УДК 539.105

При экспериментальном исследовании ядерных взаимодействий высокой энергии возникает необходимость широко использовать методы математической статистики. С одной стороны, это связано с большими флуктуациями угловых, энергетических и других характеристик вторичных частиц, рожденных в неупругих процессах, с другой — с отсутствием до настоящего времени удовлетворительной теории этих процессов.

Настоящая работа представляет собой первую попытку систематизировать специфические и часто нестандартные методы статистической проверки гипотез о свойствах неупругих взаимодействий частиц большой энергии.

Книга предназначена для научных работников (в первую очередь экспериментаторов), аспирантов и студентов, специализирующихся в области ядерной физики и физики высоких энергий.

С. А. Азимов, Г. М. Чернов

Статистические методы в физике высоких энергий

Издательство „ФАН" Узбекской ССР

Ташкент - 1970

2-3-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы математической статистики находят все возрастающее применение в различных областях современной физики, целые разделы которой, как известно, в значительной мере базируются на вероятностных методах. Другой не менее важный аспект приложений математико-статистических методов — обработка и анализ экспериментальных исследований.

В последние годы было опубликовано несколько руководств по применению методов математической статистики в экспериментальной физике. В этих руководствах, как правило, сжато излагается вся или почти вся система приемов обработки результатов измерений, что делает такие издания полезными справочниками для физиков-экспериментаторов. Примером может служить книга «Статистика для физиков» Д. Худсона (издательство «Мир», 1967 г.). Особо следует отметить фундаментальную монографию Л. Яноши «Теория и практика обработки результатов измерений» (издательство «Мир», 1965 г.), выгодно отличающуюся от других книг аналогичного назначения богатым набором примеров из области ядерной физики и физики высоких энергий.

Однако современное состояние физики высоких энергий, например, таково, что некоторые стандартные приемы обработки результатов измерений, представляющие по сути дела лишь первый этап анализа экспериментальных данных, оказываются зачастую недостаточными для получения обоснованных сведений о характере сложных физических процессов или для сравнения с различными теоретическими моделями. Наиболее отчетливо, вероятно, это можно увидеть из анализа современного положения в одной из важнейших проблем физики высоких энергий — проблеме множественной генерации частиц в ядерных взаимодействиях при больших энергиях. При экспериментальном исследовании этих взаимодействий возникают своеобразные трудности, связанные, с одной стороны, с отсутствием до настоящего времени удовлетворительной теории сильных взаимодействий, а с другой — с тем обстоятельством, что почти все характеристики элементарного акта множественного образования частиц при больших энергиях подвержены сильнейшим флуктуациям. Отсюда вытекает необходимость широкого использования математико-статистических методов исследования (в особенности методов статистической проверки гипотез).

Число вторичных частиц в ядерных взаимодействиях при не слишком высоких энергиях сравнительно невелико (малые выборки), а механическое суммирование многих актов ядерных взаимодействий далеко не всегда возможно, поэтому процедура статистического анализа таких взаимодействий, даже при условии хорошего владения стандартными приемами математической статистики, оказывается вовсе не тривиальной. Часто требуется доказать возможность использования в данных конкретных условиях того или иного хорошо известного статистического критерия; не менее часто приходится видоизменять их или даже придумывать новые статистические критерии, подходящие для данной задачи.

В упомянутых выше руководствах по применению математико-статистических методов в экспериментальной физике вопросам статистической проверки гипотез уделено не очень много внимания — в них излагаются общие стандартные методы, разработанные в основном для больших статистических выборок.

Предлагаемая нами работа представляет собой попытку собрать и систематизировать опубликованный в периодической литературе материал по вопросам статистического анализа характеристик вторичных частиц из ядерных взаимодействий большой энергии. Эта небольшая книга, демонстрирующая, в сущности, возможность извлекать с помощью математико-статистических методов максимальную информацию из нередко весьма скудных экспериментальных данных, принесет, на наш взгляд, некоторую пользу физикам-экспериментаторам как дополнение к общим руководствам по приложениям статистики в физике. Мы надеемся также, что данная книга научит читателя относиться к использованию статистических методов с большой осторожностью, ибо физическая действительность оказывается значительно богаче искусственных вероятностных схем.

Основное содержание настоящей работы составляют главы II и III, посвященные методам статистического анализа угловых распределений вторичных частиц, рожденных в актах множественного образования при высоких энергиях. (Описанные в них методы, однако, могут быть применены не только для анализа угловых распределений и не только при исследовании множественной генерации частиц). Мы сочли целесообразным предварить эти главы очень кратким напоминанием о некоторых основных понятиях и приемах математической статистики (гл. I).

Наша книга преследует методологические цели. Это значит, что главным в ней являются применяемые при анализе физического опыта статистические приемы, тогда как сами физические задачи и сделанные на основе математико-статистического анализа выводы носят иллюстративный характер. Тем не менее, в педагогических целях, значительное место мы отвели физике явлений, а также деталям расчетов, что делает книгу вполне доступной широкому кругу студентов-физиков.

Авторы будут признательны читателям за указания на недостатки и упущения, которые могут встретиться в данной книге, представляющей собой первую попытку систематизации приемов статистической проверки гипотез в одной из труднейших областей современной физики.

Глава I

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Ниже рассматриваются некоторые общие сведения из математической статистики, излагаемые с единственной целью напомнить читателю основные понятия и методы этой дисциплины, широко используемые в настоящей книге. Весьма краткое изложение основ статистики, разумеется, не может претендовать на какую-либо полноту и строгость. Мы предполагаем, что читатель знаком с теорией вероятностей и математической статистикой в объеме обычных курсов, небольшая часть из которых перечислена в списке литературы [9, 10, 11, 15, 30, 34].

Мы не будем останавливаться на определении понятий вероятности испытания, события и других, а также на рассмотрении простейших соотношений между вероятностями, т. е. на том, что составляет аксиоматику теории. Постулированные в теории вероятностей свойства, вообще говоря, интуитивно очевидны. Важным понятием является независимость событий.

Рассмотрение испытаний с некоторым числом (конечным или бесконечным) исходов (событий) приводит к понятию случайной величины (дискретной или непрерывной) и соответствующему распределению вероятностей. Говорят, что случайная величина X имеет дискретное распределение, если существует конечная или бесконечная последовательность значений x_i с соответствующими вероятностями p_i, так что

$$\left.\begin{aligned} P(X = x_i) = p_i \geqslant 0 \\ \sum_i p_i = 1 \end{aligned}\right\}, \tag{1.1}$$

где P — вероятность.

Предыдущее определение легко обобщается для непрерывной случайной величины. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$, если

$$\left.\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \\ f(x) \geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

Не составляет трудностей и обобщение понятия распределения вероятностей на многомерные случайные величины. Последние также могут иметь либо дискретные распределения, либо плотность вероятности, которая определяет вероятность попадания в некоторую область как интеграл от плотности по этой области.

Случайные величины характеризуются также функцией распределения $F(x)$, представляющей собой вероятность $P\,(X<x)$. Легко видеть, что для непрерывного случая

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \end{aligned}\right\}. \tag{1.3}$$

В практических задачах большое значение имеют знание среднего значения случайной величины, реализующейся в ряде испытаний, а также меры разброса значений случайной величины вокруг среднего. Для этой цели в статистике вводятся понятия математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ математическое ожидание (среднее значение) вычисляется по формуле

$$\nu(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \tag{1.4}$$

если интеграл существует. Для дискретного случая имеем аналогичное соотношение, в котором интеграл заменен суммой, а вместо плотности вероятности $f(x)$ фигурируют вероятности $p(x_i)$ дискретных значений x_i. Среднее значение произвольной функции $g(X)$ случайной величины X определяется формулой

$$\nu[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx. \qquad (1.5)$$

При практическом вычислении математических ожиданий важное значение имеет ряд теорем:

1. Математическое ожидание постоянной величины есть сама эта постоянная:

$$\nu(C) = C. \qquad (1.6)$$

2. Математическое ожидание произведения постоянной и случайной величин есть произведение постоянной на математическое ожидание случайной величины:

$$\nu(CX) = C\nu(X). \qquad (1.7)$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$\nu\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \nu(X_i) \qquad (1.8)$$

(существенно при этом, что независимости величин X_i не требуется).

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\nu\left(\prod_i X_i\right) = \prod_i \nu(X_i). \qquad (1.9)$$

Наиболее распространенной характеристикой рассеивания случайной величины вокруг ее среднего значения является среднее значение квадрата отклонения

$$\nu[X - \nu(X)]^2 \equiv \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \nu(X)]^2 f(x)\, dx, \qquad (1.10)$$

называемое дисперсией случайной величины X. Квадратный корень $\sigma(X)$ из дисперсии $\sigma^2(X)$ случайной величины X носит название среднего квадратического от-

клонения. Из структуры формулы (1.10) ясно, что чем меньше разброс величин x_i вокруг их среднего значения, тем меньше дисперсия.

При практическом вычислении дисперсий важны также следующие теоремы:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$\sigma^2(C) = 0. \qquad (1.11)$$

2. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания:

$$\sigma^2(X) = \nu(X^2) - \nu^2(X). \qquad (1.12)$$

3. Дисперсия произведения постоянной и случайной величин равна произведению квадрата постоянной величины на дисперсию случайной:

$$\sigma^2(CX) = C^2\sigma^2(X). \qquad (1.13)$$

4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$\sigma^2\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \sigma^2(X_i). \qquad (1.14)$$

Математическое ожидание $\nu(X)$ и дисперсия $\sigma^2(X)$ являются частными случаями более общего понятия моментов случайной величины. Моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X-a)^k$, т. е. величина

$$\nu_k(a) = \nu(X-a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k f(x)\, dx, \qquad (1.15)$$

где a — любое вещественное число. Если $a = 0$, формула (1.15) определяет начальный момент k-го порядка случайной величины X:

$$\nu_k = \nu(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx; \qquad (1.16)$$

если же $a = \nu(X)$, то соответствующий момент называют центральным (его обычно обозначают буквой μ):

$$\mu_k = \nu [X - \nu(X)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \nu(X)]^k f(x)\, dx. \quad (1.17)$$

Очевидно, что математическое ожидание случайной величины является начальным моментом первого порядка $(\nu(X) = \nu_1)$, а дисперсия — центральным моментом второго порядка $(\sigma^2(X) = \mu_2)$. Между начальными и центральными моментами существуют простые связи. Примером их может служить формула (1.12), которую можно записать в виде

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (1.18)$$

§ 2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Не останавливаясь на формулировке основных предельных теорем теории вероятностей и математической статистики, а также на выводе важнейших распределений случайных величин (нормального, биномиального, χ^2 и др.), перейдем к рассмотрению одной из важнейших задач, решаемых математико-статистическими методами, — задачи получения статистических оценок законов распределения случайных величин и их характеристик.

Суть рассматриваемой проблемы заключается в том, что в распоряжении исследователя, изучающего поведение некоторой физической (или любой другой) величины, могущей принимать случайным образом множество значений, обычно находится весьма ограниченный материал (статистическая выборка) для обоснованного заключения о поведении данной случайной величины вообще, т. е. заключения о вероятностях, законе распределения и других характеристиках, которые можно было бы получить, имея бесконечно большое количество наблюдений (генеральную совокупность). Очевидно, что все выводы, основанные на ограниченном числе наблюдений, отражают случайный состав выборки и могут служить лишь приближенными оценками вероятностного характера.

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X, составляющие выборку*, можно рассматривать как реализацию одного (сложного) испытания, в котором реализуется значение сложной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Мысленно реализуя множество таких сложных испытаний, получаем совокупность значений случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, распределение которой следует определенным вероятностным законам.

Любую характеристику случайной величины X, полученную по данным выборки (например, среднюю арифметическую $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, служащую оценкой математического ожидания $\nu(X)$), необходимо рассматривать как значение некоторой случайной величины (в данном случае $\overline{X}$), изменяющейся случайным образом от выборки к выборке. Эта величина имеет закон распределения, однозначно определяемый (при независимости $X_1, X_2, \ldots, X_n$) законом распределения случайной величины X.

Разберем следующую типичную задачу. Предположим, что нам известен a priori теоретический закон распределения** случайной величины X. Такое положение может возникнуть в том случае, когда рассматриваемый процесс подводится под некоторую известную теоретическую схему, анализируемую методами теории вероятностей. Как правило, закон распределения зависит от одного или нескольких неизвестных параметров, определение которых на основе имеющегося статистического материала и составляет нашу задачу.

---

* Мы не останавливаемся здесь на формулировке требований, которые должны быть предъявлены к наблюдениям для того, чтобы последние составили представительную выборку и которые, вообще говоря, интуитивно очевидны. Важным является требование независимости величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

** Если теоретический закон распределения неизвестен, приходится проверять различные гипотезы о его виде. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Итак, наша цель заключается в получении рациональных оценок $a_1, a_2, \ldots, a_k$ параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ на основе выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X, характеризующейся плотностью вероятности

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \tag{2.1}$$

В качестве первого требования, которому должны удовлетворять оценки α_j, разумно ввести требование сходимости по вероятности оценки к оцениваемому параметру при неограниченном возрастании объема наблюдения:

$$P\left[\left|a_j(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \alpha_j\right| < \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon > 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

Оценки, удовлетворяющие (2.2), называются состоятельными.

Другим требованием, часто предъявляемым к оценкам, является требование равенства математического ожидания рассматриваемой оценки оцениваемому параметру при любом n:

$$\left.\begin{aligned} \nu\left[a_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] = \alpha_j \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{aligned}\right\}. \tag{2.3}$$

Оценки, удовлетворяющие (2.3), называются несмещенными. Состоятельные оценки далеко не всегда являются несмещенными, однако последнее свойство существенно лишь при выборках небольшого объема.

Часто наблюдается ситуация, когда состоятельные несмещенные оценки могут быть построены различными способами. В этом случае из всех возможных оценок одного и того же параметра α практически лучшей является та, у которой меньше рассеивание около оцениваемого параметра (т. е. дисперсия):

$$\sigma^2(a) = \nu\left[(a-\alpha)^2\right] = \min. \tag{2.4}$$

Состоятельная несмещенная оценка с наименьшей дисперсией называется эффективной.

Примером состоятельной несмещенной оценки математического ожидания случайной величины X может служить средняя арифметическая

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, n. \tag{2.5}$$

Состоятельной оценкой дисперсии является эмпирический центральный момент второго порядка

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 n, \tag{2.6}$$

который, однако, не является несмещенной оценкой. Можно показать, что несмещенной оценкой дисперсии будет величина

$$s^2 = \frac{n}{n-1} m_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2, \tag{2.7}$$

заметно отличающаяся от m_2 при малых n. Для некоторых классов распределений оценки (2.5) и (2.7) будут, кроме того, и эффективными.

Существует несколько общих методов получения оценок неизвестных параметров распределений. Опишем сначала наиболее простой из них — метод моментов, приводящий к достаточно хорошим результатам при больших n, когда существенно лишь требование состоятельности оценок. В этом методе для нахождения оценок неизвестных параметров α_j теоретической плотности вероятности (2.1) непосредственно используются эмпирические моменты (начальные или центральные), подсчитываемые по значениям выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теоретические моменты* μ_j (1.17) случайной величины X, распределенной с плотностью вероятности (2.1), являются определенными функциями параметров α_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$:

$$\mu_j = \mu_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \tag{2.8}$$

* Для простоты мы выписали лишь первые центральные моменты. Разумеется, с равным успехом можно использовать начальные моменты вместо центральных либо произвольную комбинацию их.

Зная моменты μ_j, можем выразить через них искомые параметры α_j:

$$\alpha_j = \alpha_j(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k). \qquad (2.9)$$

Заменяя в (2.9) значения μ_j их приближенными (состоятельными) оценками m_j

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^j / n \qquad (2.10)$$

и принимая во внимание, что последние есть функции значений случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, составляющих выборку, получим

$$\alpha_j = \alpha_j(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \approx \alpha_j(m_1, m_2, \ldots, m_k) = = a_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2.11)$$

Как уже упоминалось, a_j — состоятельные оценки параметров α_j. Легко видеть, что минимальное число используемых для оценки эмпирических моментов m_j в точности равно числу оцениваемых параметров.

Одним из наиболее известных и распространенных методов нахождения оценок неизвестных параметров является метод максимума правдоподобия. В основе его лежит принцип, согласно которому в качестве наилучших оценок неизвестных параметров α_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ распределения (2.1) принимаются значения a_j, соответствующие наибольшей вероятности результата наблюдений случайной величины X, т. е. получения данной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Совместная вероятность наблюдения выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при законе распределения (2.1)

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (2.12)$$

называется функцией правдоподобия. Если результат наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ считать заданным, то функцию правдоподобия можно рассматривать как функцию неизвестных параметров α_j (при этом, строго говоря,

функция L теряет вероятностный смысл). Значения a_j, обращающие функцию L в максимум, и называются оценками наибольшего правдоподобия параметров α_j. Значения a_j легко находятся по обычным правилам дифференциального исчисления, согласно которому следует искать решения системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (2.13)$$

Из вида функции правдоподобия (2.12) ясно, что во многих случаях удобно вместо системы (2.13) решать систему уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_j} = 0. \qquad (2.14)$$

Достоинство метода максимума правдоподобия заключается в том, что в большинстве случаев он приводит к состоятельным и асимптотически нормально распределенным оценкам, имеющим наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками (т. е. эффективным). Недостаток его — необходимость решать сложные алгебраические или трансцендентные системы уравнений (2.14) для нахождения искомых оценок.

