координаты также показана на фиг. 4.6 (штриховой линией). Она имеет ту же форму, но сдвинута на половину периода.

Отношение  $E_{\text{макс}}/E_{\text{мин}} = m$  называется коэффициентом модуляции. На основании выражения для матрицы (4.35) и первого из соотношений (4.38) имеем

$$m^2 = \frac{E_{\text{макс}}^2}{E_{\text{мин}}^2} = \frac{a}{d} = \frac{1 + \text{th } \varphi \left( \text{tg } \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right)}{1 - \text{tg } \varphi \left( \text{th } \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right)}, \quad (4.39)$$

где  $\varphi = l\sqrt{k}$ . Поскольку

$$1 + \operatorname{th} \varphi \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right) = \\ = 1 + \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4 + \frac{2}{15} \left( \frac{7}{6} + \frac{L}{l} \right) \varphi^6 + \dots$$

и

$$1 - \operatorname{tg} \varphi \left( \operatorname{th} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right) = \\ = 1 - \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4 - \frac{2}{15} \left( \frac{7}{6} + \frac{L}{l} \right) \varphi^6 + \dots,$$

мы можем написать, пренебрегая членом  $1/45\varphi^6$  и членами более высоких порядков,

$$m^2 \approx \frac{1 + \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 \left( 1 + \frac{2}{15} \varphi^4 \right) - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4}{1 - \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 \left( 1 + \frac{2}{15} \varphi^4 \right) - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4}.$$

При  $2/15\varphi^4 \ll 1$  это выражение упрощается:

$$m^2 \approx \frac{1 + \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4}{1 - \left( 1 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \varphi^4}. \quad (4.40)$$

Движение частицы в канале из квадрупольных линз устойчиво только при таких значениях структурных параметров, при которых знаменатель этого выражения положителен, т. е. при

$$\varphi^2 \left\{ 1 + \frac{L}{l} (1 + \varphi^2) \right\} < 1 \quad (4.41)$$

или

$$\frac{L}{l} < \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2 (1 + \varphi^2)} < \frac{1}{\varphi^2}.$$

На основании выражения для матрицы (4.35) и второго из соотношений (4.38) находим квадрат произведения  $E_{\max} E_{\min}$ :

$$E_{\max}^2 E_{\min}^2 = -\varepsilon^2 \frac{b}{c} = -\varepsilon^2 \frac{l^2}{\varphi^2} \frac{1 + \operatorname{cth} \varphi \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right)}{1 - \operatorname{tg} \varphi \left( \operatorname{th} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right)}. \quad (4.42)$$

Так как

$$1 + \operatorname{cth} \varphi \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right) = \\ = 2 + \frac{L}{l} + \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 + \frac{1}{45} \left( 10 - \frac{L}{l} \right) \varphi^4 + \frac{2}{945} \left( 44 + \frac{L}{l} \right) \varphi^6 + \dots$$

и

$$1 - \operatorname{tg} \varphi \left( \operatorname{cth} \varphi + \frac{L}{l} \varphi \right) = - \left( \frac{2}{3} + \frac{L}{l} \right) \varphi^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{L}{l} \right) \varphi^4 - \frac{2}{15} \left( \frac{44}{63} + \frac{L}{l} \right) \varphi^6 + \dots,$$

мы можем написать

$$E_{\max}^2 E_{\min}^2 \approx e^2 \frac{1}{|k| \varphi^2} \frac{2 + \frac{L}{l}}{\frac{2}{3} + \frac{L}{l}} \frac{1 + \frac{1}{3} \varphi^2 + \frac{2}{15} \delta \varphi^4}{1 + \frac{1}{3} \varphi^2 + \frac{2}{15} \varphi^4},$$

причем

$$\delta = \frac{10 - \frac{L}{l}}{6 \left( 2 + \frac{L}{l} \right)}.$$

Здесь мы опять пренебрегли членом  $4/945\varphi^6$  и всеми членами более высоких порядков.

Поправочный множитель  $\delta$  лежит в пределах от  $+5/6$  до  $-1/6$ , что видно из следующей таблицы:

$\frac{L}{l}$	0	1	5	10	20	$\infty$
$\delta$	0,84	0,5	0,12	0	-0,139	-0,167

Поэтому при  $2/15\varphi^4 \ll 1$  мы можем написать

$$E_{\max}^2 E_{\min}^2 = E_1^2 E_0^2 \approx \frac{e^2}{k^2 l^2} \frac{2 + L/l}{\frac{2}{3} + L/l}. \quad (4.43)$$

Из соотношения (4.43) и выражения (4.40) для коэффициента модуляции  $m$  получаем экстремальные значения амплитудной функции

$$\begin{aligned} E_{\max}^2 &= E_1^2 = m \frac{e}{|k|l} \sqrt{\frac{2 + L/l}{2/3 + L/l}}, \\ E_{\min}^2 &= E_0^2 = \frac{1}{m} \frac{e}{|k|l} \sqrt{\frac{2 + L/l}{2/3 + L/l}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Чтобы найти форму огибающей  $E(s)$  внутри квадрупольей, можно воспользоваться либо преобразованием (4.8), либо выражениями (4.32) и (4.34). При  $E'_{0z} = E'_{0x} = 0$  и  $E_{0x} = E_1$  (фиг. 4.5) мы получаем, например, для квадрупольной линзы,

дефокусирующей в вертикальном направлении,

$$E_z^2(s) = \varepsilon \left[ \frac{E_0^2}{\varepsilon} \operatorname{ch}^2 \varphi(s) + \frac{1}{|k|} \frac{\varepsilon}{E_0^2} \operatorname{sh}^2 \varphi(s) \right],$$

$$E_x^2(s) = \varepsilon \left[ \frac{E_1^2}{\varepsilon} \cos^2 \varphi(s) + \frac{1}{|k|} \frac{\varepsilon}{E_1^2} \sin^2 \varphi(s) \right],$$
(4.45)

где  $\varphi(s) = s\sqrt{k}$ . Согласно выражениям (4.38), квадрат огибающей для данной системы пропорционален эмиттансу пучка  $\varepsilon$ . В области вблизи средней плоскости  $s=0$  квадруполь второй член в выражении (4.45) мал по сравнению с первым членом. Здесь произведение огибающих в координатных плоскостях  $z0s$  и  $x0s$  приблизительно постоянно, что видно из следующего соотношения:

$$E_z(s) E_x(s) \approx E_0 E_1 \cos \varphi(s) \operatorname{ch} \varphi(s) \approx$$

$$\approx E_0 E_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \approx$$

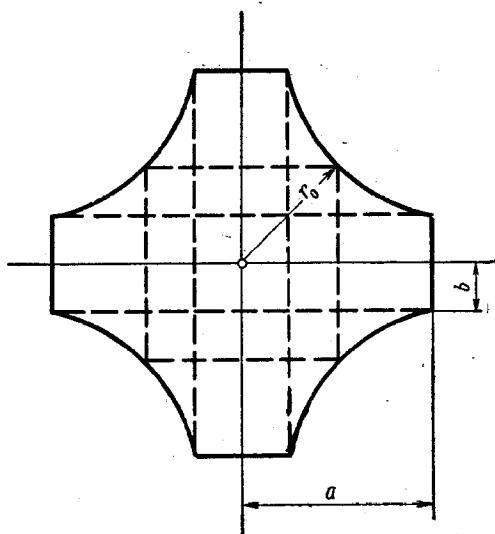
$$\approx E_0 E_1 \left( 1 - \frac{1}{4} \varphi^4 \right) \approx E_0 E_1 = \text{const.} \quad (4.46)$$

В пространстве, свободном от поля, форму огибающей  $E(s)$  можно рассчитать, найдя  $E$  и  $E'$  на краю квадруполь из выражения (4.45). Далее можно воспользоваться соотношениями (4.32) и (4.34) или преобразованием (4.8), подставив в них элементы матрицы пространства, свободного от поля.