§ 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

В большей части практических задач исследователю приходится сталкиваться со случайными величинами, теоретический закон распределения которых неизвестен, либо неоднозначен (последнее отмечается, например, в случае, когда имеется несколько теорий и моделей, подлежащих экспериментальной проверке). Это обстоятельство вызывает необходимость статистической проверки некоторого числа предположений (статистических гипотез) о законах распределения рассматриваемых величин или о некоторых параметрах закона на основании имеющейся выборки. Подобную проверку производят путем изучения поведения некоторых статистических характеристик (критериев), вычисляемых по данным выборки и являющихся, разумеется, случайными величинами.

Если при справедливости данной гипотезы выборочное распределение применяемого критерия известно, то легко указать доверительный интервал, в который с большой вероятностью должна попасть выбранная нами случайная величина. Если численное значение этой величины находится вне упомянутого доверительного интервала, гипотеза должна быть отвергнута; если же случайная величина попадает в доверительный интервал, то делается вывод о непротиворечивости проверяемой гипотезы опытным данным. Оба возможные заключения носят, конечно, вероятностный характер.

Любая гипотеза об определенном виде закона распределения случайной величины может быть проверена большим числом способов (с помощью большого числа критериев). Естественно было бы стремиться к выбору среди этих критериев в определенном смысле наилучшего. К сожалению, такого рода выбор может быть сделан лишь в очень ограниченном классе задач. Поэтому на практике подходящие для решения данной задачи статистические критерии приходится выбирать в известной степени произвольно.

В математической статистике разработан целый ряд статистических критериев для решения различного рода задач по проверке гипотез. В качестве примера рассмотрим один из них, пожалуй, наиболее широко применяемый. Речь идет о так называемом критерии χ^2 для проверки гипотезы об определенной форме закона распределения случайной величины по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, достаточно большого объема.

Разобьем область изменения случайной величины X на m неперекрывающихся интервалов $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ и подсчитаем число значений случайной величины n_k в каждом интервале $\left(\sum_{k=1}^{m} n_k = n\right)$. Если проверяемая гипотеза состоит в том, что случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$, то легко подсчитать также гипотетическую вероятность p_k попадания случайной величины X в любой интервал Δ_k:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \int_{\Delta_k} f(x)\,dx \\ \sum_{k=1}^{m} p_k &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Каждое из чисел n_k представляет собой случайную величину, меняющуюся от выборки к выборке. Легко показать, что в случае верности проверяемой гипотезы о законе распределения величины X среднее значение величин n_k равно np_k.

За критерий проверки сделанной гипотезы примем меру расхождения наблюденных частот $n_1, n_2, \ldots, n_k$ с „теоретическими" частотами $np_1, np_2, \ldots, np_k$, т. е. величину

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{np_k} - n. \qquad (3.2)$$

Можно показать, что если проверяемая гипотеза верна, то величина χ^2 при большом n имеет χ^2-распределение с $m-1$ степенями свободы*. Это позволяет указать для вычисленной по формуле (3.2) величины χ^2 критический предел χ^2_q, вероятность превышения которого при справедливости сделанной гипотезы очень мала, и сделать определенные вероятностные суждения о верности этой гипотезы.

Если гипотетическая плотность вероятности зависит от k параметров, значения которых также должны быть определены на основании имеющейся выборки, то критерий χ^2 (3.2) будет иметь при $n \to \infty$ χ^2-распределение с $m-k-1$ степенями свободы.

Критерий χ^2 может быть применен в большом числе разнообразных статистических задач, связанных с проверкой гипотез. Однако ему свойственны и недостатки. Недостатком является, например, зависимость величи-

---

* χ^2-распределение (распределение суммы квадратов нормально распределенных случайных величин) — известное и широко используемое в математической статистике распределение. Таблицы q%-ных критических пределов для распределения χ^2 с произвольным числом степеней свободы можно найти почти во всех руководствах по математической статистике.

ны χ^2 от произвольно сделанного разбиения на интервалы Δ_k. Другой недостаток — его низкая в некоторых случаях чувствительность (действительно, уже само объединение выборочных значений случайной величины в группы связано с известной потерей информации). Наконец, для его применения необходимы выборки достаточно большого объема, так как для вероятностной оценки соответствия между наблюденным и гипотетическим законами распределения случайной величины X используется предельный закон распределения случайной величины χ^2.

Глава II

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УГЛОВ В АКТАХ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

§ 4. ВВЕДЕНИЕ

Важный раздел физики элементарных частиц — исследование множественного образования частиц при ядерных взаимодействиях частиц высоких энергий. Наиболее интенсивно исследуются такие характеристики элементарных актов ядерного взаимодействия, как множественность и состав вторичных частиц, их угловые и энергетические распределения, генерация крайне нестабильных квазичастиц (резонансов) и др. В качестве источника первичных частиц с энергией до нескольких десятков *Гэв* используются мощные ускорители заряженных частиц; частицы сверхвысоких (10^{11}—10^{15} *эв*) энергий регистрируются в космических лучах. При современных экспериментальных возможностях, к сожалению, еще не удается производить достаточно точные энергетические измерения на значительной части следов очень быстрых заряженных частиц, в то время как получение надежных и статистически обеспеченных данных об угловом распределении вторичных частиц в ядерных взаимодействиях — задача сравнительно легкая. Поэтому изучение угловых распределений вторичных частиц, рожденных в актах ядерных взаимодействий при высоких энергиях, продолжает оставаться одним из важнейших источников информации о механизме и характере этих взаимодействий.

В нашу задачу не входит детальное рассмотрение физики явлений, наблюдающихся при множественном образовании частиц.

Отсылая читателя, интересующегося теоретическими и экспериментальными достижениями в этой трудной и интересной области физики, к имеющейся литературе (например, [24, 31, 33, 25]), мы отметим вкратце лишь причины, вызывающие необходимость использования математико-статистических методов в экспериментальном исследовании ядерных взаимодействий при высоких энергиях.

Первая причина заключается в том, что все характеристики элементарного акта множественного образования частиц при больших энергиях (множественность, угловые и энергетические характеристики вторичных частиц, коэффициенты неупругости и др.) подвержены в индивидуальных случаях сильнейшим флуктуациям. Эти флуктуации возникают, по-видимому, как следствие сложности рассматриваемого явления, наличия многих механизмов генерации вторичных частиц и т. д. и усиливаются из-за крайней затруднительности при современных экспериментальных возможностях постановки «чистого опыта» в условиях очень больших энергий (т. е. опыта, в котором могли бы быть одновременно идентифицированы и измерены все вторичные частицы как заряженные, так и нейтральные).

Другая причина (связанная, конечно, в некоторой степени с первой) — это отсутствие до настоящего времени удовлетворительной теории сильных взаимодействий. Так, для описания процессов множественного образования частиц к настоящему времени предложено немало частных теорий и моделей, которые в лучшем случае претендуют на описание части экспериментальных характеристик или некоторой доли случаев ядерных взаимодействий.

За последние 10—15 лет выполнено большое количество экспериментальных исследований процесса множественной генерации частиц в широком диапазоне первичных энергий ($1-10^6$ *Гэв*), однако результаты этих исследований во многом противоречивы, а интерпретация их далеко не однозначна. Это обстоятельство вынуждает для получения надежных результатов проводить исследования на большом статистическом материале с широким применением методов теории вероятностей и математической статистики. Нередко еще встречаются работы, в которых не уделено достаточного внимания статистическому анализу экспериментальных характеристик и оценке значимости наблюдаемых эффектов. В настоящей главе будут рассмотрены некоторые специфические задачи, возникающие при статистическом анализе распределений пространственных углов вторичных частиц, рожденных в актах ядерных взаимодействий при высоких энергиях. Использованные при анализе угловых распределений статистические методы можно, разумеется, применять и для анализа многих других характеристик ядерных расщеплений и вторичных частиц из них.

§ 5. ФОРМА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

При изучении углового распределения вторичных релятивистских (ливневых) частиц в лабораторной системе координат (л. с. к.) удобно во многих отношениях использование величин $x = \lg|\operatorname{tg}\vartheta|$ или $\lambda = \lg\operatorname{tg}\vartheta$, где ϑ — пространственный угол вылета вторичной частицы (угол с направлением первичной частицы) в л. с. к. В связи с тем, что доля вторичных ливневых частиц, вылетающих в заднюю полусферу (т. е. частиц с $\vartheta > \pi/2$), в ядерных взаимодействиях высокой энергии невелика (порядка нескольких процентов или менее при энергиях в десятки *Гэв*) и уменьшается с ростом энергии взаимодействия, распределения величин x и λ практически не отличаются друг от друга, в особенности при очень больших энергиях. Удобство использования величины x (или λ) при анализе угловых распределений в л. с. к. — следствие того, что в ультрарелятивистском приближении

$$\left.\begin{aligned} m &= 1 \\ \gamma_c \operatorname{tg}\vartheta &= \operatorname{tg}\left(\tilde{\vartheta}/2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

точной формулы, связывающей пространственные углы вылета вторичной частицы в системе центра масс (с. ц. м.) и л. с. к.

$$\gamma_c \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\tilde{\vartheta}}{m + \cos\tilde{\vartheta}}, \qquad (5.2)$$

$$m = \beta_c/\tilde{\beta}$$

(γ_c — лоренц-фактор с.ц.м. в л.с.к.: $\gamma_c = \left(1-\beta_c^2\right)^{-1/2}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\vartheta}$ — скорость и угол вылета частицы в с.ц.м.), дифференциальное распределение по величине x приближенно представляет собой соответствующее распределение по величине $\lg \operatorname{tg} (\tilde{\vartheta}/2)$ в с.ц.м., сдвинутое по оси x на постоянную величину, равную $\lg \gamma_c$. Если разлет вторичных частиц после столкновения в системе центра масс происходит с равной вероятностью по всем направлениям (изотропно), то распределение по x хорошо аппроксимируется нормальным (гауссовым) распределением со средним квадратическим отклонением $\sigma \cong 0{,}36$. Анизотропия типа „вперед — назад" в угловом распределении в с.ц.м. приводит к уширению распределения величины x (т.е. к возрастанию σ). Теории лобовых (одноцентровых) соударений (например, простейшие варианты гидродинамической теории Ландау) также приводят к нормальной форме распределения величины x.

Если в распоряжении исследователя имеется достаточно большой набор «однородных» ливней (понятие «однородный» будет детально рассмотрено ниже), т. е. ливней, угловое распределение частиц в которых по каким-либо соображениям можно считать одинаковым, — проверка соответствия предполагаемой нормальной формы распределения экспериментальным данным не составляет никакого труда. Нормальная плотность распределения

$$p(x, \nu, \sigma) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\left[-(x-\nu)^2/2\sigma^2\right] \qquad (5.3)$$

зависит, как известно, от двух параметров: ν (среднее значение) и σ (среднее квадратическое отклонение), которые могут быть оценены из экспериментальных данных (выборки) по формулам

$$\left.\begin{aligned} \nu &\approx \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n \\ \sigma &\approx (s^2)^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/(n-1)\right]^{1/2} \end{aligned}\right\}, \qquad (5.4)$$

где n — полное число вторичных частиц в «суммарном ливне», составленном из большого числа однородных индивидуальных случаев. Далее экспериментальное распределение величины x в суммарном ливне (гистограмма) может быть сравнено с нормальной плотностью

вероятности (5. 3), параметры которой определены по формулам (5. 4) с помощью одного из критериев соответствия математической статистики [например, критерия χ^2 (см. § 3)].

На рис. 1 в виде гистограмм показаны заимствованные из работы [3] экспериментальные распределения вторичных частиц по величине x для суммарных ливней,

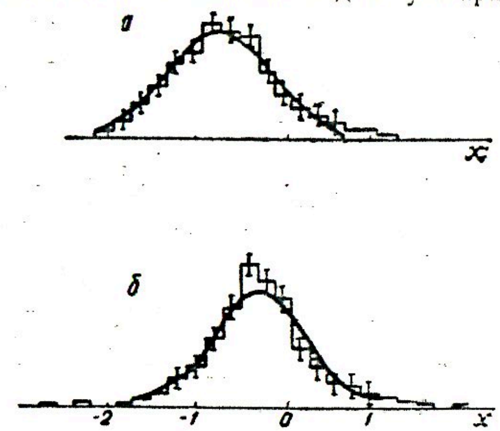

Рис. 1. Распределение вторичных частиц по величине $x = \lg|\operatorname{tg}\vartheta|$ при $E = 24$ *Гэв*:

а — pN-соударения с $n = 4 \div 12$; *б* — столкновения с тяжелыми ядрами. Кривые представляют собой нормальную плотность распределения с дисперсией $\sigma^2 = 0{,}28$.

составленных из 598 протон-нуклонных (pN) взаимодействий с числом вторичных заряженных частиц 4—12 (*а*) и ливневых частиц из 143 взаимодействий протонов с тяжелыми ядрами (*б*), зарегистрированных в фотоэмульсии (энергия первичных протонов в обоих случаях составляла 24 *Гэв*). Как видно из этого рисунка, оба распределения хорошо аппроксимируются нормальным распределением с оцененными по (5. 4) параметрами $\nu = -0{,}70$, $\sigma^2 = 0{,}28$ и $\nu = -0{,}29$, $\sigma^2 = 0{,}28$ соответственно. Степень согласия гистограмм на рис. 1 и соответствующих кривых, оцененная по методу χ^2 (§ 3), довольно высока* (вероятность наблюдения значения χ^2, большего,

* При этом учитывалось, что число степеней свободы распределения χ^2 должно быть уменьшено на число оцениваемых параметров.

чем вычисленное, в обоих случаях превышает 20%), что позволяет сделать вывод о непротиворечии нормальной формы распределения величины x экспериментальным данным.

Здесь целесообразно остановиться на вопросе о том, какие ливни можно считать однородными и объединять в суммарный ливень. Строго говоря, этот термин (который, кстати, часто будет употребляться в дальнейшем) должен относиться к представителям семейства совершенно одинаковых актов ядерного взаимодействия (одинаковые энергии первичных частиц, одинаковые ядра-мишени, одинаковый механизм генерации вторичных частиц и т. д.). Однако на практике такой уверенности не бывает никогда. Например, в описанном выше эксперименте отдельные ливни имели различные множественности (напомним, что нейтральные вторичные частицы не фиксировались), группа pN-взаимодействий была «засорена» взаимодействиями с ядрами (известно, что не существует достаточных критериев отбора pN-взаимодействий в фотоэмульсии), в группе взаимодействий с тяжелыми ядрами не производилась дискриминация ливней по числу нуклонов ядра-мишени, с которыми провзаимодействовала первичная частица; наконец, весьма вероятно, что даже в случаях одинаковых мишеней генерация вторичных частиц обусловлена несколькими различными механизмами с разными угловыми распределениями. Следовательно, объединение нескольких ливней в суммарный всегда представляет собой более или менее грубое приближение, а понятие однородности в известной (часто значительной) степени условно. Поскольку необходимость суммирования отдельных ливней диктуется невозможностью получения статистически обеспеченных данных из индивидуальных актов ядерного взаимодействия при небольших множественностях, нужно отчетливо представлять и по возможности оценивать качественно степень некорректности этого приближения.

Если звезды, генерированные искусственно ускоренными частицами, можно (в описанной выше степени — условно) считать однородными благодаря одинаковой первичной энергии, то в случае космических лучей, когда первичные частицы имеют самые разнообразные и часто не поддающиеся измерению энергии, прямое объ-

единение индивидуальных случаев в суммарный ливень не имеет смысла. Действительно, из формулы (5.1) легко усмотреть, что центры парциальных распределений величины x в индивидуальных ливнях (т. е. величины $-\lg\gamma_c$) будут разбросаны по оси x в соответствии с энергетическим спектром первичных частиц.

Однако и в этом случае можно составить суммарный ливень, если вместо величин x ввести другие величины, имеющие одинаковые распределения в ливнях с произвольными первичными энергиями. Это легко сделать, используя следующую весьма общую теорему математической статистики: если случайная величина X имеет плотность распределения $p(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где α_k — произвольные параметры, то случайная величина Y

$$Y = \int\limits_{-\infty}^{X} p(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, dt \qquad (5.5)$$

будет равномерно распределена в интервале (0,1).

Для проверки предположения о гауссовой форме распределения величины x в звездах, генерированных частицами космических лучей, предположим, что величина x в каждом ливне следует закону распределения (5.3) с параметрами, которые оцениваются по формулам (5.4). Каждому значению x поставим в соответствие величину

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \int\limits_{-\infty}^{x_i} p(t, \bar{x}, s)\, dt = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) \\ \Phi(z) &= \int\limits_{-\infty}^{z} (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)\, dt \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

(величины x и s вычисляются в каждом отдельном ливне). Случайная величина y будет иметь [с точностью до приближений (5.4)] равномерное распределение в интервале (0,1), и распределения этой величины для отдельных ливней могут быть просуммированы. Суммарные распределения величины y для звезд, генерированных в фотоэмульсии однозарядными частицами космических лучей с числом сильно ионизующих следов $n_h \leqslant 5$ (квазинуклонные взаимодействия) и $n_h \geqslant 8$ (взаимодействия с тяжелыми ядрами), соответственно представлены на рис. 2, взятом из работы [35]. Этот рисунок можно рассматривать как указание на приближенное соответствие нормальной формы распределения величины x экспериментальным данным, хотя степень согласия гистограмм рис. 2 и прямой, оцененная по методу χ^2, невелика (вероятность наблюдения значения χ^2 большего, чем вычисленное, при равномерном распределении y составляет 5—10%).

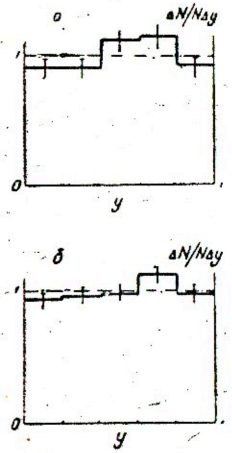

Рис. 2. Распределение вторичных частиц по величине y в ливнях космических лучей:
звезды с $n_h < 5$ (*а*) и с $n_h > 8$ (*б*).

Строго говоря, распределение величин y (5.6) может отличаться от прямолинейного вследствие приближений (5.4), особенно при малых множественностях. Для учета возможного отклонения от прямолинейности следует произвести по методу Монте-Карло розыгрыш случайных звезд, моделирующий влияние оценок параметров на вышеописанную процедуру при заданном нормальном распределении величин x в индивидуальных ливнях с заданным (из эксперимента) спектром множественностей, и сравнить наблюденное распределение величин y с полученным по методу Монте-Карло. Аналогичное моделирование будет описано ниже при анализе более сложной формы распределения.

Существует ряд моделей множественного образования частиц, приводящих к распределениям пространственных углов, отличающихся от нормального. Особенно распространенной является так называемая двухцентровая модель, или модель двух фаерболлов* [39, 40, 46], согласно которой в ядерных взаимодействиях нуклонов при очень больших энергиях ($> 10^{12}$ *эв*) происходит генерация двух сильно возбужденных сгустков ядерной материи (фаерболлов), движущихся в с.ц.м. нуклон-нуклонных соударений в противоположные стороны с лоренц-факторами $\tilde{\gamma}$, значительно меньшими, чем лоренц-факторы разлетающихся нуклонов. Распад каждого фаерболла на вторичные частицы происходит независимо, причем угловое распределение в системе покоя каждого из них изотропно. Общая анизотропия углового распределения в с. ц. м. определяется величиной лоренц-фактора $\tilde{\gamma}$ фаерболлов. Эта модель приводит к характерному двугорбовому распределению по величине $\lambda = \lg \operatorname{tg} \vartheta$ в лабораторной системе отсчета, которое может быть с хорошей точностью представлено в виде суперпозиции двух нормальных распределений, соответствующих изотропному распаду двух фаерболлов, с одинаковыми средними квадратическими отклонениями $\sigma_0 = 0{,}36$.

* Fire-ball (анг.) — огненный шар.

Простейшему варианту двухцентровой модели соответствует плотность вероятности величины λ, равная

$$\left.\begin{aligned} p(\lambda) &= 2^{-1}(2\pi)^{-1/2}\sigma_0^{-1}\left\{\exp\left[-(\lambda-\nu+\delta)^2/2\sigma_0^2\right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-(\lambda-\nu-\delta)^2/2\sigma_0^2\right]\right\} \\ \delta &= \left(\sigma^2-\sigma_0^2\right)^{1/2} \\ \sigma_0 &= 0{,}36 \end{aligned}\right\}, \qquad (5.7)$$

где ν — математическое ожидание величины λ;
σ — ее среднее квадратическое отклонение;
2δ — расстояние между центрами парциальных распределений.

Сопоставление экспериментально наблюденного распределения с композицией нормальных распределений (5.7) может быть проведено различными методами, в том числе и аналогичными описанным выше.

Ниже мы опишем метод [36] проверки несколько более общего варианта двухцентровой модели, не предполагающего равенства чисел вторичных частиц, испускаемых отдельными центрами. Рассмотрим угловое распределение вторичных частиц, образованных при распаде фаерболлов, по величине $\lambda = \lg \operatorname{tg} \vartheta$ в л.с.к. в ливнях с фиксированными значениями γ_1, γ_2, n_1 и n_2 (γ_1, γ_2—лоренц-факторы в л.с.к. соответственно быстрого и медленного фаерболла, n_1, n_2—числа заряженных частиц, испущенных этими центрами). Будем предполагать, что оба центра движутся в л.с.к. с релятивистскими скоростями по направлению первичного нуклона и распадаются изотропно в своих системах покоя на релятивистские частицы [т. е. справедливо ультрарелятивистское приближение (5.1)]. В этих предположениях плотность $p\,(\lambda, \gamma_1, \gamma_2\ \alpha)$ распределения величины λ зависит от трех параметров: γ_1, γ_2 и $\alpha = n_1/(n_1+n_2)$.

Чтобы получить выражение для плотности распределения величины λ, не прибегая к аппроксимации гауссовым распределением, будем исходить из плотности распределения углов вылета частиц ϑ^* в системе распадающегося центра, соответствующей равновероятному (изотропному) вылету

$$f(\vartheta^*)\,d\vartheta^* = \frac{1}{2}\sin\vartheta^* d\vartheta^*,$$

и из формулы (5.1), которую можно записать в виде

$$\lg \operatorname{tg}(\vartheta^*/2) = \lambda + \lg\gamma_c.$$

Используя обычные приемы преобразования распределений, легко прийти к следующей формуле для трехпараметрической плотности распределения величины λ, соответствующей композиции двух распределений от изотропно распадающихся центров, движущихся в л.с.к. с лоренц-факторами γ_1 и γ_2:

$$\left.\begin{aligned} p(\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \alpha) &= \alpha p_0(\lambda+\lg\gamma_1) + (1-\alpha)p_0(\lambda+\lg\gamma_2) \\ p_0(\lambda+\lg\gamma) &= 2(\lg e)^{-1}\left[10^{-(\lambda+\lg\gamma)} + 10^{\lambda+\lg\gamma}\right]^{-2} \end{aligned}\right\}. \quad (5.8)$$

Для оценки параметров γ_1, γ_2, α распределения (5.8) используем метод моментов (§2). С помощью формулы (5.8) [см. также формулы (2.8) и (2.9)] любой момент случайной величины λ можно представить как функцию параметров γ_1, γ_2 и α, а сами параметры выразить через три момента ν, σ^2 и μ_3 (ν — математическое ожидание величины λ, σ^2 — ее дисперсия, μ_3 — центральный момент третьего порядка) по следующим формулам, которые мы приводим, опустив элементарные выкладки;

$$\left.\begin{aligned} -\lg\gamma_1 &= \nu + \mu_3/2\left(\sigma^2-\sigma_0^2\right) - \delta \\ -\lg\gamma_2 &= \nu + \mu_3/2\left(\sigma^2-\sigma_0^2\right) + \delta \\ \alpha &= 1/2 + \mu_3/4\delta\left(\sigma^2-\sigma_0^2\right) \end{aligned}\right\}, \quad (5.9)$$

где

$$\delta = \left[\sigma^2 - \sigma_0^2 + \mu_3^2/4\left(\sigma^2-\sigma_0^2\right)^2\right]^{1/2},$$

σ_0^2 — момент 2-го порядка изотропного распределения, равный

$$\sigma_0^2 = \int_0^{\pi/2} \lg^2 \operatorname{tg}(\vartheta^*/2)\sin\vartheta^* d\vartheta^* = \lg^2 e\cdot\pi^2/12 = 0{,}155,$$

$$\sigma_0 = 0{,}394.$$

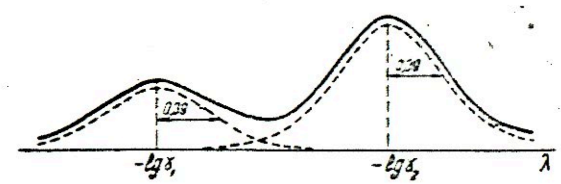

Рис. 3. Распределение величины $\lambda = \lg \operatorname{tg} \vartheta$ в рамках модели двух изотропно распадающихся центров при выборе $\alpha = 1/3$.

Моменты ν, σ^2 и μ_3 величины λ по углам вылета n частиц в отдельном ливне ($n = n_1 + n_2$) можно оценить, пользуясь соответственно следующими величинами (эмпирическими моментами):

$$\left.\begin{aligned} \bar\lambda &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i/n \\ s^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \bar\lambda\right)^2/n \\ m_3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \bar\lambda\right)^3/n \end{aligned}\right\}, \quad (5.10)$$

которые, как мы знаем, являются состоятельными (хотя и смещенными) оценками теоретических моментов.

Воспользуемся теперь описанным выше приемом сведения произвольного распределения к равномерному в интервале (0,1). Распределение вторичных частиц по величине y, равной

$$y = \int_{-\infty}^{\lambda} p\,(t, \gamma_1, \gamma_2, \alpha)\,dt, \quad (5.11)$$

должно быть равномерным в указанном интервале независимо от параметров γ_1, γ_2, α. Подставив (5.8) в (5.11) и произведя интегрирование, получим равенство

$$y = \alpha/\left[1 + 10^{-2(\lambda + \lg \gamma_1)}\right] + (1-\alpha)/\left[1 + 10^{-2(\lambda + \lg \gamma_2)}\right]. \qquad (5.12)$$

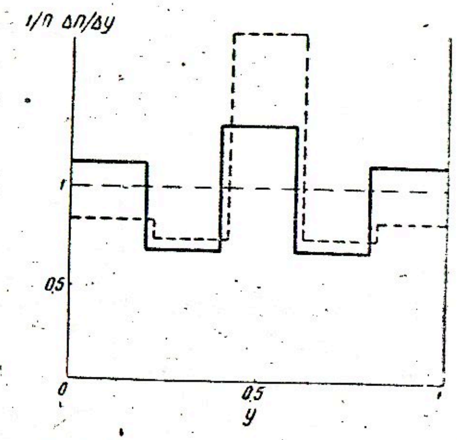

Рис. 4. Гистограммы распределения величины y, определяемой формулами (5.9) и (5.12), при нормальном (пунктир) и прямоугольном (сплошная линия) распределениях величины λ с дисперсией $\sigma^2 = 0{,}55$, равной медианному значению s^2 для 18 струй из [38].

Если модель двух центров неверна, распределение величины y, определяемой формулами (5.9) и (5.12), может сильно отличаться от равномерного. На рис. 4 в качестве примера приведены гистограммы распределения частиц по величине y при нормальном и равномерном* в интервале $(-l, l)$ [41] распределениях величины λ, для которых $\mu_3 = 0$.

На рис. 5 представлено суммарное распределение величины y для 18 ливней, измеренных авторами работы [38]. Эти ливни, генерированные нуклонами с энергией выше 10^{12} *эв*, были найдены в фотоэмульсии и удовлетворяли принятым в физике высоких энергий необходимым (но отнюдь не достаточным!) критериям отбора квазинуклонных столкновений (число ливневых частиц в этих ливнях менялось от 6 до 20). Для каждого ливня были оценены параметры γ_1, γ_2 и α по формулам (5.9) и (5.10) и вычислены n_i (n — число вторичных заряженных частиц в i-м ливне) значений y по формуле (5.12). Полученное распределение y плохо согласуется с равномерным распределением, отвечающим модели двух центров (вероятность получить значение χ^2 не меньше наблюденного при равномерном распределении y составляет около 3%).

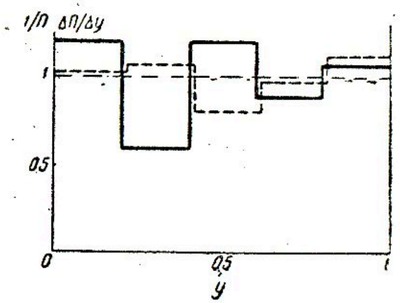

Рис. 5. Распределение величин y (5.12) для вторичных частиц из 18 струй космических лучей [38] (сплошная линия) и для 36 двухцентровых случайных звезд (пунктир).

В проведенном анализе были сделаны два приближения, могущие исказить сделанный вывод. Первое из них заключается в использовании оценок (5.10), справедливых лишь при очень (бесконечно) большом числе частиц в отдельных ливнях, второе — в использовании при выводе формулы (5.8) ультрарелятивистского приближения. Для выяснения вопроса о том, не связано ли полученное расхождение экспериментальных данных и проверяемой модели с конечным числом частиц в отдельных ливнях или с возможным образованием нерелятивистских частиц при распаде фаербола, мы предприняли розыгрыш случайных звезд по модели двух

* Параметры σ нормального и l равномерного распределений выбирались соответствующими медианному экспериментальному значению s^2 для анализируемых ниже ливней.

центров, предполагая изотропное угловое распределение вторичных частиц в системе покоя центра и максвелловское распределение импульсов, отвечающее среднему поперечному импульсу 0,5 *Гэв/с*.

Для каждого из упомянутых выше 18 ливней были разыграны по методу Монте-Карло по две случайные звезды с теми же значениями γ_1, γ_2, n_1 и n_2 [оценка этих величин производилась по формулам (5.9) и (5.10)]. Углы вылета вторичных частиц из случайных звезд были преобразованы в лабораторную систему, затем эти звезды обрабатывались по той же схеме, что и реальные ливни. Полученное распределение величины y (рис. 5) находится в хорошем согласии с равномерным распределением (вероятность получить значение χ^2 не меньше вычисленного при равномерном распределении y составляет около 40%).

Разумеется, к полученному заключению о плохом соответствии модели двух центров экспериментальным данным следует отнестись с большой осторожностью. Прежде всего надо иметь в виду такие обстоятельства, как малость экспериментального материала у авторов работы [38], неучет образования наряду с фаерболлами нуклонов или нуклонных изобар, продукты распада которых могут иметь аномально большие по абсолютной величине значения λ, и другие факторы, которыми можно усложнить рассмотренную модель. Кроме того, вполне возможно, что эта двухфаерболльная модель хорошо описывает часть экспериментальных данных, тогда как другую часть составляют ливни другого типа (например, одно- или трехцентрового типа). Действительность всегда оказывается богаче любой искусственной схемы.

Описанный выше метод, основанный на использовании формулы (5.5) и оценке параметров распределения по методу моментов (§ 2), может быть применен для проверки самых различных моделей множественного образования частиц.

Фридлендер [42], используя метод моментов для оценки параметров распределения, проверил несколько иной вариант двухцентровой модели. В предположении, что числа частиц, возникающих при распаде двух фаерболлов, равны, он отказался от априорного предположения об изотропии углового распределения в системе покоя распадающихся центров. Такому варианту модели двух фаерболлов соответствует плотность распределения величины λ в виде

$$\left.\begin{aligned} p(\lambda, \nu, \delta, \sigma_0) = 2^{-1}(2\pi)^{-1/2}\sigma_0^{-1}\Big\{\exp\big[-(\lambda-\nu+{} \\ +\delta)^2/2\sigma_0^2\big] + \exp\big[-(\lambda-\nu-\delta)^2/2\sigma_0^2\big]\Big\} \\ \sigma^2 = \sigma_0^2 + \delta^2 \end{aligned}\right\}, \quad (5.13)$$

где σ^0 — уже не постоянная, как в распределении (5.7), а один из трех параметров распределения, подлежащий наряду с двумя другими параметрами ν и δ экспериментальному определению.

Для оценки параметров ν, δ, σ_0 распределения (5.13) Фридлендер использовал первый начальный (математическое ожидание), а также второй (дисперсия) и четвертый центральные моменты. Легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} \delta = \sigma(-\varepsilon/2)^{1/4} \\ \sigma_0 = \sigma\left[1-(-\varepsilon/2)^{1/2}\right]^{1/2} \end{aligned}\right\}, \quad (5.14)$$

где ε — эксцесс распределения (5.13), равный

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \equiv \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Используя для оценки моментов ν, σ^2 и μ_4 величины λ по углам вылета n вторичных частиц в отдельном ливне эмпирические моменты $\bar{\lambda}$, s^2 (5.10) и

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \bar{\lambda}\right)^4/n, \quad (5.15)$$

легко проверить соответствие плотности распределения (5.13) экспериментальным данным вышеописанным способом сведения к равномерному распределению.

Автор работы [42] выбрал, однако, другой способ анализа. Были построены распределения эмпирических характеристик $\frac{m_4}{s^4} - 3$ (эмпирический эксцесс), s, δ и σ_0, которые сравнивались с соответствующими характеристиками, вычисленными для искусственных ливней, разыгранных по методу Монте-Карло в соответствии с законом распределения (5.13) и экспериментальным спектром множественности. Этот анализ, выполненный для довольно большой коллекции ливней, показал, что заметная доля ливней имеет угловое распределение, согласующееся с формой (5.13), причем распределение оценки σ_0 (5.14) в этих ливнях хорошо аппроксимируется гауссовым распределением со средним значением $\overline{\sigma}_0=0{,}35$ [ср. с (5.7)] и размахом, целиком соответствующим рассчитанному в предположении конечного числа частиц в ливнях (последнее было установлено из сравнения с расчетами по методу Монте-Карло).

При решении задач, связанных с проверкой вида распределений с неизвестными параметрами, необходимо, как мы видели выше, оценивать влияние погрешностей, вносимых оценкой этих параметров в ливнях с конечным числом частиц, по методу Монте-Карло. Однако в математической статистике (см., например, [29]) разработан целый ряд так называемых непараметрических критериев, с помощью которых удается решать задачи о проверке форм распределения независимо от параметров распределений и числа частиц в ливнях. Как пример рассмотрим один из подобных методов проверки нормальности углового распределения, примененный И. В. Речицким и В. М. Чудаковым [27].