## § 10. АКСПЕТАНС ПЕРИОДИЧЕСКОГО КАНАЛА ФОДО

Рассмотрим периодический канал ФОДО, о котором говорилось в предыдущем параграфе, в том случае, когда полезная апертура квадруполь имеет форму, показанную на фиг. 4.7 и 1.24. Предположим, что поперечное сечение пучка представляет собой прямоугольник, и потребуем, чтобы эмиттанс пучка, пропускаемого каналом, был максимальным [12]. Этот максимальный эмиттанс, который называется аксептансом канала, определяется из условия, что прямоугольное сечение пучка нигде не должно выходить за пределы апертуры и при прохождении каждой магнитной квадрупольной линзы хотя бы одной вершиной должно касаться границы апертуры. Мы сделаем упрощающее предположение, что эта вершина находится в средней плоскости квадруполь, как для фокусирующей, так и для дефокусирующей плоскости линзы. Для первой из них оно выполняется точно. Для дефокусирующей

же плоскости оно выполняется с хорошим приближением, поскольку произведение  $E_z(s)E_x(s)$  в квадруполе не очень сильно меняется, как это видно из выражения (4.46).



Фиг. 4.7. Поперечное сечение апертуры квадруполя с гиперболическими границами.

$$M = \frac{a}{b}, \quad ab = \frac{r_0^2}{2}.$$

Акцептанс канала, который мы теперь обозначим через  $\epsilon$ , зависит от «апертурного отношения»

$$M = \frac{a}{b}$$

(фиг. 4.7). В зависимости от величины этого параметра возможны два случая.

*Случай 1:*  $m \leq M$ , т. е. коэффициент модуляции пучка меньше апертурного отношения  $M$ .

В этом случае прямоугольное поперечное сечение пучка своими вершинами касается гиперболических участков границы апертуры. Подставляя

$$E_1 E_0 = \frac{1}{2} r_0^2$$

в выражение (4.43), получаем

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{4} r_0^4 k^2 l^2 \frac{\frac{2}{3} + L/l}{2 + L/l} \quad \text{при } m \leq M. \quad (4.47)$$

*Случай 2:  $m > M$* , т. е. коэффициент модуляции  $m$  пучка больше апертурного отношения  $M$ .

В этом случае стороны прямоугольного поперечного сечения пучка касаются прямолинейных частей апертуры. Подставляя

$$E_1 = a$$

или

$$E_1 E_0 = \frac{a^2}{m} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{M}{m}$$

в выражение (4.43), получаем

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{4} r_0^4 k^2 l^2 \frac{\frac{2}{3} + L/l}{2 + L/l} \frac{M^2}{m^2} \quad \text{при } m > M. \quad (4.48)$$

Введем теперь «коэффициент заполнения» канала  $f$ , который мы определим как отношение длины линзы к суммарной длине линзы и свободного от поля промежутка. Тогда имеем

$$f = \frac{2l}{2l + L}.$$

При заданных апертуре и силе квадрупольной линзы этот коэффициент заполнения характеризует стоимость системы на единицу длины. Поэтому рассмотрим вопрос о том, каков должен быть коэффициент модуляции  $m$ , чтобы получить максимальный аксептанс при постоянных  $f$  и  $k$  (длина квадрупольной линзы  $2l$  — переменная). Коэффициент модуляции мы введем в соотношения (4.47) и (4.48), пользуясь выражением (4.40). Последнее можно записать так:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{L}{l}\right) \Phi^2 \approx \mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu} \Phi^2 - \frac{1}{3} \frac{L}{l} \Phi^4\right),$$

где

$$\mu = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}.$$

Чтобы избавиться от  $\Phi$  в малых членах  $1/3 (1/\mu) \Phi^2$  и  $(L/l) \Phi^4$ , мы воспользуемся приближенным равенством

$$\Phi^2 \approx \frac{\mu}{1 + L/l} = \mu \frac{f}{2 - f}$$

и получим

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{L}{l}\right) |k| l^2 \approx \mu(1 - \kappa) = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} (1 - \kappa), \quad (4.49)$$

где

$$\kappa = \kappa(f, \mu) = \frac{f}{2-f} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \mu^2 \frac{1-f}{2-f} \right).$$

Поправка  $\kappa$  возрастает с увеличением  $\mu$ . При  $\mu \rightarrow 1$ , т. е. при больших коэффициентах модуляции  $m$ , верхний предел  $\kappa_{\text{макс}}(f)$  равен  $1/3$  при  $f=1$ . Функция  $\kappa_{\text{макс}}(f)$  принимает максимальное значение  $1/3$  при  $f=1$ , а затем убывает с уменьшением величины коэффициента заполнения  $f$ . Ряд значений  $\kappa_{\text{макс}}$  дан в следующей таблице:

$f$	1	0,8	0,5	0,25	0,1
$\kappa_{\text{макс}}$	0,33	0,30	0,19	0,088	0,034

Подставляя соотношение (4.49) в выражения (4.47) и (4.48), получаем

$$\epsilon^2 \approx \frac{1}{8} r_0^4 |k| f \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} (1 - \kappa) \quad \text{при } m \leq M \quad (4.50)$$

и

$$\epsilon^2 \approx \frac{1}{8} r_0^4 |k| f M^2 \frac{1}{m^2} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} (1 - \kappa) \quad \text{при } m > M. \quad (4.51)$$

Эти выражения показывают, как меняется аксептанс канала в зависимости от коэффициента модуляции  $m$  при заданных значениях коэффициента заполнения  $f$  и силы квадруполья  $k$ .

В случае  $m \leq M$  функция

$$\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} [1 - \kappa(f, m)]$$

в выражении (4.50) монотонно возрастает с ростом  $m$  при  $1 \leq m < \infty$  и при всех значениях коэффициента заполнения  $f$ . Следовательно, для обеспечения максимального аксептанса необходимо выбрать длину квадрупольной линзы  $2l$  таким образом, чтобы коэффициент модуляции равнялся апертурному отношению, т. е.  $m=M$ .

В случае  $m > M$  функция

$$\frac{1}{m^2} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

в выражении (4.51) равна нулю при  $m=1$ , проходит через максимум при

$$m = \sqrt{1 + \sqrt{2}} = 1,55$$



и уменьшается при дальнейшем увеличении  $m$ , что видно из следующей таблицы:

$m$	1	1,25	1,55	2	3	4
$\frac{1}{m^2} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$	0	0,14	0,17	0,15	0,089	0,055

Поправочный множитель  $\{1 - \kappa(f, m)\}$  очень слабо влияет на форму и положение, этого максимума, так как величина  $k(f, m)$  становится заметной только при больших значениях  $m$ .

Таким образом, при апертурном отношении  $M < 1,5$  максимальный аксептанс получают, выбирая длину квадрупольной линзы  $2l$  так, чтобы коэффициент модуляции был близок к  $m = 1,5$ . При апертурном отношении  $M \geq 1,5$  максимальный аксептанс получается, если коэффициент  $m$  сделать равным  $M$ , так как, согласно выражению (4.51), дальнейшее увеличение  $m$  привело бы к уменьшению аксептанса.

Теперь мы можем сравнить аксептанс канала из квадрупольных линз с крестообразной апертурой при апертурном отношении, например,  $M = 4$  и аксептанс канала с квадратной апертурой ( $M = 1$ ). Подставив  $m = M = 4$  в выражение (4.50), а также  $M = 1$  и оптимальное значение  $m = 1,55$  в выражение (4.51), найдем, что канал с  $M = 4$  пропускает фазовый объем  $v^2$  в 5 раз больший, чем канал с квадратной апертурой. Выигрыш в аксептансе даже еще больше в тех случаях, когда амплитуда огибающей сильно меняется внутри линзы. Тогда наше начальное допущение, что огибающая касается границ апертуры в центре дефокусирующей плоскости квадрупольа, оказывается слишком грубым для канала с квадратной апертурой ( $M = 1$ ), тогда как для канала с крестообразной апертурой ( $M = 4$ ) оно остается приблизительно верным в силу равенства (4.46).

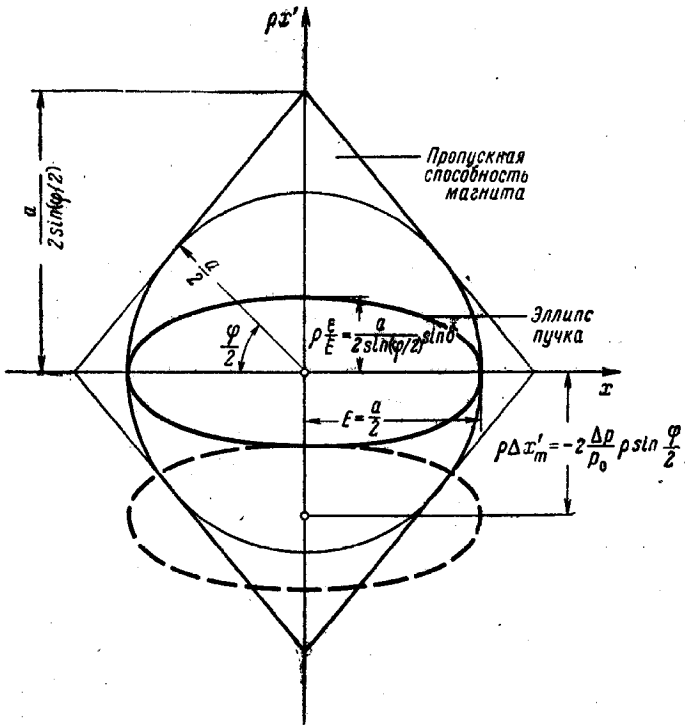
## § 11. РАЗДЕЛЕНИЕ ПО ИМПУЛЬСАМ

В данном параграфе мы рассмотрим связь между отклоняющей силой магнита и максимальным эмиттансом пучка, который может быть выделен из всей массы частиц при относительном разбросе импульсов, превышающем  $|\Delta p/p_0|$ . Мы можем рассматривать только среднюю плоскость магнита, поскольку мы показали [см. выражения (2.28) и (2.48)], что в линейном приближении диспергирующее действие магнита характеризуется угловым отклонением траектории в средней плоскости магнита  $s = m$ . Для отклоняющего магнита с одно-

родным полем это угловое отклонение равно

$$\Delta x'_m = -2 \frac{\Delta p}{p_0} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{l}{\rho}. \quad (4.52)$$

Для упрощения формул последующие выражения мы запишем только для таких магнитов. Но их нетрудно распростра-



Ф и г. 4.8. Аксептанс магнита, разделяющего по импульсам, при коэффициенте заполнения  $\sin \delta \leq \sin(\varphi/2)$ .

нить и на случай синхротронного магнита, если воспользоваться соотношениями

$$\Delta x'_m = \begin{cases} -\frac{\Delta p}{p_0} \frac{2}{\rho \sqrt{K}} \sin \frac{\varphi}{2} & \text{при } K < 0, \\ -\frac{\Delta p}{p_0} \frac{2}{\rho \sqrt{K}} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} & \text{при } K > 0, \end{cases} \quad (4.53)$$

где

$$K = k - \frac{1}{\rho^2}, \quad \varphi = l \sqrt{K}.$$

Для средней плоскости магнита пропускная способность в нормированной фазовой плоскости  $\{x, \rho x'\}$  изображена на фиг. 4.8 при допущении, что поле магнита однородно и магнит изогнут таким образом, чтобы ширина его апертуры  $\pm a/2$  была постоянной вдоль осевой траектории. Максимальное значение величины  $\rho x'$ , характеризующей пропускную способность, составляет  $a/2 \sin(\varphi/2)$ . Теперь определим «коэффициент заполнения»  $\sin \delta$ , где

$$0 < \delta \leq \frac{\pi}{4},$$

и найдем максимальный эллипс, лежащий внутри фигуры, которой определяется пропускная способность, и между двумя прямыми

$$\rho x' = \pm \frac{a}{2 \sin(\varphi/2)} \sin \delta.$$

Оси эллипса совпадают с осями фазовой плоскости. Это означает, что в средней плоскости магнита мы имеем максимум соответствующей огибающей пучка при  $\delta < \varphi/2$  и «перетяжку» при  $\delta > \varphi/2 = 0$ . В этих двух областях значений коэффициента заполнения полуоси эллипса определяются выражениями

$$\text{I. } E = \frac{a}{2} \quad \text{при } \delta \leq \frac{\varphi}{2}, \quad \delta \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\rho \frac{e}{E} = \frac{a}{2 \sin(\varphi/2)} \sin \delta$$

$$\text{II. } E = \frac{a}{2 \cos(\varphi/2)} \cos \delta \quad \text{при } 0 < \frac{\varphi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\rho \frac{e}{E} = \frac{a}{2 \sin(\varphi/2)} \sin \delta$$

Чтобы полностью разделить на фазовой плоскости эллипсы, соответствующие частицам с относительным разбросом по импульсу, превышающим данную величину  $|\Delta p/p_0|$ , необходимо выполнение следующего условия:

$$2 \frac{e}{E} \leq |\Delta x'_m|.$$

Когда эллипсы на фазовой плоскости разделены, пространственного разделения можно добиться за счет последующей фокусировки. Для максимального акцептанса мы выбираем

$$2 \frac{e}{E} = |\Delta x'_m| \quad (4.54)$$

с тем ограничением, чтобы это выражение было совместимо с условием  $\delta \leq \pi/4$ .

В первой области, где  $\delta \leq \varphi/2$ , мы получаем выражения для аксептанса

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{a}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4.55)$$

и для коэффициента заполнения

$$\sin \delta = 2 \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{\rho}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{\rho}{a} (1 - \cos \varphi). \quad (4.56)$$

Вводя понятие «длины магнита, измеренной по прямой»  $L = 2\rho \sin(\varphi/2)$ , мы можем записать аксептанс в виде

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{aL}{4\rho} = \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{e}{4p_0} aLB. \quad (4.55a)$$

Из этого важного соотношения явствует, что аксептанс магнита, разделяющего по импульсам, пропорционален произведению ширины зазора на длину  $L$  и напряженность поля. Иначе говоря, это означает, что для данного магнита наибольшее разрешение по импульсам достигается выбором такой оптики, при которой пучок очень широкий и полностью заполняет всю апертуру [13].

Согласно выражению (4.56), условие  $\delta \leq \varphi/2$  эквивалентно соотношению

$$\left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \leq \frac{a}{2\rho \sin(\varphi/2)} = \frac{a}{L}.$$

Это требуется почти всегда, и, следовательно, во всех случаях, представляющих интерес с практической точки зрения, мы находимся в первой области, где  $\delta \leq \varphi/2$ .

Для полноты картины мы напишем также выражение для аксептанса во второй области, где  $0 < \varphi/2 \leq \delta \leq \pi/4$ . Мы имеем

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \delta, \quad (4.57)$$

где

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta p}{p_0} \frac{2\rho}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2}.$$

Коэффициент заполнения опять дается формулой (4.56), и, следовательно, условие  $\varphi/2 \leq \delta \leq \pi/4$  эквивалентно выражению

$$\frac{a}{L} \leq \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \leq \frac{\rho \sqrt{2}}{L} \frac{a}{L}. \quad (4.58)$$

Если параметры магнита и требуемое отношение  $\Delta p/p_0$  таковы, что условие (4.54) несовместимо с  $\delta \leq \pi/4$ , то

максимальный аксептанс получается при выборе оптимального коэффициента заполнения, соответствующего  $\delta = \pi/4$ . При этом максимальном аксептансе можно затем вычислить минимальное относительное изменение импульса, выделяемое магнитом.

На основании формулы для аксептанса (4.55) можно сделать некоторые простые выводы относительно оптимальной конструкции магнитов для разделения по импульсам. Например, мы можем найти оптимальные параметры магнита, которые обеспечивают максимальный аксептанс при заданном выделяемом (относительном) интервале импульсов  $\Delta p/p_0$  и заданной стоимости магнита  $P$ . Продифференцировав выражение (4.55) по длине магнита  $l$  и ширине апертуры  $a$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{l}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} &= \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{a}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= 1. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Тогда при заданной стоимости магнита

$$P = P(l, a) = \text{const}$$

аксептанс  $\varepsilon$  максимален, если выполняется равенство

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial P} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial P} = 0. \quad (4.60)$$

Вводя в уравнении (4.60) обозначения

$$G = \frac{P}{a} \frac{\partial a}{\partial P} \quad \text{и} \quad H = \frac{P}{l} \frac{\partial l}{\partial P},$$

получаем, что оптимальный случай соответствует равенству

$$\frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{G}{H}. \quad (4.61)$$

Теперь мы должны сделать допущение о зависимости стоимости магнита  $P$  от его параметров  $a$  и  $l$ . Для магнитов различных типов и размеров эта зависимость меняется в весьма широких пределах, поэтому мы рассмотрим здесь только два крайних случая. Если поперечное сечение катушки пренебрежимо мало по сравнению с поперечным сечением магнита, а стоимостью катушек и расходуемой мощности можно пренебречь по сравнению со стоимостью стали, то зависимость стоимости от  $a$  и  $l$  имеет вид

$$P \sim a^2 l.$$

Тогда при  $G=1/2$  и  $H=1$  в оптимальном случае имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 2, \frac{\varphi}{2},$$

откуда  $\varphi=134^\circ$ . В магните без катушек, т. е. когда поле создается постоянным магнитом, указанные выше допущения остаются в силе, и максимальному аксептансу в плоскости  $\{x, x'\}$  при данной стоимости соответствует угол отклонения порядка  $134^\circ$ . Но в другой плоскости аксептанс  $\varepsilon_z$  пропорционален  $1/\varphi$ , поскольку в этой плоскости магнит можно рассматривать как коллиматорную щель. Следовательно, если мы хотим оптимизировать произведение аксептансов  $\varepsilon_z \varepsilon_x$ , то аналогично выражениям (4.59) получим

$$\frac{l}{\varepsilon_z \varepsilon_x} \frac{\partial}{\partial l} (\varepsilon_z \varepsilon_x) = \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}.$$

В нашем примере при  $G=1/2$  и  $H=1$  это приводит к следующему соотношению для оптимального угла отклонения:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2},$$

и, таким образом, максимальный фазовый объем может быть выделен при  $\varphi \rightarrow 0$ .