Характерная черта нормального распределения, как известно,—равенство нулю асимметрии Γ_1 и эксцесса Γ_2

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \mu_3/\sqrt{\mu_2^3} \\ \Gamma_2 &= \mu_4/\mu_2^2 - 3 \end{aligned}\right\}, \tag{5.16}$$

где μ_k — центральный момент k-го порядка.

Эмпирическими оценками этих величин являются соответственно эмпирические асимметрия и эксцесс:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= m_3/\sqrt{m_2^3} \\ g_2 &= m_4/m_2^2 - 3 \end{aligned}\right\}, \tag{5.17}$$

где m_k — соответствующие эмпирические моменты.

Оценки (5.17), однако, не являются несмещенными, и при конечном числе частиц в ливне n их целесообразно заменить на

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= [n(n-1)]^{1/2}(n-2)^{-1}g_1 \\ G_2 &= (n-1)\left[(n-2)(n-3)\right]^{-1}\left[(n+1)g_2+6\right] \end{aligned}\right\}. \tag{5.18}$$

Математические ожидания G_1 и G_2 равны нулю, если истинное распределение нормально, а дисперсии их равны соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^2 &= 6n(n-1)\left[(n-2)(n+1)(n+3)\right]^{-1} \\ \sigma_2^2 &= 24n(n-1)^2\left[(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)\right]^{-1} \end{aligned}\right\}. \tag{5.19}$$

Составим нормированные случайные величины:

$$d_k = G_k/\sigma_k \qquad (k=1,2). \tag{5.20}$$

Они распределены асимптотически нормально и имеют равные нулю математические ожидания и единичные дисперсии независимо от параметров распределения величины λ и числа частиц в ливне (строгое обоснование этого метода можно найти в работе [18]).

Из экспериментальных данных легко вычислить усредненные по m ливням с любыми, не обязательно одинаковыми n, случайные величины

$$\overline{d}_k = \sum_{i=1}^{m} d_{ki}/m, \tag{5.21}$$

математическое ожидание и дисперсия которых равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} \nu\left(\overline{d}_k\right) &= 0 \\ \sigma^2\left(\overline{d}_k\right) &= 1/m \end{aligned}\right\}. \tag{5.22}$$

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей величины $\overline{d}_k$ при достаточно большом числе ливней m можно считать нормально распределенными. Поэтому легко указать доверительный интервал [например, $\left(-2/\sqrt{m},\ -2/\sqrt{m}\right)$], внутри которого должны лежать значения $\overline{d}_k$ с вероятностью, близкой к единице. Если хотя бы одно из значений $\overline{d}_k$ будет находиться вне этого интервала, можно утверждать, что нормальное распределение величины λ и статистическая независимость углов вылета вторичных частиц не имеют места, по крайней мере для части рассмотренных ливней. Отметим, что при больших n для величин $\overline{d}_k$ можно принять нормальное распределение, даже если число ливней m невелико, так как сами слагаемые в формулах (5.21) распределены асимптотически нормально.

С помощью изложенного метода авторы работы [27] проанализировали 22 ливня, образованные в фотоэмульсии космическими частицами с энергией выше 10^{11} *эв*, с числом частиц n в интервале от 6 до 20. Результаты обработки приведены ниже:

Величина	$\overline{d}$	$n^{-1/2}$	$\lvert\overline{d}\rvert n^{1/2}$	P, %
d_1	+0,246	0,213	1,15	>10
d_2	−0,532	0,213	2,50	0,6

Здесь P — оцененная по теореме Ляпунова вероятность получить значение $\overline{d}$ не меньше (или не больше) наблюденного при нормальном распределении величины λ и статистической независимости углов вылета частиц в рассмотренных ливнях.

Как видим, значение $\overline{d}_2$ явно противоречит нормальному распределению величины λ в рассмотренных ливнях, а значение $\overline{d}_1$ не противоречит предположению о симметрии этого распределения (напомним, что $\Gamma_1=0$ для любого симметричного распределения).

Можно сопоставить приведенные результаты с предсказаниями модели двух центров. Если предположить справедливость простейшего варианта этой модели [плотность распределения величины λ в виде (5.7)], то можно рассчитать зависимость эксцесса Γ_2 от σ (рис. 6, кривая *1*). Если же дополнительно предположить равенство скоростей вторичных частиц в системе покоя центров скорости самого центра в л. с. к. (ультрарелятивистское приближение), то изотропному распаду центров будет соответствовать кривая *2* рис. 6. В обоих случаях эксцесс Γ_2 при больших σ оказывается отрицательным, а асимметрия $\Gamma_1=0$. Следовательно, экспериментальные значения $\overline{d}_k$ находятся в качественном соответствии с предсказаниями двухцентровой модели.

В заключение рассмотрим метод проверки одной из частных моделей множественной генерации частиц, интересный тем, что для его применения требовалось зна-

ние не формы экспериментального углового распределения, а лишь одной из его характеристик.

Согласно модели, предложенной Хасегава [43], при нуклон-нуклонных (NN) столкновениях высокой энергии образуется четное число так называемых H-квантов, распадающихся затем на вторичные частицы, причем в

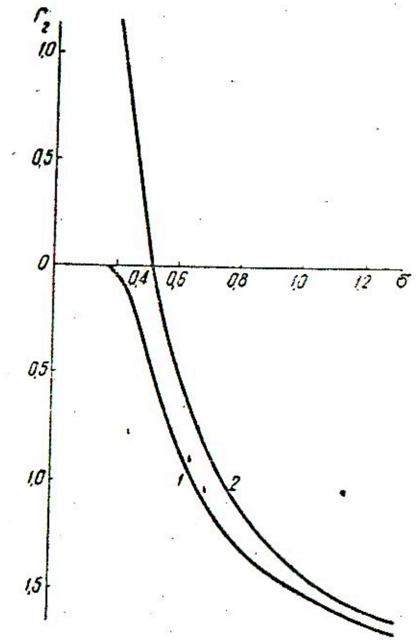

Рис. 6. Зависимость эксцесса Γ_2 от стандартного отклонения σ величины λ, рассчитанная по двухцентровой модели [27]:

1 — нормальное угловое распределение частиц при распаде каждого центра; *2* — изотропное распределение при скоростях частиц, равных скорости данного центра.

исследованных им ливнях это число, за редкими исключениями, равно двум или четырем. Угловое распределение вторичных частиц в системе покоя кванта неизотропно и описывается законом $\sin^2\theta^*$, а лоренц-факторы квантов в с.ц.м. NN-столкновения могут принимать лишь дискретные значения: $\tilde{\gamma}_1=1{,}5$ и $\tilde{\gamma}_2=8$. Поскольку основные характеристики этой модели были получены Хасегава путем субъективного разделения ливневых частиц на группы, возникающие от распада отдельных H-квантов, и наличие этих групп в распределении по величине $\lambda = \lg \mathrm{tg}\,\vartheta$ могло быть следствием простых статистических флуктуаций, авторами работы [36] был проведен статистический анализ распределения ливневых частиц в про-

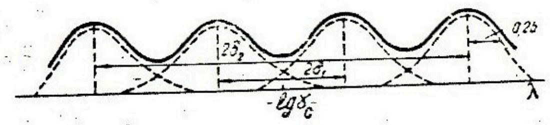

Рис. 7. Распределение величины λ для вторичных частиц согласно модели Хасегава для случая четырех H-квантов.

анализированных им ливнях для проверки модели многих центров.

При больших энергиях, когда лоренц-фактор с.ц.м. в л.с.к. γ_c существенно больше $\tilde{\gamma}$, лоренц-факторы γ H-квантов в л.с.к. удовлетворяют соотношению

$$\left.\begin{aligned} \lg\gamma &= \lg\gamma_c \pm \delta \\ \delta &= \lg\left(\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (5.23)$$

причем знак плюс соответствует движению H-кванта вперед в с.ц.м., а знак минус — движению назад. Распаду H-кванта на релятивистские частицы по закону $\sin^2\vartheta^*$ соответствует симметричное парциальное распределение величины λ с центром в точке $-\lg\gamma$, однозначно определяемое угловым распределением в системе покоя кванта. На рис. 7 показано распределение вторичных частиц по величине λ в ливнях с фиксированной энергией, числом центров и множественностью n.

Характерная черта модели Хасегава состоит в том, что центральные моменты μ_k распределения величины λ имеют определенные значения. Действительно, выражая μ_k через моменты μ_{k0} парциального распределения, можно получить следующие формулы, справедливые для модели четырех H-квантов:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_{20} + \left(\delta_1^2 + \delta_2^2\right)/2, \\ \mu_4 &= \mu_{40} + 3\mu_{20}\left(\delta_1^2 + \delta_2^2\right) + \left(\delta_1^4 + \delta_2^4\right)/2 \\ \mu_{k0} &= \int_0^\pi \lg^k \mathrm{tg}\left(\vartheta^*/2\right) \sin^3\vartheta^* d\vartheta^* \Big/ \int_0^\pi \sin^3\vartheta^* d\vartheta^* \end{aligned}\right\}. \qquad (5.24)$$

Здесь δ_1 и δ_2 получаются подстановкой во вторую формулу (5.23) соответственно значений $\tilde{\gamma}_1 = 1{,}5$ и $\tilde{\gamma}_2 = 8$. Чтобы получить моменты μ_k для модели двух H-квантов, достаточно в (5.24) заменить δ_2 на δ_1.

При статистической независимости величин $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ математическое ожидание и дисперсия случайной величины s^2 (5.10) равны соответственно [15];

$$\left.\begin{aligned} \nu(s^2) &= \frac{n-1}{n}\mu_2 \\ \sigma^2(s^2) &= \left(\mu_4 - \mu_2^2\right)/n - 2\left(\mu_4 - 2\mu_2^2\right)/n^2 + \\ &+ \left(\mu_4 - 3\mu_2^2\right)/n^3 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.25)$$

Введем случайную величину α, равную

$$\alpha = \left[s^2 - \nu(s^2)\right]^2 / \sigma^2(s^2), \qquad (5.26)$$

где $\nu(s^2)$ и $\sigma^2(s^2)$ определяются по формулам (5.24) и (5.25). При справедливости модели Хасегава ее математическое ожидание равно единице независимо от множественности n. При больших n величина α должна иметь χ^2-распределение с одной степенью свободы, так как она является квадратом случайной величины, имеющей асимптотически нормальное распределение.

Авторы работы [36] исследовали 46 ливней с энергией выше 10^{12} *эв*, удовлетворяющих необходимым критериям отбора квазинуклонных взаимодействий в фотоэмульсии, на основе которых была предложена модель H-квантов. Использовались лишь экспериментальные значения s^2, опубликованные в литературе. Для каждого ливня было рассчитано два значения α в предположении справедливости моделей двух и четырех H-квантов и было взято наименьшее из этих значений α_{min}. Распределение ливней по величине α_{min} отражено на рис. 8 (n — число ливней; ошибки — статистические). На этом же рисунке для сравнения показано χ^2-распределение с одной степенью свободы. При справедливости модели Хасегава математическое ожидание $\nu(\alpha_{min})$ величины α_{min} должно быть меньше или равно единице. Однако согласно экспериментальным данным оно оказалось равным

$$\nu(\alpha_{min}) = 2{,}01 \pm 0{,}25.$$

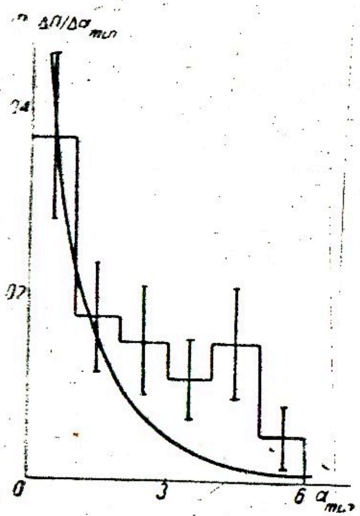

Рис. 8. Распределение 46 ливней по величине α_{min}.

Естественный вывод из описанной процедуры заключается в том, что проверяемая модель не согласуется с экспериментальными данными.

В заключение отметим следующее немаловажное обстоятельство. Во всех рассмотренных выше методах анализа формы угловых распределений предполагалась статистическая независимость углов вылета вторичных частиц в ливнях. В действительности этой независимости не имеется вследствие действия закона сохранения энергии-импульса. При большом числе вторичных частиц данное обстоятельство, по-видимому, несущественно, однако при малых n неучет влияния этого закона сохранения может сделать статистический анализ совершенно некорректным. Влияние закона сохранения энергии-импульса на угловые характеристики звезд будет оценено в дальнейшем при решении некоторых статистических задач, связанных с анализом звезд, имеющих малое число вторичных частиц.

§ 6. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ ЦЕНТРА МАСС

Для получения сведений о механизме множественного образования частиц и сравнения экспериментальных данных с различными теориями и моделями большой интерес представляет исследование углового распределения вторичных частиц в системе центра масс (с.ц.м.) взаимодействующих частиц. Однако, вследствие невозможности энергетических измерений на большинстве следов релятивистских частиц при больших энергиях или их неточности, точный перевод измеренных в лабораторной системе координат (л.с.к.) углов вылета частиц в с.ц.м. является нередко трудной задачей. Часто используемые допущения о равенстве $\beta_c/\tilde{\beta} = 1$ (ультрарелятивистское приближение) или постоянстве поперечного импульса вторичных частиц, хотя и позволяют сделать некоторые качественные суждения об угловом распределении в с.ц.м., все же оказываются достаточно грубыми.

При исследовании углового распределения в с.ц.м. удобно использовать величину $\eta = \cos\tilde{\vartheta}$ ($\tilde{\vartheta}$ — пространственный угол вторичной частицы в с.ц.м.). Это связано с тем, что изотропному в с.ц.м. угловому распределению соответствует плотность распределения углов $\tilde{\vartheta}$:

$$f(\tilde{\vartheta})\,d\tilde{\vartheta} = \frac{1}{2}\sin\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta} = \frac{1}{2}d(\cos\tilde{\vartheta}) = \frac{1}{2}d\eta \qquad (6.1)$$
$$(-1 \leqslant \eta \leqslant 1),$$

т. е. равномерное распределение величины η в интервале $(-1,1)$. Анизотропия углового распределения в с.ц.м., вследствие которой распределение величины η отличается от равномерного, может быть количественно выражена в виде некоторой полиноминальной функции распределения величины η (или величины $\sin\tilde{\vartheta}$). С одним из таких распределений мы уже встречались при статистической проверке модели Хасегава (§ 5), в которой оно имело вид $\sin^2\tilde{\vartheta} = 1 - \eta^2$. Полиноминальный вид распределения величины n вытекает также и из других теорий и моделей множественного образования частиц.

Таким образом, простейшая задача, возникающая при статистическом анализе угловых распределений в с. ц. м., заключается в определении показателя степени m в распределении типа $\eta^m d\eta$ на основании данных выборки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, полученной при экспериментальном исследовании одного ливня или (чаще) совокупности однородных ливней.

Наблюденное экспериментальное распределение может быть сопоставлено с гипотетическим типа $\eta^m d\eta$ с помощью некоторых статистических критериев (в том числе и описанных в § 5). Мы опишем здесь простой статистический критерий, предложенный Н. Н. Ройнишвили и К. В. Мандрицкой [28]. Он замечателен тем, что является наиболее мощным* критерием проверки распределения $\eta^m d\eta$ по отношению к альтернативной гипотезе $\eta^k d\eta$.

Рассмотрим случайную величину ξ, изменяющуюся от 0 до 1, и примем в качестве гипотетического распределения этой величины распределение

$$f(\xi)\,d\xi = (m+1)\,\xi^m d\xi \qquad (6.2)$$

(множитель $m+1$ введен для нормировки). То обстоятельство, что величина η в действительности распределена в интервале $(-1,1)$, несущественно, так как любое распределение η в указанном интервале может быть трансформировано в распределение на отрезке $(0,1)$ (для симметричного относительного угла $\tilde{\vartheta}=\pi/2$ распределения, например, нужно просто удвоить плотность распределения η в интервале $(0,1)$).

* Наиболее мощным критерием проверки гипотезы H относительно альтернативной гипотезы H' называется критерий, который при любой заданной вероятности ошибки первого рода (ошибка первого рода — ошибка, связанная с отвержением правильной гипотезы) обеспечивает минимальную вероятность совершения ошибки второго рода (ошибка второго рода возникает тогда, когда не отвергается ложная гипотеза) по сравнению с любым другим критерием (см., например, [9]). Подобного рода критерии могут быть найдены, к сожалению, лишь для ограниченного класса вероятностных задач.

Функция правдоподобия (т. е. совместная вероятность наблюдения данной выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) для распределения (6.2) имеет вид

$$F = (m+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right)^m. \qquad (6.3)$$

Оценка $\mu_{\text{нп}}$ наибольшего правдоподобия параметра m легко находится из равенства $\partial \ln F/\partial m = 0$ (т. е. из требования максимальности вероятности F):

$$\mu_{\text{нп}} = -n\Big/\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i - 1 = 1/a - 1; \qquad (6.4)$$

здесь

$$a = -\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i/n = -\overline{\ln \xi}. \qquad (6.5)$$

Как отмечалось в § 2, метод наибольшего правдоподобия всегда приводит к состоятельным и асимптотически нормально распределенным оценкам, имеющим наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками. Математическое ожидание и дисперсия оценки $\mu_{\text{нп}}$ равны соответственно

$$\nu(\mu_{\text{нп}}) = \frac{n}{n-1}m + \frac{1}{n-1} \qquad (6.6)$$

и

$$\sigma^2(\mu_{\text{нп}}) = \frac{n^2(m+1)^2}{(n-1)^2(n-2)}. \qquad (6.7)$$

Согласно (6.6) оценка $\mu_{\text{нп}}$ не является несмещенной. Поэтому удобно ввести величину

$$\mu = -(n-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i - 1 = (n-1)/a - 1, \qquad (6.8)$$

математическое ожидание которой равно m, а дисперсия равна

$$\sigma^2(\mu) = (m+1)^2/(n-2). \qquad (6.9)$$

Асимптотическая нормальность оценки μ величины m и формула (6.9) позволяют при большом n указать доверительный интервал, в котором должно лежать значение μ при справедливости гипотезы (6.2) с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Строгое доказательство максимальной мощности этого критерия, а также аналитические выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода при альтернативе $g(\xi)\,d\xi = (k+1)\,\xi^k d\xi$ даны в работе [28].