Если же стоимостью стали можно пренебречь по сравнению со стоимостью катушек и потребляемой мощности, то зависимость  $P$  от  $a$  и  $l$  при заданном поперечном сечении катушки имеет вид

$$P \sim (a + l).$$

Тогда при  $G=P/a$  и  $H=P/l$  оптимум для плоскости  $\{x, x'\}$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{l} \frac{\varphi}{2},$$

которое выполняется при  $a > l$  или при  $a \approx l$  и малых углах отклонения  $\varphi$ .

Для обычных отклоняющих магнитов типа изображенных на фиг. 2.2 приближенно можно написать

$$P \sim al,$$

и при  $G=H=1$  равенство (4.61) опять дает малые углы отклонения. Но из формулы (4.55a) явствует, что максимум аксептанса  $\varepsilon$  в этом случае очень пологий и оптимизация не дает большой практической выгоды.

## § 12. РАЗДЕЛЕНИЕ ПО МАССАМ

Частицы с нежелательной массой (фоновые частицы) можно разными способами выводить из пучка частиц высокой энергии, разделенного по импульсам. Чаще всего пользуются тем, что частицы с данным импульсом  $p$  и разными массами покоя  $m$  движутся с разными скоростями  $v$ , согласно выражению

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}. \quad (4.62)$$

В данном параграфе мы кратко остановимся на трех таких методах и сошлемся на более полные обзоры работ в этой быстро развивающейся области [14, 15].

Для пучков, состоящих из отдельных сгустков, можно пользоваться системой [16] (гл. 3, § 6), в которой продольное разделение, достигнутое в свободном от поля пространстве, преобразуется в поперечное разделение с помощью высокочастотного отклоняющего поля.

В непрерывных пучках интенсивность фоновых частиц можно уменьшить с помощью отклоняющей высокочастотной волны, бегущей вместе с пучком [17]. Если скорость волны равна скорости фоновых частиц, то на них действует постоянная отклоняющая сила, зависящая от их фазы относительно поля. Нужные же частицы сдвигаются по фазе относительно бегущей волны и снова движутся в первоначальном направлении после того, как сдвиг по фазе достигает  $2\pi$ . При этом они лишь немного смещаются в сторону.

С помощью двух одинаковых отклоняющих элементов (дефлекторов) такого типа [17], разделенных свободным от поля пространством, можно добиться полного разделения двух масс. Каждый дефлектор сдвигает по фазе частицы с одной массой относительно частиц с другой массой на одну длину волны.

Длина пространства, свободного от поля, выбирается таким образом, чтобы при входе во второй дефлектор нужные частицы были сдвинуты по фазе относительно начальной фазы в первом дефлекторе на  $180^\circ$ , а фоновые частицы — на  $90$  или  $270^\circ$ . Тогда траектории нужных частиц во втором элементе будут обратными траекториям в первом и их поперечное смещение будет скомпенсировано. В то же время те фоновые частицы, которые проходили через первый дефлектор при нулевом поле, пройдут через второй при максимальном поле и будут сильно отклонены. А те фоновые частицы, которые были сильно отклонены в первом дефлекторе, будут вырезаны ще-

левым поглотителем перед вторым дефлектором и вообще не попадут в него.

Метод разделения по массам с помощью поперечных или продольных высокочастотных полей находит все более широкое применение при получении сепарированных пучков частиц с очень большим импульсом. В ряде лабораторий были предложены и рассчитаны различные варианты высокочастотных сепараторов [18—22], и техническая разработка таких проектов ведется весьма интенсивно.

Для полного разделения масс в пучке заряженных частиц с импульсом до нескольких  $\Gamma\text{эв}/c$  чаще всего пользуются электростатическим масс-сепаратором [23—29]. Его действие основано на том, что при данном импульсе частицы ее отклонение в электрическом поле пропорционально  $1/v$  и, следовательно, зависит от ее массы, согласно выражению (4.62). Сепаратор такого типа будет рассмотрен подробнее в следующем параграфе.

### § 13. АКСЕПТАНС ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО МАСС-СЕПАРАТОРА

Поперечное сечение электростатического масс-сепаратора схематически показано на фиг. 4.9. Чтобы траектории нужных частиц были прямыми, на электрическое поле  $E$  обычно накладывают перпендикулярное ему не очень сильное магнитное поле  $B$ , которое компенсирует отклонение частиц в электрическом поле. Индукция магнитного поля определяется равенством

$$E + v_0 B = 0, \quad (4.63)$$

где  $v_0$  — скорость нужных частиц. Например, в сепараторе, изображенном на фиг. 4.9, магнитное поле создается двумя рядами проводников с током.

Если допустить, что у нужных и у фоновых частиц одинаковый импульс, то при малых угловых отклонениях для фоновой частицы можно написать

$$m\ddot{y} = pvy'' = e(E + vB). \quad (4.64)$$

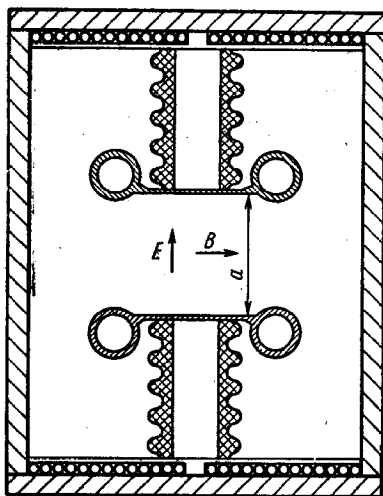
Отсюда, учитывая равенство (4.63), получаем уравнение траектории фоновой частицы

$$y'' = -\frac{eE}{pv_0} \frac{\beta - \beta_0}{\beta} = \frac{1}{q} \frac{\Delta\beta}{\beta}. \quad (4.65)$$

При такой записи разделяющая сила  $1/q = -eE/pv_0 = eB/p$  сепаратора для частиц с разбросом по скорости соответствует



отклоняющей силе  $1/\rho$  отклоняющего магнита для частиц с разбросом по импульсам. Поэтому по аналогии с дисперсией по импульсам  $D(s)$  можно ввести дисперсию по массе  $T(s)$ .



Фиг. 4.9. Поперечное сечение масс-сепаратора со скрещенными электрическим и магнитным полями.

Интегрируя уравнение (4.65) при  $\Delta\beta/\beta=1$  и  $T(0)=T'(0)=0$ , получаем

$$\begin{pmatrix} T \\ T' \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} \frac{l^2}{2} \\ \frac{1}{q} l \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Дисперсия по массе электростатического сепаратора может быть включена в расчеты оптики пучков на вычислительных машинах точно так же, как и дисперсия по импульсу. Например, в системе, описанной в гл. 2, § 11, имеется переключатель, с помощью которого любой магнитный элемент можно заменить сепаратором.

Введем следующие параметры сепаратора:  $l$  — длина;  $a$  — ширина зазора;  $V$  — напряжение. Затем перепишем урав-

нение (4.65) следующим образом:

$$\begin{aligned} y'' &= f \frac{V}{a}, \\ y' &= y'_0 + f \frac{V}{a} l, \end{aligned} \quad (4.65a)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \frac{e}{pc} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0} \right), \\ \frac{1}{\beta_0} &= \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}}. \end{aligned}$$

Преобразуя дисперсию по массе, которая дается выражением (4.66), обратно к средней плоскости сепаратора  $s = l/2$ , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{q} \frac{l^2}{2} \\ \frac{1}{q} l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} l \end{pmatrix}.$$

Следовательно, аналогично тому, как это было показано в гл. 2 для отклоняющих магнитов, сепаратор можно представить как «короткий» сепаратор, который отклоняет траектории фоновых частиц на угол

$$\Delta y'_m = f \frac{Vl}{a} \quad (4.67)$$

в точке  $s = l/2$ .

На фиг. 4.10 показана пропускная способность сепаратора на фазовой плоскости  $\{y, y'\}$ , соответствующая средней плоскости  $s = l/2$ . Выразим максимальное угловое отклонение  $A$  в пучке через коэффициент заполнения  $\sin \delta$ , где  $0 < \delta \leq \pi/4$ :

$$A \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{a}{l} \sin \delta. \quad (4.68)$$

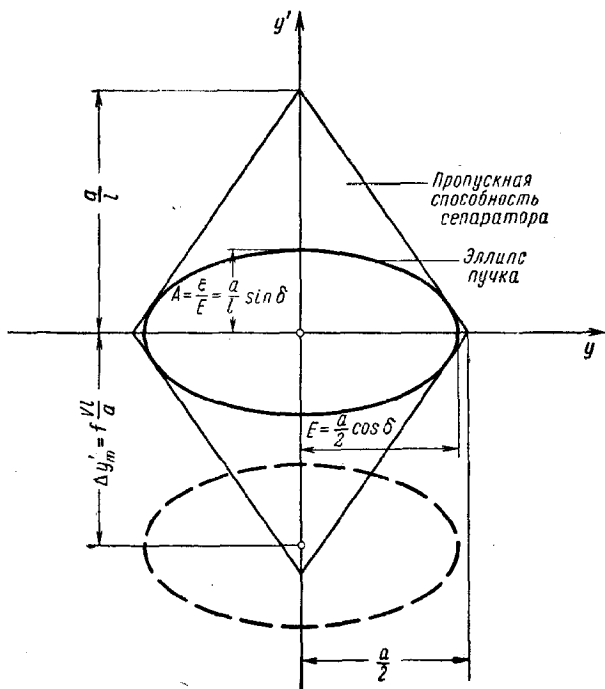
Наибольший эллипс пучка, удовлетворяющий этому уравнению и вписанный в фигуру, которой определяется пропускная способность сепаратора, показан на фиг. 4.10. Его оси совпадают с осями координат. Величина полуосей равна

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{2} \cos \delta, \\ A &= \frac{e}{E} = \frac{a}{l} \sin \delta, \end{aligned} \quad (4.69)$$

и, следовательно, эмиттанс дается выражением

$$\epsilon = \frac{a^2}{4l} \sin 2\delta. \quad (4.70)$$

Сепаратор смещает эллипс пучка фоновых частиц на фазовой плоскости в направлении  $y'$  на величину  $\Delta y'_m$ . Поэтому для полного разделения в фазовой плоскости величина  $\Delta y'_m$  должна быть по крайней мере такой же, как угловая ширина



Фиг. 4.10. Акцептанс сепаратора при коэффициенте заполнения  $\sin \delta$ .

$2A$  пучка. Тогда полное пространственное разделение достигается последующей фокусировкой. Если ввести сепарационное отношение

$$R = \frac{|\Delta y'_m|}{2A}, \quad (4.71)$$

то должно выполняться неравенство  $R \geq 1$ . Подставляя сюда соответствующие величины из выражений (4.67) и (4.69), получаем формулу для коэффициента заполнения

$$\sin \delta = \frac{1}{2} \frac{|f|}{R} \frac{V^2}{a^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.72)$$

где

$$R \geq 1.$$

Во избежание потерь в аксептансе сепаратора сепарационное отношение  $R$  всегда следует выбирать столь большим, чтобы выполнялось условие  $\sin \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , так как эмиттанс пучка (4.70) достигает максимального значения при  $\delta = \pi/4$ .

Из выражений (4.70) и (4.72) мы получим формулу для максимального эмиттанса пучка, который может быть выделен в зависимости от параметров сепаратора и от импульса

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{|f|}{R} V l \cos \delta \quad \left( \delta \leq \frac{\pi}{4} \right), \quad (4.73)$$

где

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} \frac{|f|}{R} \frac{V l^2}{a^2} \right)^2}.$$

Эти выражения аналогичны соответствующим выражениям (4.57) для магнита, разделяющего по импульсам. Величина  $\varepsilon$  называется аксептансом сепаратора. Его зависимость от импульса определяется коэффициентом  $f$ , который был введен в уравнениях (4.65а). В релятивистском случае мы имеем

$$f \approx \frac{1}{2} \frac{ec}{p^3} (m^2 - m_0^2) \quad \text{при} \quad \begin{cases} p^2 \gg m^2 c^2, \\ p^2 \gg m_0^2 c^2, \end{cases} \quad (4.74)$$

где  $m_0$  — масса покоя нужной, а  $m$  — фоновой частицы. Следовательно, если параметры сепаратора заданы, его аксептанс при больших импульсах частиц обратно пропорционален кубу импульса.

Дифференцируя выражения (4.73), находим относительные изменения  $\varepsilon$  в зависимости от относительных изменений параметров сепаратора  $l$ ,  $a$  и  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{l}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} &= 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \frac{a}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= 2 \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \frac{V}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} &= 1 - \operatorname{tg}^2 \delta, \end{aligned} \quad (4.75)$$

где

$$\sin \delta = \frac{1}{2} \frac{|f|}{R} \frac{V l^2}{a^2}.$$

Некоторые численные значения этих нормализованных частных производных от  $\varepsilon$  даны в табл. 7. Из данных таблицы видно, что при заданных напряжении  $V$  и ширине зазора  $a$

Таблица 7

Значения нормализованных производных  
аксептанса сепаратора при разных  
коэффициентах заполнения  $\sin \delta$

$\sin \delta$	$\frac{l}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial l}$	$\frac{a}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a}$	$\frac{V}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	-1	2	0
$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$	0	1	0,5
$\frac{1}{2} = 0,5$	0,333	0,667	0,667
$\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447$	0,5	0,5	0,75

аксептанс проходит через максимум при  $\sin \delta = 1/\sqrt{3}$ . В максимуме имеем

$$\left. \begin{aligned} l &= \sqrt[4]{\frac{4}{3}} a \sqrt{\frac{R}{|f|V}} = 1,077 a \sqrt{\frac{R}{|f|V}}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{2\sqrt[4]{27}} a \sqrt{\frac{|f|V}{R}} = 0,219 a \sqrt{\frac{|f|V}{R}} \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

при  $\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Начиная со значения, соответствующего  $\sin \delta = 1/\sqrt{3}$ , величина  $\varepsilon$  убывает при уменьшении  $l$  (из-за уменьшения разрешающей способности) и при возрастании  $l$  (из-за сжатия параллелограмма аксептанса сепаратора). При повышении напряжения на 20% аксептанс возрастает только на 6%, тогда как увеличение на 20% ширины зазора дает выигрыш в аксептансе, равный 14,2%.

Согласно формуле (4.73), при данной ширине зазора аксептанс сепаратора возрастает вдвое, если повысить напряжение в 4 раза и одновременно уменьшить его длину в 2 раза. При постоянном напряжении аксептанс возрастает пропорционально длине, если пропорционально увеличивать ширину зазора. В релятивистской области аксептанс сепаратора можно поддерживать постоянным, если и длину сепаратора и ширину апертуры увеличивать пропорционально третьей сте-

пени импульса. И лишь при малом коэффициенте заполнения  $\sin \delta \ll 1$  достаточно, согласно формуле (4.73), увеличивать только длину пропорционально  $p^3$ , поддерживая  $V$  и  $a$  постоянными. Но при приближении  $\sin \delta$  к величине  $1/\sqrt{3}$  или  $1$  к величине, определяемой выражением (4.76), аксептанс одиночного сепаратора уже нельзя увеличить таким способом. В этом случае полного разделения можно добиться в несколько ступеней [30], разделив весь сепаратор на небольшие сепараторы с фокусирующими линзами между ними, которые поддерживали бы ширину пучка достаточно малой.