Поскольку распределения типа $\xi^m d\xi$ встречаются во многих проблемах физики высоких энергий, рассмотренный метод может быть использован не только при анализе угловых распределений в с. ц. м.

Как уже упоминалось, построение экспериментальных распределений пространственных углов в с. ц. м. часто бывает невозможным без довольно грубых приближений. Однако, если энергия ливнегенерирующих частиц известна (т. е. известна скорость с. ц. м. в л. с. к.), можно исследовать угловое распределение в с. ц. м., не переводя в эту систему измеренные в л. с. к. пространственные углы. Для этого надо воспользоваться известными формулами преобразования функций распределения математической статистики и формулами релятивистской кинематики, связывающими кинематические переменные (угол, импульс и др.) в с. ц. м. и л. с. к. Эти формулы дают возможность переводить гипотетические угловые распределения из с. ц. м. в л. с. к. и производить статистический анализ угловых распределений в л. с. к.

В качестве примера рассмотрим одну из подобных задач [3].

Проведем теоретический расчет плотности распределения величины $x = \lg|tg\,\vartheta|$ (ϑ — пространственный угол вторичной частицы в л. с. к.) при условии изотропии углового распределения вторичных частиц в с. ц. м. с учетом их энергетического спектра. Будем исходить из трехмерного нормального (максвелловского) распределения импульсов* вторичных частиц в с. ц. м., которое, как известно, в сферических координатах имеет вид

$$\varphi(\tilde{p}, \cos\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})\,\tilde{p}^2 d\tilde{p}\,d(\cos\tilde{\vartheta})\,d\tilde{\varphi} =$$
$$= (2\pi)^{-3/2}\sigma^{-3}\exp\left(-\tilde{p}^2/2\sigma^2\right)\tilde{p}^2 d\tilde{p}\,d(\cos\tilde{\vartheta})\,d\tilde{\varphi} \quad (6.10)$$

*Т. е. предполагается независимость компонент импульсов вторичных частиц $\tilde{p}_x$, $\tilde{p}_y$, $\tilde{p}_z$ в с.ц.м. и нормальная форма их распределений с параметрами 0, σ^2.

(знак $\sim$ над буквой означает, что соответствующая величина относится к с. ц. м.). Из (6.10) непосредственно следует, что это распределение отвечает изотропному угловому распределению.

Воспользовавшись преобразованием функции распределения [20] [формула (10.2)], записанным в сферических координатах, и лоренц-преобразованиями от с. ц. м. к л. с. к., мы получили соответствующую функцию распределения в л. с. к., проинтегрировав которую по импульсу p и азимутальному углу φ, нашли следующую функцию распределения* по $\cos\vartheta$:

$$\psi(\cos\vartheta) = 2\pi\int_0^\infty f_1(p, \cos\vartheta)\,p^2 dp,$$

$$f_1(p, \cos\vartheta) = (2\pi)^{-3/2}\sigma^{-3}\gamma_c\left[\left(\sqrt{p^2+m^2} - \beta_c p\cos\vartheta\right)\times\right.$$
$$\left.\times(p^2+m^2)^{-1/2}\right]\exp\left\{-\left[\gamma_c^2\left(\sqrt{p^2+m^2} - \beta_c p\cos\vartheta\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left.- m^2\right]/2\sigma^2\right\}, \qquad (6.11)$$

где m — масса пиона;

β_c, γ_c — скорость и лоренц-фактор с.ц.м. в л.с.к.

Плотность распределения величины x находится из соотношения

$$f(x) = \left|\frac{d(\cos\vartheta)}{dx}\right|[\psi(t) + \psi(-t)],$$

$$t = |\cos\vartheta| = [1 + \exp(2x/M)]^{-1/2} \qquad (6.12)$$

($M = \lg e$). Подставив (6.11) в (6.12) и сделав замену переменной $p = m\,tg\,\alpha$, после небольших преобразований получим следующее выражение для плотности распределения величины x:

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-3}M^{-1}m^3\gamma_c\exp(m^2/2\sigma^2)\,t(1-t^2)\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}[f_2(x, \alpha) + f_2(-x, \alpha)]\,d\alpha,$$

* При сделанном предположении, что все вторичные частицы являются пионами.

$$f_2(x, \alpha) = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sec^2\alpha \left(1 - \beta_c t \sin\alpha\right) \times$$
$$\times \exp\left[-m^2\gamma_c^2 \sec^2\alpha \left(1 - \beta_c t \sin\alpha\right)^2/2\sigma^2\right]. \qquad (6.13)$$

Параметр σ в полученном выражении можно определить эмпирически, используя среднее значение поперечного импульса пионов.

Найдем математическое ожидание (среднее значение) величины x. Проще всего сделать это, снова перейдя к с.ц.м. Так как

$$x = \lg|\mathrm{tg}\,\vartheta| = -\lg\gamma_c +$$
$$+ \lg\left|\left[\sin\tilde{\vartheta}/\left(\cos\tilde{\vartheta} + \beta_c\sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}/\tilde{p}\right)\right]\right|, \qquad (6.14)$$

то математическое ожидание величины x определяется такой формулой:

$$\nu(x) = -\lg\gamma_c + 2\pi\int_0^\infty\int_0^\pi \lg\left|\left[\sin\tilde{\vartheta}/\left(\cos\tilde{\vartheta} +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+ \beta_c\sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}/\tilde{p}\right)\right]\right|(2\pi)^{-3/2}\sigma^{-3}\exp\left(-\tilde{p}^2/2\sigma^2\right) \times$$
$$\times \tilde{p}^2 d\tilde{p}\sin\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}. \qquad (6.15)$$

Проинтегрировав (6.15) по $\tilde{\vartheta}$ и сделав замену переменной $\tilde{p} = m\,\mathrm{tg}\,\alpha$, после небольших преобразований приходим к соотношению

$$\nu(x) = -\lg\gamma_c + (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-3}\int_0^{\pi/2} f_3(\alpha)\,d\alpha,$$

$$f_3(\alpha) = \left[\lg 4 + (\beta_c/\sin\alpha - 1)\lg|\beta_c/\sin\alpha - 1| -\right.$$
$$\left.- (\beta_c/\sin\alpha + 1)\lg(\beta_c/\sin\alpha + 1)\right] \times$$
$$\times \exp\left(-m^2\mathrm{tg}^2\alpha/2\sigma^2\right) m^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha. \qquad (6.16)$$

Интегралы (6.13) и (6.16) не имеют особых точек и интегрируются численно.

Формула (6.13) может быть использована для проверки предположения об изотропии углового распределения в с. ц. м. На рис. 9 (из работы [3]) представлены экспериментальные гистограммы распределения величины x для вторичных заряженных частиц из протон-нуклонных взаимодействий при энергии 24 *Гэв*. При этом для уменьшения доли протонов среди вторичных частиц из pN-столкновений были удалены протоны отдачи (сильно ионизующие следы), а также половина релятивистских следов с наименьшими углами ϑ из коллекции, содержащей ближайшие к первичному направлению следы каждой звезды*. На этом же рисунке показана плотность распределения величины x, рассчитанная по формуле (6.13) при значении σ, соответствующем среднему поперечному импульсу** $\bar{p}_\perp = 0{,}25$ *Гэв/с*. Сравнение гистограмм и кривых на рис. 9 свидетельствует об анизотропии углового распределения вторичных частиц в системе центра масс pN-взаимодействий при $E = 24$ *Гэв* (вероятность получения значения χ^2, большего, чем вычисленное, при согласии эмпирических гистограмм с распределением (6.13), во всех случаях меньше 1%). Эта анизотропия сильнее выражена при малых множественностях, но сохраняется вплоть до самых больших ее значений. То обстоятельст-

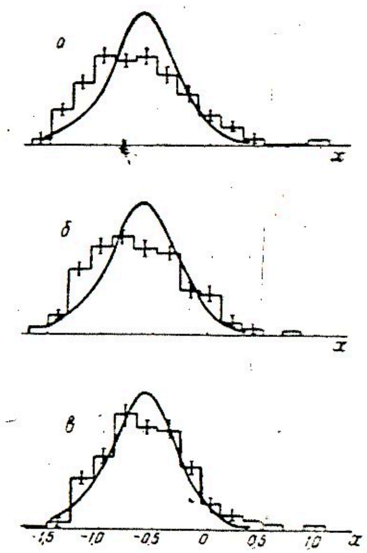

Рис. 9. Распределение вторичных пионов по величине $x = \lg|\mathrm{tg}\,\vartheta|$ в pN-взаимодействиях при $E = 24$ *Гэв* [3]: *а* — $N = 4{,}5$; *б* — $N = 6{,}7$; *в* — $N = 8 \div 12$.
Кривая рассчитана по формуле (6.13) при

$$\bar{p}_\perp = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma = 0{,}25.$$

* В некоторых работах указано, что эти частицы преимущественно являются протонами.

** Это значение среднего поперечного импульса является средневзвешенным значением ряда величин $\bar{p}_\perp$, полученных в нескольких экспериментах, выполненных при близких энергиях первичных частиц.

во, что при упомянутой выше процедуре удаления протонов в число выброшенных могли попасть пионы, лишь усиливает сделанное заключение.

Аналогичным путем можно проверить любое предположение о конкретном виде анизотропии в с. ц. м. при произвольном импульсном спектре вторичных частиц. Однако уже в описанном выше простейшем случае для плотности распределения пространственных углов в л. с. к. получилось довольно громоздкое выражение. Поэтому в ряде случаев оказывается более выгодным провести переход от с. ц. м. к л. с. к. с помощью статистического моделирования (метода Монте-Карло).

При столкновении одинаковых частиц (например, в нуклон-нуклонных соударениях) угловое распределение вторичных частиц в с ц. м. должно быть симметричным относительно угла $\tilde{\vartheta}=\pi/2$ в суммарном ливне. В индивидуальных же актах ядерных взаимодействий угловые распределения в с. ц. м. могут быть асимметричны как «вперед» (избыток частиц с $\tilde{\vartheta}<\pi/2$), так и «назад» (избыток частиц с $\tilde{\vartheta}>\pi/2$) вследствие периферического характера взаимодействий. Следовательно, выяснение возможной асимметрии углового распределения вторичных частиц в с. ц. м. индивидуальных случаев ядерных взаимодействий представляет большой интерес.

Рассмотрим совокупность ливней, характеризующихся произвольной $\left(\text{по симметричной относительно угла } \tilde{\vartheta}=\pi/2\right)$ плотностью $p\left(\tilde{\vartheta}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right)$ (α_k — произвольные параметры) распределения углов $\tilde{\vartheta}$ вторичных частиц в с.ц.м. Пусть n_1 — число частиц в ливне, углы вылета которых $\tilde{\vartheta}<\pi/2$, а n_2 — число частиц с $\tilde{\vartheta}>\pi/2$ ($n_1+n_2=n$, где n — полное число вторичных частиц в ливне). Предположим, что все n одинаково распределенных случайных величин $\tilde{\vartheta}_j$ ($j=1, 2, \ldots, n$) статистически независимы. Для любого симметричного распределения углов $\tilde{\vartheta}$ это означает, что величины n_1 и n_2 представляют собой случайные величины, средние значения которых равны $n/2$, а стандартные отклонения равны $\sqrt{n}/2$. Таким образом, это предположение учитывает статистические флуктуации чисел частиц, испускаемых „вперед“ и „назад“ в с.ц.м. Легко показать, что случайная величина

$$\varkappa=(n_1-n_2)/\sqrt{n} \tag{6.17}$$

имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную 1.

Пусть m ливней имеют одну и ту же плотность углового распределения вторичных частиц

$$p\left(\tilde{\vartheta}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right),$$

но, вообще говоря, различные значения n и α_k. Для усредненной по этим ливням случайной величины

$$\bar{\varkappa}=\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i/m \tag{6.18}$$

математическое ожидание и стандартное отклонение соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} \nu(\bar{\varkappa}) &= 0 \\ \sigma(\bar{\varkappa}) &= 1/\sqrt{m} \end{aligned}\right\}. \tag{6.19}$$

На основании теоремы Ляпунова, условие применимости которой выполняется для любой последовательности ливней, можно считать, что величина $\bar{\varkappa}$ при достаточно большом числе ливней m является нормально распределенной. Это дает возможность легко указать доверительный интервал, внутри которого должно лежать значение $\bar{\varkappa}$, с вероятностью, близкой к 1, и проверить предположение о симметрии углового распределения вторичных частиц в с. ц. м. при статистической независимости углов вылета частиц в каждом ливне.

С равным успехом вместо величины $\varkappa$ (6.17) можно использовать величину

$$\alpha_2=\varkappa^2=\frac{(n_1-n_2)^2}{n}. \tag{6.20}$$

В тех же предположениях относительно плотности углового распределения в с. ц. м. можно найти математическое ожидание и стандартное отклонение величины α_2, которые равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} \nu(\alpha_2) &= 1 \\ \sigma(\alpha_2) &= [2(1-1/n)]^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

(см. гл. III), а также соответствующие характеристики для усредненной по m ливням с любыми значениями n случайной величины

$$\overline{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_2)_i / m, \quad (6.22)$$

которые оказываются равными

$$\left.\begin{aligned} \nu(\overline{\alpha}_2) &= 1 \\ \sigma(\overline{\alpha}_2) &= [2(1-\overline{1/n})/m]^{1/2} \end{aligned}\right\}. \quad (6.23)$$

Некоторые авторы (например, [25]) для анализа асимметрии углового распределения в с. ц. м. использовали случайную величину

$$a = \frac{n_1 - n_2}{n}. \quad (6.24)$$

Нам, однако, представляется, что вследствие прямой зависимости математического ожидания и дисперсии этой величины от числа частиц n в ливне ее применение менее удобно.

Критерии $\varkappa$ и α_2 могут быть использованы не только при анализе асимметрии углового распределения в с.ц.м., но и в широком классе задач, в которых сравниваются характеристики двух равновероятных при сделанной гипотезе подгрупп случайных величин, например для анализа нормальности угловых распределений вторичных частиц в л. с. к., если разбить область изменения величины $\lambda = \lg \operatorname{tg} \tilde{\vartheta}$ в каждом ливне на две равновероятные части: 1) $|\lambda - \overline{\lambda}| > 0{,}674\sigma$ и 2) $|\lambda - \overline{\lambda}| < 0{,}674\sigma$, где $\sigma \approx \left[\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \overline{\lambda})^2 / (n-1)\right]^{1/2}$.

Напомним, что при анализе случайных величин $\varkappa$ и α_2 допускались предположения об одинаковости распределений углов ϑ_j и их статистической независимости в отдельных ливнях. В действительности оба эти предположения нарушаются из-за различия угловых распределений разных сортов частиц (нуклонов и пионов, например); кроме того, действие закона сохранения энергии-импульса, по-видимому, тем сильнее, чем меньше число частиц n в ливне. Эти факторы можно учесть при некоторых предположениях путем статистического моделирования.

Другая трудность, возникающая при анализе асимметрии углового распределения в с. ц. м. при высоких энергиях столкновений, заключается в необходимости перевода углов вылета частиц из л. с. к. в с. ц. м., который, как уже отмечалось, затруднителен из-за неточности или невозможности импульсных измерений. Поэтому представляет интерес поиск методов анализа асимметрии угловых распределений в с. ц. м., не требующих перевода углов вылета из л. с. к. в с. ц. м. Один из таких методов будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 7. НЕОДНОРОДНОСТЬ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Большой интерес представляет изучение степени однородности угловых распределений вторичных частиц из ядерных взаимодействий высокой энергии с целью выяснения механизма их генерации. Обнаружение неоднородности угловых распределений в имеющейся совокупности ливней (т. е. обнаружение двух, или более, классов ливней с различными угловыми распределениями) позволяет сделать заключение о наличии двух (или более) различных механизмов генерации вторичных частиц, либо о наличии каких-то физических факторов, влияющих на угловое распределение в некоторой части изучаемых ливней. В математической статистике для решения задачи о возможной неоднородности распределений в совокупности малых выборок случайной величины, составляющих большую (сложную) выборку, разработан так называемый метод дисперсионного анализа. В данном разделе мы рассмотрим вопрос о применении этого мощного метода для выяснения степени однородности угловых распределений в совокупности из большого числа ливней с одинаковым числом вторичных частиц и одинаковой первичной энергией [2, 4].