Задача проектирования сепаратора с максимальным аксептансом при заданной стоимости несколько упрощается в силу того обстоятельства, что напряжение на сепараторе не может превышать пробивного напряжения. При  $V = V_{\text{макс}}$  аксептанс зависит только от длины  $l$  и ширины зазора  $a$ , и нам нужно выбрать эти параметры так, чтобы аксептанс  $\epsilon$  был максимальным при заданной стоимости сепаратора  $P = P(l, a) = \text{const}$ . Для этого должно выполняться условие (4.60)

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial P} - \frac{\partial \epsilon}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial P} = 0.$$

Пользуясь выражением (4.75) и записывая

$$G = \frac{P}{a} \frac{\partial a}{\partial P} \quad \text{и} \quad H = \frac{P}{l} \frac{\partial l}{\partial P},$$

мы получим соотношение для оптимального выбора параметров [24]

$$2 \operatorname{tg}^2 \delta = \frac{1}{1 + G/H}. \quad (4.77)$$

На практике при некотором относительном увеличении ширины зазора и при таком же относительном увеличении длины стоимость повышается примерно одинаково. Таким образом, мы имеем равенство  $G = H$ , так что оптимальный коэффициент заполнения  $\sin \delta = 1/\sqrt{5}$ . Согласно выражению (4.72), оптимальное отношение длины к ширине зазора в этом случае будет равно

$$\frac{l}{a} = \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \sqrt{\frac{R}{|f|V}} = 0,946 \sqrt{\frac{R}{|f|V}}. \quad (4.78)$$

В качестве численного примера рассмотрим задачу о выделении антипротонов с импульсом  $1,5 \text{ Гэв}/c$  на фоне  $K$ -мезонов. Так как

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0} = -0,116,$$

при минимальном сепарационном отношении  $R=1$  и напряжении сепаратора  $V=600$  кВ получаем

$$|f|V = 0,464 \cdot 10^{-4}.$$

Согласно выражению (4.78), оптимальное отношение  $l/a$  равно

$$\frac{l}{a} = 139.$$

Если выбрать ширину зазора  $a=10$  см, то длина сепаратора должна быть равна 13,9 м, а аксептанс  $\epsilon$  равен

$$\epsilon = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \cdot \text{м}.$$

Если требуется получать чистые пучки нестабильных частиц, например, таких, как  $K$ -мезоны, длина распада  $\lambda$  которых порядка длины сепаратора, удобно ввести эффективный аксептанс

$$\epsilon_{\text{эфф}} = e^{-l/\lambda} \epsilon, \quad (4.79)$$

поскольку число проходящих частиц пропорционально  $\epsilon_{\text{эфф}}$ . При данном напряжении  $V$  и данной ширине зазора  $a$  величина  $\epsilon_{\text{эфф}}$  проходит через максимум, когда выполняется соотношение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial l} = \frac{1}{\lambda} \epsilon,$$

которое, согласно первому из выражений (4.75), эквивалентно равенству

$$l = \lambda(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \delta). \quad (4.80)$$

Пользуясь этим равенством, по заданным значениям  $a$  и  $V$  можно определить численно оптимальную длину  $l$  сепаратора, выразив  $\operatorname{tg}^2 \delta$  через  $a$ ,  $V$  и  $l$  на основании формулы (4.72). Очевидно, что оптимальная длина сепаратора меньше  $\lambda$  при любых значениях  $\lambda$ , а соответствующий оптимальный коэффициент заполнения  $\sin \delta$  меньше  $1/\sqrt{3}$  и приближается к этому значению только при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Teng L. C., Internal Report LCT-26, Argonne (1961).
2. Baker W. F., Nucl. Instr. Meth., 20, 55 (1963).
3. Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.37, Hamburg (1958).
4. Walsh T. R., AERE A/R 2711, Harwell (1958).
5. Hereward H. G., CERN PS/Int. TH 59-5, Geneva (1959).
6. Steffen K. G., Hultschig H., Kern W., DESY-Notiz A 2.70, Hamburg (1960).
7. Courant E. D., Snyder H. S., Ann. of Phys., 3, 1 (1958).
8. Courant E. D., Internal Report EDC 10, Brookhaven (1954).

9. Lanza G., CEA-3, Cambridge (1956).
10. Steffen K. G., CEA-45, Cambridge (1958).
11. Kern W., Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.80, Hamburg (1961).
12. Hine M. G. N. CERN PS-MGMH/Note 22, Geneva (1958).
13. Steffen K. G., DESY-Notiz A 2.81, Hamburg (1961).
14. Вагин В. А., Котов В. И., Семенюшкин И. Н., УФН, 82, № 4, 707 (1964).
15. Deutsch M., JINR E-1805, Dubna (1964).
16. Alvarez R. A., Brown K. L., Panofsky W. K. H., Rockholt C. T., Rev. Sci. Instr., 31, 556 (1960).
17. Blewett J. P., в книге International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, 1959, p. 422.
18. Montague B. W., CERN PS/Int. AR/P Sep/60-1, Geneva (1960).
19. Schnell W., CERN/AR/61-5, Geneva (1961).
20. Geiger M., Lapostolle P., Montague B., CERN/AR/61-26, Geneva (1961).
21. Murray J. J., Nucl. Instr. Meth., 20, 26 (1963).
22. Bell M., Bramham P., Fortune R. D., Keil E., Montague B. W., CERN AR/Int. P Sep/63-7 (1963).
23. Murray J. J., UCRL-3492, Berkeley (1957).
24. Steffen K. G., DESY-Notiz A 234, Hamburg (1958).
25. Germain C., CERN 59-38, Geneva (1959).
26. Murray J. J., в книге International Conference on Instrumentation for High Energy Physics, Berkeley, 1959, p. 25.
27. Good M. L., в книге International Conference on Instrumentation for High Energy Physics, Berkeley, 1959, p. 34.
28. King N. M., NIRNS/R/2, Harwell (1960).
29. King N. M., Cox R. G., NIRL/R/10, Harwell (1961).
30. Courant E. D., Marshall L., Rev. Sci. Instr., 31, 193 (1960).
- 31\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, М., 1965.
- 32\*. Френкель Я. И., Статистическая физика, М.—Л., 1948.



## ОСНОВНЫЕ МОНОГРАФИИ И ОБЗОРЫ

- «Design of Beam Transport Systems»  
Auberson G., Sedman E. C., CERN MPS/Int. DL 61—36 and 62—23, Geneva, 1961—1962.
- «Optics of High Energy Beams»  
Chamberlain O. Ann. Rev. Nucl. Sci., 10, 161 (1960).
- «Methods to Calculate Beam Transport Systems»  
de Raad B., CERN AR/Int. GS 62-5, Geneva (1962).
- «Beam Transport and Analysis for CERN P. S.»  
Hine M. G. N., CERN PS-MGNH/Note 22, Geneva (1958).
- «Beam Transport; A Selected, Annotated Bibliography»  
Kepple R., ANL 6602, Argonne National Laboratory (1962).
- «Theoretical Techniques of High Energy Beam Design»  
King N. M., Progr. in Nucl. Phys., 9, 73 (1963).
- «Beam Optics»  
Luckey D., в книге Techniques of High Energy Physics, D. M. Ritson, ed., New York, 1961, p. 403 (имеется перевод в сб. «Экспериментальные методы в физике высоких энергий», ред. Д. Ритсон, М., 1964, стр. 401).
- «Расчет магнитных фокусирующих систем для пучков частиц высокой энергии»  
Миллер В. В., ПТЭ, № 6, 3 (1964).
- «Strong Focusing Lenses»  
Septier A., в книге Advances in Electronics and Electron Physics, vol. 14, New York, 1961, p. 85.
- «Методы сепарации частиц высоких энергий»  
Вагин В. А., Котов В. И., Семенюшкин И. Н., УФН, 82, № 4, 707 (1964).
- \* «The Transport of Charged Particle Beams»  
Vanford A. P., London, 1966.
- \* «Quadrupole Optics»  
Hawkes P. W., в книге Springer Tracts in Modern Physics, vol. 42, Berlin, 1966.
- \* «Focusing of charged particles»  
ed. Septier A., vol. I, II, New York—London, 1967.
- \* «Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами»  
Явор С. Я., М., 1968.
- \* «Фокусировка и разделение частиц высоких энергий по массам»  
Котов В. И., Миллер В. И., М., 1969.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрации квадрупольного второго и третьего порядков 61  
— отклоняющего магнита второго порядка 98  
— хроматические 44, 64  
Аберрационные коэффициенты квадрупольных 75; см. также Нелинейные коэффициенты  
Акseptанс 74, 181  
— канала ФОДО 198  
— магнита, разделяющего по импульсам 203  
— электростатического масс-сепаратора 209  
Ампер-витки катушки квадрупольного 77  
Амплитудные функции 182, 195  
Аналоговая вычислительная машина 39, 113, 119, 122, 190  
— — — блок-схема 41  
— — — генератор ступенчатого сигнала 40, 44, 119, 192  
Антисимметричный дублет 35, 36  
Апертурное отношение 199, 201  
Апертурные ограничения 177  
Ахроматическое преобразование 49, 65
- Бездисперсионные отклоняющие системы 124  
Большой разброс по импульсам 121
- Вакуумная камера 84, 92, 172, 173  
Вектор дисперсии 104  
Взаимосвязь между двумерными фазовыми объемами 176  
Визуализация нулевой оси поля 172  
Водяное охлаждение 77  
Водяной контур 78  
Возбуждение 78, 81, 82, 84, 85, 100, 103  
Возмущение 62, 63, 99, 100  
Временная структура пучка 135  
Выделение антипротонов 215  
Высокочастотный масс-сепаратор 209
- Гармоники напряжения 60  
Генератор ступенчатого сигнала 40, 119, 192  
Гидравлическая система 172  
Гиперболически закругленные края полюсов 71, 81, 91, 92, 102  
Гиперболический профиль полюсов 74  
Главные плоскости дублета 34—36  
— — в рассеивающей плоскости квадрупольной линзы 28  
— — — собирающей плоскости квадрупольной линзы 27  
— — триплета 36—38  
— траектории 24, 61, 98, 187  
Годоскопический спектрометр 142  
Градиент поперечного поля 58  
Граничные траектории 177  
Графическое построение траекторий 34, 40
- Давление охлаждающей воды 78  
Датчики Холла 84  
Двумерное краевое поле 101  
Двухчастичное взаимодействие 143, 146, 148  
Декартова система координат 12, 93  
Дефлектор 208  
Диспергирующая сила 77  
Диспергирующее действие магнита 202  
Диспергирующий фактор 46  
Дисперсия 98, 104, 113, 124, 127, 155, 193  
— по массе 210  
— секторного магнита 104  
— синхротронного магнита 116  
Длина магнита, измеренная по прямой 205  
— распада 216  
— траектории 135, 136  
Длинный квадруполь 72  
Допуски 54, 169  
Дублет 34
- Закругленные края полюсов 102  
Запаздывающие счетчики 135

- Захватываемый интервал импульсов 65
- Идеализированная форма краевого поля 102; см. также Линеаризированное поле
- Измерение угловых распределений 148
- Изохронные отклоняющие системы 135
- Импульсный режим 15, 16
- Инвариантность двумерного фазового объема 176
- Интеграл от поля 68, 91, 101  
— — траектории 125
- Интегральная длина отклонения 120  
— — фокусировки 120
- Канал из квадрупольных линз 202
- Катушка 51—54, 77
- Квадратичное преобразование в отклоняющем магните 99
- Квадрупольная линза 18  
— — конструкция 55, 74  
— — конфигурация поля 19  
— — поперечные сечения 52  
— — симметрия 87, 89  
— — трехмерная 70
- Кинематика двухчастичного взаимодействия 145
- Кинематическая кривая 148
- Классический квадруполь 54
- Клинообразная магнитная линза 16
- Короткие линзы 113, 121
- Короткий квадруполь 72  
— сепаратор 211
- Косинусообразная траектория 24
- Коэффициент заполнения 200, 204, 211  
— модуляции 191, 195, 199—202
- Коэффициенты второго порядка 100  
— линейного преобразования квадруполь 72  
— преобразования в спектрометре 153
- Краевая фокусировка 110, 113, 125
- Краевые поля 22, 66, 70, 78, 91, 101, 102, 105, 109, 113
- Крестообразная апертура 54, 177, 190, 202
- Криволинейная система координат 87, 93
- Круглая апертура 177
- Линеаризированное краевое поле 70, 102, 113
- Линейного поля интеграл 85
- Линейное преобразование 22, 95, 115, 117, 182
- Линза, образованная линейными проводниками с током 14  
— — параболическими поверхностями с током 15
- Линия изображений 159  
— фокусов 145
- Магнит для разделения по импульсам 206  
— типа оконной рамы 91  
— Ш-образного типа 91
- Магнитная катушка, см. Катушка  
— проницаемость 15
- Магнитные линзы, типы 13
- Магнитный клин 109, 111  
— спектрометр 141
- Максимальный параллелограмм 180
- Масс-сепаратор высокочастотный 209  
— электростатический 209
- Матрица из счетчиков 143  
— полного преобразования 23  
— — триплета 38  
— преобразования 29  
— — антисимметричного дублета 36  
— — в тонкой линзе 111  
— — дублета 35  
— — определитель 176
- Метод гибкого проводника с током 165, 173  
— Монте-Карло 177
- Мишени размер (высота) 146, 153, 160, 164, 165
- Мультипольные коэффициенты 60
- Наклон спектрометра 145, 152
- Наложение отклоняющего поля и поля с квадрупольной симметрией 92
- Некруглые апертуры линз 51
- Нелинейные коэффициенты 63, 98; см. также Аберрации и Аберрационные коэффициенты
- Нестабильные частицы 216
- Обратное преобразование 24
- Огибающая 185, 188, 190, 199  
— уравнение 185, 186
- Одиноквадрупольная линза 65
- Определение плоскости симметрии поля 172

- Определение фазового объема 173  
 Определитель матрицы 23, 176  
 Оптимальные параметры магнита 206  
 Оптимизация системы 190  
 Оптическая сила магнита 121  
 — — фокусировки 108  
 — юстировка магнита 172  
 Осевая траектория 87, 96, 109  
 Отклоняющие системы бездисперсионные 124  
 — — — изохронные 135  
 Отклоняющий магнит 87  
 Отражательная пластина 71, 80, 84, 91, 102  
 Ошибка в силе квадрупольной линзы 169  
 — — — отклоняющего магнита 171  
 Параллелограмм на фазовой плоскости 180  
 Параметры синхротронного магнита 119  
 Пережатка 182, 204  
 Периодическая амплитудная функция 195  
 Периодический канал ФОДО, аксептанс 198  
 — — — огибающая 193  
 Плоскость изображения 25  
 — симметрии 87  
 Плотность тока 15, 77  
 — частиц 174  
 Повернутый квадруполь 158  
 Поворот квадрупольной линзы 170  
 — отклоняющего магнита 171  
 Показатель неоднородности поля 116  
 Полезная апертура линзы 84, 85, 92  
 Поле с квадрупольной симметрией 87, 89  
 Полный угол отклонения 119, 131  
 Поля рассеяния, см. Краевые поля  
 Поперечная дисперсия, см. Дисперсия  
 Поперечное смещение квадрупольной линзы 170  
 — увеличение, см. Увеличение  
 Поперечные сечения квадрупольных магнитных линз 52  
 — — отклоняющих магнитов 89  
 Поправочные множители для приближения тонкой линзы 30  
 Пороговый счетчик 152  
 Потребляемая мощность 78  
 Представляющие точки траекторий 31, 177  
 Преобразование для свободного поля пространства 23  
 — квадрупольной линзы 31  
 — эллипса, см. Эллипс на фазовой плоскости  
 Пробные траектории 177  
 Программы для цифровых вычислительных машин 26  
 Продольная дисперсия 144, 159  
 Продольное увеличение 160  
 Произведение матриц 23  
 Пропускная способность 174, 177, 178  
 Пространство, свободное от поля 23  
 Протяженность краевого поля 80  
 — поля рассеяния 108  
 Прямая индикация огибающих пучка 185  
 Прямоугольная модель (модель с резкой границей поля) 22, 104, 115, 120  
 — апертура 51  
 Прямоугольный магнит 112, 120  
 Пучки с криволинейной осевой траекторией 87  
 Пучок, состоящий из сгустков 208  
 Рабочие характеристики спектрометра 155  
 Разгруппирователь 136  
 Разделение по импульсам 135  
 — пучков 87  
 Разложение краевого поля 109  
 — составляющих поля 58  
 Разрешение по импульсам 160  
 — спектрометра 146  
 Расходящийся пучок 182  
 Регулировочные приспособления на станине магнита 172  
 Ромбовидный квадруполь 53  
 Светосила спектрометра 150  
 СВЧ-дефлектор 163  
 Связь между  $x$  и  $z$  170  
 Сгруппированный пучок 162  
 Сгустки 135, 208  
 Секступольный магнит 158  
 Секторная фокусировка 115  
 Секторный магнит 103, 120  
 — — пропускная способность 178  
 Сепаратор 209  
 Сепарационное отношение 212  
 Сепарированные пучки 209  
 Сглаживающая система 136  
 Сила Лоренца 11  
 — магнита 101  
 Сильная фокусировка 17