Возьмем m ливней с одинаковой энергией первичных частиц и одинаковым числом n вторичных заряженных частиц. Пусть $x = f(\vartheta)$ — произвольная, удачно выбранная функция пространственного угла вылета вторичных частиц с направлением первичной в л.с.к., а $x_{ij} = f(\vartheta_{ij})$ — значение этой функции для j-й частицы i-го ливня ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). В теории дисперсионного анализа используется величина F (дисперсионное отношение), равная

$$F = \frac{mn}{m-1} s_1^2 / s_2^2, \tag{7.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} s_1^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2 / m \\ s_2^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 / (n-1) \right] / m \\ \bar{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij} / n \\ \bar{x} &= \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i / m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} / mn \end{aligned}\right\}. \tag{7.2}$$

Формулы (7.1) и (7.2) показывают, что величина F прямо пропорциональна дисперсии s_1^2, характеризующей разброс значений $\bar{x}_i$ между ливнями, и обратно пропорциональна дисперсии s_2^2, которая характеризует разброс значений x внутри ливней.

Используя новую величину

$$s^2 = s_1^2 + \frac{n-1}{n} s_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 / mn \tag{7.3}$$

(s^2 характеризует разброс значений x в суммарном ливне), F можно представить также в форме

$$F = \frac{m(n-1)}{(m-1)\left(s^2/s_1^2 - 1\right)} \tag{7.4}$$

или

$$F = \frac{m}{m-1}\left[1 + n\left(s^2/s_2^2 - 1\right)\right]. \tag{7.5}$$

При большом числе m ливней (испытаний) справедливы следующие приближенные равенства:

$$\left.\begin{aligned} s^2 &\approx \sigma^2(x) \\ s_1^2 &\approx \sigma^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j / n\right) \end{aligned}\right\}. \tag{7.6}$$

Здесь $\sigma^2(x)$ — дисперсия случайной величины x (величины x_j, разумеется, предполагаем одинаково распределенными). При статистической независимости углов ϑ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) дисперсия среднего арифметического равна

$$\sigma^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j / n\right) = \sigma^2(x) / n. \tag{7.7}$$

Подставляя значения (7.6) и (7.7) в формулу (7.4), получим приближенные равенства

$$\left.\begin{aligned} s^2 / s_1^2 &\approx n \\ F &\approx 1 \end{aligned}\right\}. \tag{7.8}$$

При конечном числе m ливней и статистической независимости* углов ϑ_j значения F следуют (в сложных испытаниях) хорошо изученному в математической статистике распределению (F-распределению) с $m - 1$ и $m(n-1)$ степенями свободы. Поэтому легко указать доверительный интервал, внутри которого должно лежать значение F с вероятностью, близкой к единице. Если полученное значение F будет находиться вне этого интервала, можно утверждать, что независимость углов вылета вторичных частиц не имеет места в ливнях заданной энергии и множественности.

В общем случае, помимо равенств (7.8), могут реализоваться следующие возможности:

$$\left.\begin{aligned} s_1^2 &< \sigma^2(x) / n \\ s^2 / s_1^2 &> n \\ F &< 1 \end{aligned}\right\}, \tag{7.9}$$

* Предположение о нормальном распределении величин x_j не является обязательным при числе частиц $n \geqslant 4$ [9].

$$\left.\begin{array}{l} s_1^2 > \sigma^2(x)/n \\ s^2/s_1^2 < n \\ F > 1 \end{array}\right\}. \qquad (7.10)$$

В связи с этим остановимся на двух причинах, нарушающих независимость ϑ_j и эффективно действующих на критерий $F \approx 1$: *а*) влияние закона сохранения импульса (при лобовых столкновениях) и *б*) неоднородность угловых распределений вторичных частиц в л. с. к., связанная с механизмом их образования при периферических взаимодействиях.

В соответствии с законом сохранения импульса, налагающим определенные связи на импульсы вторичных частиц, нарушается независимость испускания частиц и перестают быть справедливыми равенства (7.8). В случае лобовых соударений, когда образуется единый сгусток ядерной материи, распадающийся на вторичные частицы, по этой же причине должно уменьшаться число асимметричных в с. ц. м. ливней, возникающих вследствие статистических флуктуаций углового распределения (тем сильнее, чем меньше число вторичных заряженных частиц), а следовательно, должны усиливаться однородность угловых распределений вторичных частиц и реализоваться неравенства (7.9). Для количественного подтверждения этой точки зрения мы воспользовались таблицами случайных звезд [17], полученных методом Монте-Карло и имитирующих *pp*-столкновения при энергии 11 *Гэв* согласно статистической теории множественного образования частиц с учетом закона сохранения энергии-импульса. Результаты обработки* этих звезд приведены в табл. 1. Вычисленные значения F действительно оказываются значительно меньше единицы при числе вторичных частиц $n=4$ и 6.

Для выяснения эффективности критерия F рассмотрим конкретные примеры корреляций типа *б*.

В работах Добротина и др. (см., например, [13]) отмечалось асимметричное испускание частиц в системе центра масс нуклон-нуклонных соударений в части ливней при средней энергии $3 \cdot 10^2$ *Гэв*. Возможной причиной этого является образование мезонного облака (фаерболла), движущегося в с. ц. м. В нуклон-нуклонных соударениях фиксированной энергии движение мезонного облака с различными скоростями в л. с. к. приведет к неоднородности угловых распределений вторичных частиц, что означает принципиальную возможность об-

* О выборе функции $x=f(\theta)$ и формуле для F будет сказано ниже.

Таблица 1

№ пп.	Тип ливней	n	m	F	Доверительные границы для F*			
1	Случайные звезды при $E = 11$ *Гэв*	4	124	*0,38*	0,70	0,79	1,27	1,40
2		6	21	*0,47*	0,39	0,53	1,68	2,06
3	*pN*-взаимодействие при $F = 24$ *Гэв*	4	171	1,03	0,73	0,80	1,23	1,34
4		5	124	*1,54*	0,70	0,78	1,26	1,39
5		6	135	0,86	0,73	0,80	1,25	1,36
6		7	65	0,97	0,62	0,71	1,34	1,51
7		8	49	1,12	0,57	0,68	1,39	1,55
8		9	30	*1,54*	0,48	0,60	1,50	1,80

* В каждой строке последней графы приведены четыре доверительные границы, такие, что вероятность получить (при независимости ϑ_j) значение F ниже первой границы равна 1%, ниже второй — 5%, выше третьей — 5%, выше четвертой — 1%. Значения F, существенно отличающиеся от единицы, набраны курсивом.

наружения этого эффекта без перевода углов вылета частиц в с. ц. м. Для обнаружения этой неоднородности рассмотрим возможность применения описанного выше метода дисперсионного анализа.

Будем исходить из следующей конкретной модели. Пусть при *NN*-столкновениях большой энергии с вероятностью $\alpha/2$ образуется мезонное облако, движущееся вперед в с. ц. м. с лоренц-фактором $\tilde{\gamma}$, значительно меньшим, чем лоренц-фактор с. ц. м. в л. с. к. γ_c. С той же вероятностью оно движется назад в с. ц. м. и распадается изотропно в своей системе покоя на релятивистские частицы. С вероятностью $1-\alpha$ осуществляется лобовое столкновение или любой другой механизм симметричного (но в общем случае анизотропного) испускания релятивистских частиц в с. ц. м. На рис. 10 показаны угловые распределения по величине $\lg \operatorname{tg} \theta$ для этих типов ливней согласно рассматриваемой модели.

Для вычисления F воспользуемся формулой (7.5), в которой s^2 при большом m приближенно равно дисперсии случайной величины x для суммарного распределения [см. формулу (7.6)], а для величины s_2^2, пред-

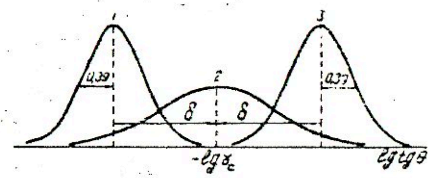

Рис. 10. Угловые распределения вторичных частиц в л. с. к. по величине $\lg \operatorname{tg} \vartheta$ для трех типов ливней:

$$\delta = \lg\left(\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right).$$

полагая независимость испускания частиц для каждого из трех типов ливней и пренебрегая влиянием закона сохранения импульса, легко получить приближенное равенство

$$s_2^2 \approx \frac{1}{2}\alpha\sigma_1^2(x) + (1-\alpha)\sigma_2^2(x) + \frac{1}{2}\alpha\sigma_3^2(x), \qquad (7.11)$$

где

$\sigma_k^2(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ — дисперсия случайной величины x для ливней k-го типа:

Определим функцию x следующим образом*:

$$\left.\begin{aligned} x &= +1 \quad \text{при } \vartheta \leqslant \vartheta_{1/2} \\ x &= -1 \quad \text{при } \vartheta > \vartheta_{1/2} \\ \operatorname{ctg} \vartheta_{1/2} &= \gamma_c \end{aligned}\right\}. \qquad (7.12)$$

* Столь «экзотический» выбор функции $x = f(\vartheta)$ обусловлен стремлением уменьшить влияние протонов среди вторичных частиц на результаты расчета, так как согласно результатам экспериментальных исследований протоны имеют значительно более анизотропное в с. ц. м. угловое распределение, нежели пионы. Выбор функции x в виде, например, $f(\vartheta) = \lg \operatorname{tg} \vartheta$ означал бы, ввиду вышеупомянутого обстоятельства, что протоны, составляющие при не очень малых n относительно небольшую часть вторичных частиц, оказывают сильное влияние на величину F. К этому вопросу мы вернемся ниже.

Здесь $\vartheta_{1/2}$ — теоретический (в общем случае отличающийся от экспериментально измеренного) половинный (медианный) угол испускания частиц в л.с.к. При таком выборе функции x справедливы равенства

$$\sigma^2(x) = 1;$$

$$\sigma_2^2(x) = 1 \qquad (7.13)$$

независимо от конкретной формы углового распределения в ливнях типа 2 (см. рис. 10). Для вычисления дисперсий $\sigma_1^2(x)$ и $\sigma_3^2(x)$ в формуле (7.11) достаточно знать вероятность получения значения $x = 1$ для ливней типа 1 и 3. Эту вероятность, равную

$$P(x = 1) = P(\lg \operatorname{tg} \vartheta \leqslant -\lg \gamma_c), \qquad (7.14)$$

можно выразить через значение δ при сделанном предположении об изотропии углового распределения в системе покоя мезонного облака. Действительно, так как лоренц-фактор γ мезонного облака в л.с.к. связан с лоренц-фактором этого облака в с.ц.м. $\tilde{\gamma}$ и лоренц-фактором самой с.ц.м. в л.с.к. γ_c соотношением (5.20), вероятность (7.14) получения значения $x = 1$ для ливней 1-го типа равна

$$p = P\left[\lg(\gamma \operatorname{tg} \vartheta) \leqslant \lg\left(\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right)\right] =$$

$$= P\left(\operatorname{tg}\frac{\tilde{\vartheta}}{2} \leqslant \tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right) = P\left(\tilde{\vartheta} \leqslant \tilde{\vartheta}_0\right), \qquad (7.15)$$

[мы воспользовались также формулой (5.1)], причем угол $\tilde{\vartheta}_0$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{\tilde{\vartheta}_0}{2} = \tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}. \qquad (7.16)$$

При изотропии углового распределения ливневых частиц в системе покоя мезонного облака [см. формулу (6.1)] вероятность p легко вычисляется:

$$p = \int\limits_0^{\tilde{\vartheta}_0} \frac{1}{2}\sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} =$$

$$=\left(\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2-1}\right)^2\Big/\left[1+\left(\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2-1}\right)^2\right]. \quad (7.17)$$

Используя очевидное равенство

$$\sigma_1^2(x)=1-\nu_1^2(x)=1-(2p-1)^2=\sigma_3^2(x), \qquad (7.18)$$

а также формулы (7.5), (7.11), (7.13) и (7.17), после небольших преобразований приходим к окончательному результату:

$$\left.\begin{aligned} &F\approx 1+n\beta \\ &\beta=\frac{\alpha\left[\left(\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2-1}\right)^2-1\right]^2}{\left[\left(\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2-1}\right)^2+1\right]^2-\alpha\left[\left(\tilde{\gamma}+\sqrt{\tilde{\gamma}^2-1}\right)^2-1\right]^2}\geqslant 0\end{aligned}\right\}. \quad (7.19)$$

Здесь β — монотонно возрастающая функция переменных α и $\tilde{\gamma}$, обращающаяся в нуль при $\alpha=0$ и при $\tilde{\gamma}=1$.

При учете закона сохранения импульса формула (7.11) несправедлива. В соответствии с этим законом, как указывалось выше, уменьшается различие между значениями $\overline{x}_i$ для ливней данного типа. При предельно сильном влиянии закона сохранения импульса значения $\overline{x}_i$ будут почти одинаковы для всех ливней каждого из трех типов и приближенно равны математическому ожиданию случайной величины x. В этом случае при сделанных выше предположениях относительно механизма NN-взаимодействия величину s_1^2 (7.2) при большом m можно представить в виде

$$s_1^2=\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_i^2/m-\overline{x}^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}\alpha\nu_1^2(x)+(1-\alpha)\,\nu_2^2(x)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\nu_3^2(x)-\nu^2(x), \qquad (7.20)$$

где $\nu_k(x)$ — математическое ожидание величины x для ливней k-го типа;

$\nu(x)$ — то же для суммарного распределения.

С помощью формул (7.4), (7.17), (7.18) и (7.20) получаем приближенное равенство

$$F\approx(n-1)\,\beta, \qquad (7.21)$$

справедливое при предельно сильном влиянии закона сохранения импульса. Обобщая (7.19) и (7.21), можно утверждать, что для описанной модели NN-взаимодействия (см. рис. 10) и при большом числе ливней m величина F заключена в интервале

$$(n-1)\,\beta<F<1+n\beta. \qquad (7.22)$$

Например, при $\alpha=0{,}3$, $\tilde{\gamma}=1{,}5$ и $n=10$ (эти цифры близки к полученным в работе [13]) неравенства (7.22) принимают следующий вид:

$$1{,}8<F<3.$$

Эффективность критерия F проверялась нами также и для несколько иной модели NN-взаимодействий. Методом Монте-Карло были получены случайные звезды, имитирующие NN-соударения при $E=3\cdot10^2$ *Гэв*. Во время розыгрыша случайных звезд задавался спектр скоростей мезонного облака в с. ц. м. (согласно полученному в работе [13]) и энергетический спектр вторичных частиц в системе покоя мезонного облака (последний был выбран максвелловским — см. § 6—с параметром σ, определенным из среднего значения поперечного импульса $p_\perp$ [13]). Результаты этого расчета по методу Монте-Карло подтверждают высокую эффективность критерия F в процессе обнаружения неоднородности угловых распределений в л. с. к.: при числе разыгранных звезд $m=40$ и числе вторичных заряженных частиц $n=8$ было получено значение $F=2{,}0$, что с вероятностью $\sim 0{,}999$ противоречит предположению о независимости углов ϑ_j.

В табл. 1 [2] приведены результаты обработки 605 pN-взаимодействий при энергии $E=24$ *Гэв* с числом вторичных заряженных частиц $n\geqslant4$. В этой же таблице содержатся аналогичные результаты для случайных звезд, имитирующих pp-соударения при $E=11$ *Гэв*, о которых говорилось выше. Из таблицы видно, что значения F для звезд, найденных в эмульсии, заметно выше, чем для случайных звезд, причем встречаются (при $n=5$ и 9) значения F, существенно превышающие единицу. Отсюда следует, что независимости углов вылета вторичных частиц нет, по крайней мере для некоторых множественностей. Большие значения F, наблюденные для pN-взаимодействий, можно объяснить неоднородностью угловых распределений в л. с. к., связанной с механизмом образования частиц при периферических взаимодействиях. Одним из таких механизмов может быть асимметричное испускание частиц в с. ц. м. NN-столкновений, наблюдавшееся авторами работы [13] при более высокой энергии.

При анализе pN-взаимодействий в фотоэмульсии часть столкновений происходит с нуклоном сложного ядра, который, как известно, не находится в покое. Внутриядерное движение нуклона-мишени может в принципе имитировать неоднородность угловых распределений и приводить к возрастанию F. Сделаем оценку степени неоднородности угловых распределений в л. с. к., возникающей вследствие внутриядерного движения нуклона-мишени.

Предположим, что с вероятностью $^1/_2$ первичный протон сталкивается с нуклоном мишени, движущимся с импульсом p_2 в л. с. к. навстречу налетающему протону, и с вероятностью $^1/_2$ реализуется столкновение с нуклоном, летящим с тем же импульсом в направлении движения первичной частицы (импульс первичного протона обозначим через p_1). При осуществлении любого механизма симметричного испускания релятивистских частиц в системе центра масс таких столкновений суммарное угловое распределение вторичных частиц в л. с. к. (по величине $\lg \operatorname{tg}\vartheta$, например) будет состоять из двух парциальных распределений, расстояние между центрами которых составляет величину, равную

$$2\delta = 2\lg\left(\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right) = \lg(\gamma_1/\gamma_2), \qquad (7.23)$$

где $\tilde{\gamma}$ и $\gamma_{1,2}$ — лоренц-факторы распадающихся центров соответственно в с. ц. м. столкновения протона с импульсом p_1 с покоящимся нуклоном и в лабораторной системе.