- Симметрии условия 57, 92  
 Симметричный прямоугольный магнит 113  
 — триплет из квадрупольных линз 38  
 Синусообразные траектории 24  
 Синхротронный магнит 91, 115, 120  
 — — пропускная способность 179  
 Система координат, декартова 11, 93  
 — — криволинейная 87, 93  
 — — цилиндрическая 14, 58  
 — — счетчиков 145, 156, 159  
 Скорость потока охлаждающей воды 78  
 — — частиц 208  
 Слабая фокусировка 17, 116  
 Сложные системы 124  
 Сопряженные точки 189  
 — траектории 188  
 Спектрометр годоскопический 142  
 — из одного квадрупольного 163  
 — с изображением 142, 156, 159  
 — — наклонным окном 144, 156, 158  
 — — нулевой дисперсией 163  
 — — полукруговой фокусировкой 161  
 Стабильность поля 169  
 Станина магнита 172  
 Стоймость магнита 206  
 Строго дефокусирующая система 49  
 Счетчики 143, 145, 156, 158, 159
- Телесный угол захвата 65, 92  
 Теорема Лиувилля 174  
 Тонкая линза 27, 29  
 Точность в возбуждении квадрупольного 169  
 Траектории, выражение через функцию огибающей 187  
 Транспортировка пучков 26, 56, 86, 172  
 Транспортирующие системы 65  
 Трехмерная квадрупольная симметрия 70  
 Триплет 38
- Увеличение линейное 25  
 — продольное 160  
 — угловое 25  
 Угловая апертура 146  
 — огибающая 185, 190, 193  
 Угловое увеличение 25  
 Угол входа в магнит 119  
 —  $\delta(s)$  96  
 — захвата 146, 160
- Угол  $\psi$  159  
 — рассеяния 143, 148, 156, 158  
 Уравнение для потенциала 59, 69  
 Уравнения Максвелла 14, 57, 94  
 — траектории 13, 96, 122  
 — — в квадрупольной линзе 19  
 Устойчивость гибкого проводника с током 165
- Фазовая плоскость 30, 31  
 — функция 187  
 Фазовый объем 174, 177  
 — — двумерный 176  
 — сдвиг на половине периода 195  
 — эллипс 180, 181  
 ФODO канал, см. Периодический канал ФODO  
 Фокусирующая сила 18, 20  
 Фокусное расстояние 13, 27, 28, 37, 38  
 Фоновые частицы 208  
 Функция огибающей 185
- Характеристики спектрометра 155  
 Хроматическая aberrация 44, 46, 48, 64, 158
- Цилиндрические координаты 14, 58
- Шиммы 70, 91  
 Ширина яма 78  
 Ш-образный магнит 91
- Эквивалентный импульс проводника 166  
 Эквипотенциальная плоскость симметрии 87, 97  
 Электростатический масс-сепаратор 209  
 Эллипс пучка, см. Фазовый эллипс Эмиттанс 182  
 Эффект Коттона—Мутона 172  
 Эффективная апертура 177  
 — длина 66, 67, 72, 119  
 — — магнита, измеренная по прямой 127  
 — отклоняющая сила 104, 117, 119  
 — фокусирующая сила 117, 119  
 Эффективные параметры синхротронного магнита 119, 125
- Юстировка магнитов 169, 172  
 — пучка 169  
 Юстировочная плоскость 172  
 Юстировочные метки 172
- Ядро отклоняющего (синхротронного) магнита 91

## Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	7
<b>ГЛАВА 1. Оптика заряженных частиц в системах из квадрупольных линз . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Общие уравнения траектории . . . . .	11
§ 2. Типы магнитных линз . . . . .	13
§ 3. Линейное преобразование траекторий в квадрупольной линзе . . . . .	19
§ 4. Главные траектории и фокусирующие свойства . . . . .	22
§ 5. Программы для цифровых вычислительных машин . . . . .	26
§ 6. Приближение тонкой линзы . . . . .	27
§ 7. Графический метод . . . . .	30
§ 8. Дублеты и триплеты . . . . .	34
§ 9. Аналоговая вычислительная машина . . . . .	39
§ 10. Хроматическая аберрация . . . . .	44
§ 11. Поперечные сечения магнитных квадрупольных линз . . . . .	51
§ 12. Разложение поля с квадрупольной симметрией . . . . .	56
§ 13. Аберрации второго и третьего порядков . . . . .	61
§ 14. Краевые поля и эффективная длина квадрупольной линзы . . . . .	66
§ 15. Пример конструкции квадрупольной линзы . . . . .	74
Литература . . . . .	85
<b>ГЛАВА 2. Оптика заряженных частиц в отклоняющих магнитах . . . . .</b>	<b>87</b>
§ 1. Криволинейная система координат . . . . .	87
§ 2. Типы отклоняющих магнитов . . . . .	88
§ 3. Разложение поля с плоскостью симметрии . . . . .	92
§ 4. Линейное преобразование траектории в отклоняющем магните . . . . .	95
§ 5. Аберрации второго порядка . . . . .	98
§ 6. Двумерное краевое поле . . . . .	101
§ 7. Секторный магнит . . . . .	103
§ 8. Магнитный клин . . . . .	109
§ 9. Прямоугольный магнит . . . . .	112
§ 10. Синхротронный магнит и эффективная длина . . . . .	115
§ 11. Аналоговая вычислительная машина . . . . .	119
§ 12. Уравнение траектории в случае большого разброса по импульсам . . . . .	121
Литература . . . . .	123

ГЛАВА 3. **Сложные системы и спектрометры** . . . . . 124

§ 1. Бездисперсионные отклоняющие системы . . . . .	124
§ 2. Длина траектории и изохронные отклоняющие системы . . . . .	135
§ 3. Типы спектрометров . . . . .	141
§ 4. Спектрометр с наклонным окном . . . . .	144
§ 5. Спектрометр с изображением . . . . .	159
§ 6. Примеры спектрометров с изображением . . . . .	161
§ 7. Устойчивость гибкого проводника с током . . . . .	165
§ 8. Юстировка пучка и допуски . . . . .	169
Литература . . . . .	173

ГЛАВА 4. **Оптика огибающих и пучки частиц** . . . . . 174

§ 1. Теорема Лиувилля . . . . .	174
§ 2. Пропускная способность магнитной системы . . . . .	177
§ 3. Пропускная способность одиночного магнита . . . . .	178
§ 4. Линейное преобразование фазового эллипса пучка . . . . .	180
§ 5. Уравнение огибающей . . . . .	185
§ 6. Выражение траекторий через функцию огибающей . . . . .	187
§ 7. Представление огибающей при помощи сопряженных траекторий . . . . .	188
§ 8. Аналоговая вычислительная машина . . . . .	190
§ 9. Огибающая в периодическом канале ФОДО . . . . .	192
§ 10. Акцептанс периодического канала ФОДО . . . . .	198
§ 11. Разделение по импульсам . . . . .	202
§ 12. Разделение по массам . . . . .	208
§ 13. Акцептанс электростатического масс-сепаратора . . . . .	209
Литература . . . . .	216

Основные монографии и обзоры . . . . . 218

Предметный указатель . . . . . 219

**К. Штеффен**  
**ОПТИКА ПУЧКОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ**

Редактор *Е. Куранский*

Художник *А. Смеляков*

Художественный редактор *П. Некунда*

Технический редактор *Л. Кондюкова*

Корректор *Р. Новик*

Сдано в производство 17/X 1968 г. Подписано к печати 26/III 1969 г. Бумага тип. № 3  
60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> = 7,09 бум. л., 14,17 печ. л., в т/ч 1 вкл. Уч.-изд. л. 12,10. Изд. № 2/4863

Цена 1 р. 21 к. Зак. 1475.

Темплан 1969 г. издательства „Мир“, пор. № 48

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29