Используя (7.23) и очевидное (из кинематики) равенство ($c = 1$)

$$\gamma_{1,2} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (p_1 \pm p_2)^2}} \qquad (7.24)$$

(E_1, E_2 — энергии первичного протона и нуклона-мишени в л. с. к. соответственно), легко получить формулу

$$\left(\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}\right)^2 = \sqrt{\frac{m_N^2 + E_1 E_2 + p_1 p_2}{m_N^2 + E_1 E_2 - p_1 p_2}} \qquad (7.25)$$

(m_N — масса нуклона). Полагая $E_1 = 24$ *Гэв*, $p_2 = 0{,}2$ *Гэв/c** и используя (7.19), получаем**

$$\beta \approx 0{,}01. \qquad (7.26)$$

Следовательно, внутриядерное движение нуклона-мишени приводит к возрастанию F не более чем на несколько сотых и не может быть причиной наблюдаемого эффекта (см. табл. 1).

Сходный результат можно получить при оценке неоднородности, вызванной влиянием разброса по энергиям в пучке первичных протонов; оценка может быть произведена совершенно аналогичным путем.

Рассмотрим теперь другую возможность возникновения угловой неоднородности ливней — наличие двух различных механизмов генерации вторичных частиц, т. е. двух классов ливней с различными угловыми распределениями в л. с. к.

При взаимодействии частиц большой энергии со сложными ядрами [4] наряду со взаимодействиями с одним или несколькими нуклонами ядра-мишени возможны взаимодействия налетающей частицы с ядром как с целым (так называемые когерентные взаимодействия со сложными ядрами). При этом свойства данных взаимодействий таковы, что они могут быть ошибочно приняты за протон-нейтронные (pn) взаимодействия в фотоэмульсии [но они должны отсутствовать

* Это значение приближенно равно максимальному значению импульса Ферми нуклона в ядре [19].

** Напомним, что $\alpha = 1/2$ и что формула (7.19) получена в предположении изотропного разлета частиц в системах покоя распадающихся центров. Если угловое распределение в указанных системах анизотропно (но, разумеется, симметрично), то рассматриваемая здесь неоднородность лишь ослабевает.

среди ливней, удовлетворяющих необходимым критериям отбора протон-протонных (pp) соударений в фотоэмульсии]. Это связано с тем, что ядро-мишень в таких взаимодействиях, получая очень малый импульс, не разрушается, не возбуждается и сохраняет свой заряд. Существенно то, что когерентные взаимодействия в фотоэмульсии должны выглядеть как звезды без видимых следов возбуждения ядра, с нечетным числом вторичных ливневых частиц и очень узким (сравнительно с pN-взаимодействиями) угловым распределением в л. с. к.

Учитывая вышесказанное, остановимся на коллекции из большого числа квазинуклонных взаимодействий, зарегистрированных в фотоэмульсии; предположим также существование среди звезд с нечетным числом n вторичных заряженных частиц двух классов ливней, удовлетворяющих определенным критериям отбора: 1) истинных pn-взаимодействий и 2) когерентных взаимодействий быстрых протонов со сложными ядрами эмульсии. Рассмотрим введенную выше величину дисперсионного отношения F в виде (7.5) и выберем функцию пространственного угла $x = f(\vartheta)$ в виде (7.12). Долю когерентных взаимодействий среди ливней с числом вторичных заряженных частиц n обозначим через α, а вероятность получить значение $x = +1$ при когерентных взаимодействиях — через P. Будем считать, что для pn-столкновений эта вероятность равна 0,5.

С учетом (7.12) дисперсию s^2 (7.3) можно представить в виде

$$s^2 = 1 - \overline{x}^2, \tag{7.27}$$

а величины $\overline{x}$ и s_2^2 (7.2) при большом полном числе ливней m и независимости углов ϑ_j для каждого класса ливней в отдельности могут быть записаны в виде

$$\overline{x} \approx (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2,$$

$$s_2^2 \approx (1 - \alpha)\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2, \tag{7.28}$$

где $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 2P - 1$ — математические ожидания случайной величины x соответственно для pn-столкновений и когерентных взаимодействий;

$\sigma_1^2 = 1$ и $\sigma_2^2 = 1 - \nu_2^2$ — парциальные дисперсии той же величины.

С помощью формул (7.5), (7.27) и (7.28) получаем следующее окончательное выражение для величины F:

$$F \approx 1 + n\frac{\alpha(1-\alpha)(2P-1)^2}{1-\alpha(2P-1)^2}. \tag{7.29}$$

Например, при $\alpha = 0{,}1$, $P = 1$ и $n = 5$ имеем $F \approx 1{,}5$. Таким образом, критерий F обладает достаточной чувствительностью при обнаружении малой доли ливней

Таблица 2

E_0, Гэв	n	m	F	$F_{кр}^{*}$
10	2	213	0,64	—
	3	142	1,16	—
	4	197	0,72	1,31
	5	44	1,59	1,68
	6	44	0,82	1,67
	7	16	0,88	2,23
	8	8	0,83	2,98
24	4	171	1,03	1,34
	5	124	1,54	1,39
	6	135	0,86	1,36
	7	65	0,97	1,51
	8	49	1,12	1,58

* $F_{кр}$ — критический предел для величины F, выбранный так, что вероятность получить (при независимости ϑ_j) значение $F > F_{кр}$ равна 1%.

второго класса (когерентных взаимодействий), имеющих узкое угловое распределение.

В табл. 2 и на рис. 11 приведены значения F, вычисленные для pN-соударений при энергиях 10 Гэв (данные ЛВЭ ОИЯИ) и 24 Гэв [4]. Из них ясно видно, что значения F при числе вторичных заряженных частиц $n=3$ и 5 заметно больше, чем при $n=2,4$ и 6, причем при $E=24$ Гэв и $n=5$ значение F превышает верхний критический предел $F_{кр}$. Это различие между значениями F (т. е. меры угловой неоднородности ливней) при четных и нечетных n невозможно объяснить внутриядерным движением нуклонов мишеней, которое приводит к возрастанию F не более чем на несколько сотых (выше). Немонотонная зависимость F от n позволяет предположить, что при четном числе частиц n отобраны в основном pp-соударения, а при $n=3$ и 5, кроме pn-столкновений, имеются ливни другой природы с существенно отличающимся угловым распределением в л. с. к. (согласно анализу более узким). Полученный

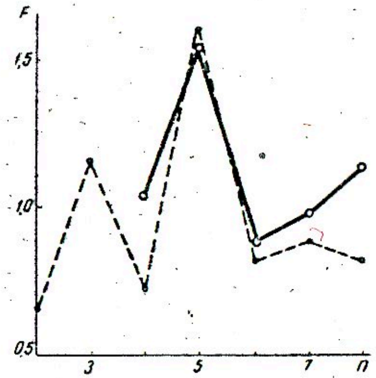

Рис. 11. Значение F в зависимости от числа частиц n: пунктирная линия—при энергии 10 $Гэв$, сплошная—при энергии 24 $Гэв$.

результат можно рассматривать как экспериментальное указание в пользу существования когерентной генерации частиц протонами на сложных ядрах.

В заключение заметим, что различие угловых распределений частиц разного сорта (например, протонов и пионов) при нашем способе нумерации вторичных частиц, когда величины x_j считаются одинаково распределенными, может привести к нарушению независимости величин x_j. Это различие, с одной стороны, может усилить разброс значений x внутри ливней из-за наличия в одном и том же ливне частиц разного сорта; с другой стороны, может увеличиться разброс значений x_i между ливнями из-за наличия ливней с разным числом протонов при заданном полном числе частиц n. Поэтому не ясно, как влияет рассматриваемая причина на величину F. Однако, если число частиц n велико, а доля протонов мала, при выборе функции x в виде (7.12) это влияние вряд ли будет сильным.

Глава III

ИССЛЕДОВАНИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ ОБРАЗОВАНИИ ЧАСТИЦ

§ 8. ВВЕДЕНИЕ

Для выяснения механизма процесса множественной генерации частиц при взаимодействиях быстрых частиц с нуклонами и ядрами большой интерес представляет исследование азимутального углового распределения вторичных частиц.

Азимутальный угол $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$ вторичной частицы определяется как угол между плоскостью, содержащей импульсы данной вторичной и первичной частиц, и произвольной (начальной) плоскостью, содержащей импульс первичной частицы (рис. 12). Иногда эта начальная плоскость отсчета азимутальных углов определяется физически (например, в нуклон-нуклонных или пион-нуклонных соударениях азимутальные углы можно отсчитывать от плоскости, содержащей импульсы первичной частицы и протона отдачи), но чаще такого физического начала отсчета выделить не удается.

Важно отметить, что с точки зрения общих квантовомеханических понятий [44] в последовательности (совокупности) однородных ливней, характеризующейся лишь одинаковыми импульсами первичных частиц (неполяризованный пучок), но для которой имеет смысл понятие вероятности, распределение азимутальных углов вторичных частиц должно быть с необходимостью изотропным. В этом случае имеет смысл говорить лишь о возможных корреляциях между азимутальными углами вторичных частиц в индивидуальных ливнях.

Поэтому при экспериментальном исследовании азимутального углового распределения приходится преодолевать своеобразные трудности, связанные, с одной стороны, со сложностью обнаружения азимутальных эффектов в индивидуальных ливнях при малых множественностях из-за больших статистических флуктуаций (это обстоятельство, как мы видели, наблюдалось и при исследовании распределений пространственных углов вылета) и, с другой, — с невозможностью составления суммарного ливня при отсутствии априорной, физически выделенной, начальной плоскости отсчета азимутальных углов.

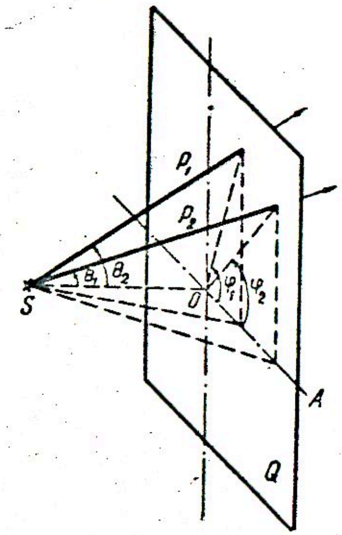

Рис. 12. Пространственные (ϑ_1, ϑ_2) и азимутальные (φ_1, φ_2) углы вылета вторичных частиц P_1 и P_2:
SO — направление движения первичной частицы; SOA — начальная плоскость отсчета азимутальных углов; OA — начальная ось отсчета азимутальных углов в плоскости Q, перпендикулярной направлению движения первичной частицы.

Интерес к изучению азимутального углового распределения вторичных частиц в актах множественного образования частиц обусловлен тем, что отдельные модели множественной генерации предсказывают различного рода корреляции между азимутальными углами в индивидуальных ливнях. Например, Краушаар и Маркс [45] предсказали корреляции типа a (рис. 13a) в азимутальном угловом распределении вторичных частиц, исходя из двухцентровой модели нуклон-нуклонных

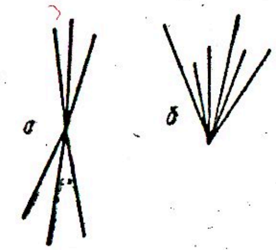

Рис. 13. Возможные корреляции в азимутальном угловом распределении вторичных частиц (след первичной частицы перпендикулярен плоскости рисунка) симметричного (a) и асимметричного ($б$) типа.

взаимодействий большой энергии. Тенденция мезонов к компланарности, предсказанная ими, может быть как вследствие наличия у распадающихся центров большого собственного момента импульса, так и ввиду отклонения этих центров от направления движения первичных частиц. Если образуется лишь один распадающийся центр, движущийся не по направлению первичной частицы, могут возникать корреляции типа $б$ (рис. 13$б$), т. е. корреляции асимметричного типа. Можно ожидать корреляций асимметричного типа и при нецентральных соударениях быстрых частиц со сложными ядрами вещества. Разумеется, могут быть и другие причины корреляций в азимутальном угловом распределении при множественном образовании частиц.

В конце 50-х — начале 60-х годов появились первые экспериментальные работы, посвященные исследованию азимутального углового распределения вторичных частиц из ядерных взаимодействий большой энергии. Авторами работ [12, 14, 16, 26, 32, 48] были предложены оригинальные методы исследования азимутальных эффектов. Однако эти методы страдают рядом недостатков. Во-первых, используемые авторами некоторых из перечисленных работ случайные величины нельзя считать независимыми, если они относятся к одному и тому же ливню. Например, в работе [16] такой случайной величиной является число частиц, попавших в 60-градусный интервал азимутальных углов. Эти величины, относящиеся к одному ливню, связаны линейной зависимостью, а именно в сумме они дают полное число ливневых частиц n, и возможность применения критерия χ^2 в подобных случаях нуждается в обосновании. Во-вторых, вышеуказанные методы позволяют лишь констатировать факт нарушения азимутальной изотропии вторичных частиц либо статистической независимости их углов вылета, но не дают возможности выяснить характер нарушения этих условий.

В некоторых работах [12, 14] сообщается, что критерий χ^2 применялся к каждому ливню в отдельности. Такой подход тоже не лишен недостатков. Во-первых, теория χ^2-критерия требует, чтобы ливни имели достаточно большое число частиц n, а во-вторых, вычисление величины χ^2 для индивидуальных ливней представляет по сути дела лишь первый этап статистического анализа и нуждается в обобщении.

Как курьезный случай, наконец, можно отметить работу [47], авторы которой пытались исследовать азимутальные эффекты в суммарном ливне, составленном из звезд, генерированных протонами с энергией 24 *Гэв*, при отсутствии физического начала отсчета азимутальных углов.

Ниже мы рассмотрим некоторые вполне строгие методы статистического анализа азимутального углового распределения.

§ 9. КРИТЕРИЙ χ^2

Азимутальное угловое распределение вторичных частиц, образованных во взаимодействиях частиц большой энергии с нуклонами и ядрами, может быть исследовано с помощью известного статистического критерия χ^2 (К. Пирсона), применяемого к каждому из актов ядерного взаимодействия в отдельности. Надо отметить, что в этом случае применение критерия χ^2 математически оправдано лишь при достаточно большом числе вторичных частиц n [$n \gtrsim (5 \div 10)\ m$, где m — число интервалов разбиения по азимутальному углу φ]. В. М. Чудаковым [37] была доказана возможность использования критерия Пирсона с целью обнаружения и исследования азимутальной анизотропии вторичных частиц и для случая небольших множественностей, когда недостаток частиц в каждом ливне можно компенсировать большим числом ливней.

Для исследования азимутального углового распределения разобьем полный азимутальный угол 2π $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ на m равных интервалов $\Delta\varphi$. Пусть далее n_k — число вторичных частиц, азимутальный угол которых попадает в k-й из m интервалов разбиения $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} n_k = n\right)$. Как известно (§ 3), случайная величина

$$\chi_m^2 = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(n_k - \frac{n}{m}\right)^2 = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k^2 - n \tag{9.1}$$

$$(m = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

в предположении азимутальной изотропии вторичных частиц и статистической независимости их углов вылета φ_i в однородных ливнях с одинаковыми n имеет χ^2-распределение с $m-1$ степенями свободы, если n велико. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$\alpha_m^* = \chi_m^2 / (m-1) = \left(\frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k^2 - n\right)(m-1) \tag{9.2}$$

при произвольном n. Для этого азимутальный угол φ_i i-й вторичной частицы сопоставим с m случайных величин φ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_{ik} = 1, \tag{9.3}$$

если φ_i лежит в k-м из m равных интервалов $\Delta\varphi$, и

$$\varphi_{ik} = 0 \tag{9.4}$$

в противном случае. При таком определении φ_{ik} очевидно соотношение

$$n_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik}. \tag{9.5}$$

Обозначим далее через p_k вероятность попадания азимутального угла вторичной частицы в k-й интервал $\Delta\varphi$, полностью определяющую распределение величин φ_{ik}. Тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины φ_{ik} равны соответственно:

$$\nu(\varphi_{ik}) = 1 \cdot p_k + 0 \cdot (1 - p_k) = p_k,$$

$$\sigma^2(\varphi_{ik}) = \left(1 - p_k^2\right) p_k + (0 - p_k)^2 (1 - p_k) =$$

$$= p_k (1 - p_k).$$

Используя теоремы (§ 1) о математическом ожидании и дисперсии суммы случайных величин, нетрудно вычислить соответствующие характеристики случайной величины n_k (9.5):

$$\nu(n_k) = np_k,$$

$$\sigma^2(n_k) = \nu[(n_k - np_k)^2] = np_k(1 - p_k).$$

Представив, наконец, случайную величину α''_m в виде

$$\alpha''_m = mn^{-1}(m-1)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m}(n_k - np_k)^2 + \right.$$

$$\left. + 2n\sum_{k=1}^{m}(n_k - np_k)(p_k - 1/m) + n^2\sum_{k=1}^{m}(p_k - 1/m)^2\right],$$

легко находим ее математическое ожидание

$$\nu(\alpha''_m) = mn^{-1}(m-1)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m} np_k(1-p_k) + \right.$$

$$\left. + n^2\sum_{k=1}^{m}(p_k - 1/m)^2\right],$$

или, так как $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$,

$$\nu(\alpha''_m) = 1 + m(n-1)(m-1)^{-1}\sum_{k=1}^{m}(p_k - 1/m)^2. \quad (9.6)$$

Если азимутальное угловое распределение изотропно, то $p_k = 1/m$ и

$$\nu(\alpha''_m) = 1. \quad (9.7)$$

Для вычисления дисперсии случайной величины α''_m достаточно найти [имея в виду формулу (1.12)] математическое ожидание величины

$$(\chi^2_m)^2 = (m/n)^2\left[\sum_{k=1}^{m}(n_k - n/m)^4 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k,\, l=1 \\ k \neq l}}^{m}(n_k - n/m)^2(n_l - n/m)^2\right],$$

которую можно представить также в виде

$$(\chi^2_m)^2 = (m/n)^2\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_{ik}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k,\, l=1 \\ k \neq l}}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_{ik}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_{il}\right)^2\right],$$

где ψ_{ik} — новые величины ($\psi_{ik} = \varphi_{ik} - p_k$), математические ожидания которых равны нулю. Учитывая предполагаемую статистическую независимость азимутальных углов φ_i и используя теоремы о математических ожиданиях сумм и произведений случайных величин (§ 1), легко получить следующий конечный результат:

$$\sigma^2(\alpha''_m) = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{n-1}{n}. \quad (9.8)$$

Ограниченность дисперсий позволяет указать критический предел для усредненной по N ливням с любыми, не обязательно одинаковыми n, случайной величины

$$\overline{\alpha''_m} = \sum_{i=1}^{N}\alpha''_{mi}/N, \quad (9.9)$$

вероятность превышения которого при сделанных предположениях (статистическая независимость азимутальных углов φ_i и изотропия их распределения) очень мала. Действительно, согласно теореме Ляпунова [8], условие применимости которой выполняется для последовательности ливней с ограниченным числом вторичных частиц n (например, для ливней с энергией, меньшей некоторого максимального значения), величину $\overline{\alpha''_m}$ можно считать нормально распределенной при достаточно большом числе таких ливней. Следовательно, обозначая буквой P вероятность соответствующего события, на основании (9.7) и (9.8) можно утверждать, что

$$P\left(\overline{\alpha''_m} - 1 > t\sqrt{\sigma^2_m}/\sqrt{N}\right) \approx$$

$$\approx (2\pi)^{-1/2} \int_t^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx, \qquad (9.10)$$

где

$$\overline{\sigma_m^2} = \frac{2}{m-1} \frac{\overline{n}-1}{\overline{n}},$$

$\overline{n}$ — среднее число частиц в исследуемых ливнях; t — произвольный положительный параметр. Например, при $t = 2$ правая часть (9.10) меньше 2,5%.

При анализе экспериментальных данных удобно использовать нормированные случайные величины α_m:

$$\alpha_m = \frac{\alpha''_m - \nu(\alpha''_m)}{\sigma(\alpha''_m)} = (\alpha''_m - 1) / \sqrt{\frac{2(n-1)}{n(m-1)}} =$$

$$= \left[m \sum_{k=1}^{m} n_k^2 - n(n+m-1) \right] / \left[2n(n-1)(m-1)\right]^{1/2} \qquad (9.11)$$

$$(m = 2, 3, 4, \ldots).$$

Легко видеть, что математическое ожидание и дисперсия этой величины при сделанных выше предположениях равны соответственно

$$\left.\begin{array}{l} \nu(\alpha_m) = 0 \\ \sigma^2(\alpha_m) = 1 \end{array}\right\}, \qquad (9.12)$$

а для усредненной по N ливням с любыми, не обязательно одинаковыми, n случайной величины

$$\overline{\alpha_m} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{mi}/N \qquad (9.13)$$

справедливы равенства

$$\left.\begin{array}{l} \nu(\overline{\alpha_m}) = 0 \\ \sigma(\overline{\alpha_m}) = 1/\sqrt{N} \end{array}\right\}. \qquad (9.14)$$

Наконец, формула (9.10) позволяет легко указать доверительный интервал, внутри которого должно лежать значение $\overline{\alpha_m}$ с вероятностью, близкой к единице. Например, для интервала $[-2/\sqrt{N}, +2/\sqrt{N}]$ эта

вероятность при достаточно больших N больше 97,5%. Если экспериментально наблюденная величина $\overline{\alpha_m}$ будет иметь значение, выходящее за пределы указанного интервала, можно утверждать, что с большой вероятностью статистическая независимость углов φ_i и (или) азимутальная изотропия не имеют места, по крайней мере в некоторой части исследованных ливней.

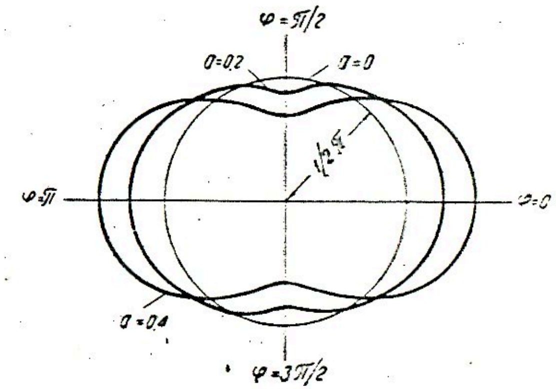

Рис. 14. Плотность распределения азимутальных углов $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(1 + a \cos 2\varphi)$ при $a = 0$ (изотропия), 0,2 и 0,4.

Представляет интерес изучение чувствительности критерия α_m (9.11) к заданному нарушению азимутальной изотропии. Пусть плотность распределения азимутальных углов φ отличается от изотропной и равна

$$\left.\begin{array}{l} p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(1 + a \cos 2\varphi) \\ 0 \leqslant a \leqslant 1 \end{array}\right\} \qquad (9.15)$$

(график этой функции при двух значениях a представлен на рис. 14). Вычислим для этого случая математическое ожидание нормированной случайной величины α_m.

Из (9.6) и (9.11) можно получить следующее равенство:

$$\left.\begin{aligned}\nu\left(\alpha_m\right) &= \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,f(m),\\ f(m) &= m(m-1)^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left(p_k - 1/m\right)^2\end{aligned}\right\}. \qquad (9.16)$$

Поскольку величина α_m зависит от выбора начальной плоскости отсчета азимутальных углов φ_i (это обстоятельство — один из существенных недостатков критерия χ^2), вместо (9.15) возьмем более общее распределение:

$$\left.\begin{aligned}p_1(\varphi) &= [1 + a\cos 2(\varphi - \beta)]/2\pi\\ 0 \leqslant a \leqslant 1, &\quad 0 \leqslant \beta < \pi\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

(рис. 15). Вероятность p_k попадания азимутального угла вторичной частицы в k-й интервал $\Delta\varphi$ в этом случае равна

$$p_k = \int\limits_{\frac{2\pi}{m}(k-1)}^{\frac{2\pi}{m}k} p_1(\varphi)\,d\varphi = 1/m + $$

$$+ \frac{a}{2\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{m}\frac{2k-1}{2} - 2\beta\right)\sin\frac{2\pi}{m},$$

откуда

$$f(m) = m\,(m-1)^{-1/2}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\sin^2\frac{2\pi}{m}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\cos^2\left(\frac{4\pi}{m}\frac{2k-1}{2} - 2\beta\right). \qquad (9.18)$$

Для группы ливней с произвольными, но одинаковыми n

$$\nu\left(\overline{\alpha_m}\right) = \overline{\nu\left(\alpha_m\right)} = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,\overline{f(m)}, \qquad (9.19)$$

поэтому для вычисления $\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)$ достаточно вычислить $\overline{f(m)}$, причем усреднение производится по различным положениям плоскости преимущественного испускания частиц (т. е. по различным и равновероятным значе-

ниям параметра β). С помощью очевидного соотношения

$$\overline{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\,dt/\pi = 1/2$$

после интеграции формулы (9.18) и использования (9.19) приходим к соотношению

$$\nu\left(\overline{\alpha_m}\right) = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{a^2}{8\sqrt{2}\,\pi^2}\,\frac{m^2}{\sqrt{m-1}}\sin^2\frac{2\pi}{m} \geqslant 0. \qquad (9.20)$$

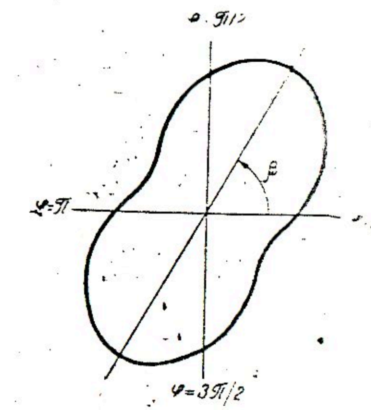

Рис. 15. Плотность распределения азимутальных углов $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}[1 + a\cos(\varphi - \beta)]$ при $a = 0{,}4$.

Функция (9.20) должна иметь по крайней мере один максимум, так как при $m = 2$ и $m \to \infty$ она обращается в нуль. Элементарное исследование показывает, что единственный максимум функция (9.20) имеет при $m = 7$. Максимальное значение $\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)$ следующее:

$$\left[\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)\right]_{\max} = \nu\left(\overline{\alpha_7}\right) \cong 0{,}11a^2\sqrt{n(n-1)}. \qquad (9.21)$$

Существует весьма простой и интересный способ повышения чувствительности критерия χ^2 к любому симметричному виду нарушения азимутальной изотропии [в частности, при анизотропии типа (9.15)]. Вместо азимутальных углов φ_i $(0 \leqslant \varphi_i < 2\pi)$ будем рассматривать азимутальные углы $\psi_i (0 \leqslant \psi_i < \pi)$, определенные таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \psi_i &= \varphi_i \quad (0 \leqslant \varphi_i < \pi) \\ \psi_i &= \varphi_i - \pi \quad (\pi \leqslant \varphi_i < 2\pi) \end{aligned}\right\}. \tag{9.22}$$

По аналогии с (9.11) введем случайную величину

$$\alpha'_m = \left(\alpha''_m - 1\right) \Big/ \sqrt{\frac{2(n-1)}{n(m-1)}}, \tag{9.23}$$

$$m = 2, 3, 4, \ldots,$$

где m — число равных интервалов разбиения полного азимутального угла π для величин ψ_i. Для величины α'_m справедливы те же основные соотношения (9.14), (9.16), что и для α_m.

При плотности распределения азимутальных углов φ, заданной в виде (9.17), величина ψ будет распределена по закону

$$p(\psi) = \frac{1}{\pi}\left[1 + a\cos 2(\psi - \beta)\right]. \tag{9.24}$$

Проделав аналогичную процедуру усреднения по различным ориентациям плоскости преимущественного испускания частиц, легко получить формулу для математического ожидания величины $\overline{\alpha'_m}$

$$\nu\left(\overline{\alpha'_m}\right) = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{a_2}{2\sqrt{2}\pi^2}\cdot\frac{m^3}{\sqrt{m-1}}\sin^2\frac{\pi}{m} \geqslant 0. \tag{9.25}$$

Эта величина имеет единственный максимум при $m = 3$:

$$\left[\nu\left(\overline{\alpha'_m}\right)\right]_{\max} = \nu\left(\overline{\alpha'_3}\right) \approx 0{,}17a^2\sqrt{n(n-1)}\,. \tag{9.26}$$

Из сравнения (9.21) и (9.26) следует, что при одном и том же отклонении от азимутальной изотропии (одном и том же $a \neq 0$) максимальное значение $\nu\left(\overline{\alpha'_m}\right)$ превосходит максимальное значение $\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)$ в 1,6 раза.

Формулы (9.20) и (9.25) показывают, что наличие корреляций в азимутальном угловом распределении вторичных частиц приводит к увеличению математических ожиданий величин α_m $\left(\alpha'_m\right)$. При симметричном, но анизотропном разлете (см. рис. 13а) частиц величина $\overline{\alpha_2}$ остается равной нулю; если $m \geqslant 3$ $(m \geqslant 2)$, происходит возрастание $\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)$ $\left(\nu\left(\overline{\alpha'_m}\right)\right)$. При корреляциях же асимметричного типа (рис. 13б) возрастает и величина $\overline{\alpha_2}$. Имея в виду также превышение $\nu\left(\overline{\alpha'_m}\right)$ над $\nu\left(\overline{\alpha_m}\right)$ при симметричном разлете, можно надеяться, что совокупное применение критериев α_m и α'_m при нескольких значениях m позволит не только установить факт нарушения азимутальной изотропии в индивидуальных ливнях, но и определить форму этого нарушения.

Напомним, что расчет математических ожиданий величин α_m, α'_m, характеризующих азимутальное угловое распределение вторичных частиц, и их дисперсий был произведен в предположении статистической независимости азимутальных углов частиц φ_i. Закон сохранения энергии-импульса подчиняет импульсы вторичных частиц и их направления некоторым связям, нарушающим эти условия. Поскольку число связей конечно (например, при постоянстве поперечного импульса вторичных частиц их число равно двум), следует ожидать уменьшения влияния закона сохранения энергии-импульса при возрастании полного числа вторичных частиц n в ливнях. Если же число частиц небольшое, учет влияния закона сохранения импульса необходим при анализе экспериментальных данных. Особо этот вопрос мы рассмотрим в § 12.

В заключение отметим, что критерий α_m (9.11) может быть использован для решения широкого круга задач. Так, описанный в § 6 критерий α_1 (6.20) есть не что иное, как величина α_m (9.2) при $m = 2$, а соотношения (6.21) — частный случай формул (9.7), (9.8). С помощью критерия α_m (9.11) можно проверить в деталях любую гипотетическую плотность распределения пространственных углов ϑ в совокупности ливней с произвольными n и произвольными первичными энергиями. Предположив, например, что распределение $p(\lambda)$ величин $\lambda = \lg \operatorname{tg} \vartheta$ в имеющейся коллекции ливней описывается выражением (5.7) (простейший вариант двухцентровой модели), следует найти для каждого ливня границы интервалов разбиения λ_k из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\lambda_k} p(\lambda)\, d\lambda = \frac{k}{m}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{9.27}$$

подсчитать далее числа $n_к$ вторичных частиц, $\lg \operatorname{tg}\theta$, которых попал в k-й из m равновероятных при сделанной гипотезе интервалов $\Delta\lambda$, и, наконец, вычислить величину α_m по формуле (9.11) в каждом ливне. При достаточно большом числе ливней N усредненная по этим ливням величина α_m будет иметь математическое ожидание и дисперсию, равные соответственно 0 и $1/N$ (9.14), если исходная гипотеза о распределении величин λ в виде $p(\lambda)$ (5.7) действительно верна. Наиболее существенное отличие рассматриваемой здесь задачи от анализа азимутального углового распределения заключается в том, что при нахождении границ интервалов разбиения $\Delta\lambda$ согласно (9.27) приходится иметь в виду наличие параметров в плотности распределения (5.7), которые необходимо оценивать в каждом ливне. Погрешность, вносимая влиянием конечного числа частиц в ливнях в оценку параметров распределения (5.7), сказывается в конечном счете на границах $\lambda_к$ в каждом ливне и должна быть учтена с помощью статистического моделирования (метода Монте-Карло).

§ 10. ПАРНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Изложенная в предыдущем параграфе методика исследования азимутального углового распределения с помощью критерия χ^2 является вполне строгой. Однако, как уже отмечалось, существенные недостатки критерия Пирсона — зависимость величины $\chi^2{}_m$ от выбора начальной плоскости отсчета азимутальных углов φ_i и

известная неопределенность, связанная с разбиением на m интервалов (группированием). Надо полагать, что если удастся составить случайную величину, характеризующую азимутальное угловое распределение и не страдающую указанными недостатками, ее чувствительность возрастет по сравнению с критерием χ^2, применение которого связано, из-за этих недостатков, с некоторой потерей информации об азимутальных углах вторичных частиц.

Такие не зависящие от начала отсчета азимутальных углов случайные величины могут быть составлены из парных азимутальных углов между вторичными частицами ливней. Методика исследования азимутального углового распределения, основанная на парных углах, впервые была применена А. П. Мишаковой и Б. А. Никольским [21, 22].

Парные азимутальные углы ε_{ij} между i-й и j-й частицами ливня определяются как разность между их азимутальными углами φ

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_i - \varphi_j \tag{10.1}$$

($i = 1,2,\ldots, n$; $j = 1,2,\ldots, n$; $i \neq j$; $0 \leqslant \varphi_i < 2\pi$; $0 \leqslant \varepsilon_{ij} \leqslant \pi$) в плоскости, перпендикулярной направлению первичной частицы. Количество таких парных углов в ливне, полное число вторичных частиц в котором есть n, очевидно, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Применяя обычные приемы нахождения композиции распределений, легко показать, что если плотность распределения азимутальных углов φ_i равна $p(\varphi)$, то плотность распределения парных углов ε_{ij} определяется [21] соотношением

$$f(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} p(\varphi)\left[p(\varphi + \varepsilon) + p(\varphi - \varepsilon)\right] d\varphi. \tag{10.2}$$

Из соотношения (10.2) следует, в частности, что для равномерного в интервале $[0, 2\pi]$ распределения углов φ_i (азимутальная изотропия) распределение $f(\varepsilon)$ также будет равномерным в интервале $[0, \pi]$. Если $p(\varphi)$ представить в виде ряда

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi\right), \qquad (10.3)$$

то соотношение (10.2) даст

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2} \cos k\varepsilon\right). \qquad (10.4)$$

Для симметричного распределения азимутальных углов φ

$$p(\varphi \pm \pi) = p(\varphi) \qquad (10.5)$$

в формулах (10.3), (10.4) будут присутствовать лишь члены с четными значениями k. Ограничившись в первом приближении первым членом ряда (10.3) при $k=2$, получим

$$p_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(1 + a\cos 2\varphi) \qquad (10.6)$$

(это выражение мы уже использовали в предыдущем параграфе). Соответствующее (10.6) распределение $f(\varepsilon)$ имеет вид

$$f_1(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{a^2}{\pi}\cos 2\varepsilon\right). \qquad (10.7)$$

Распределения парных азимутальных углов ε_{ij} между парами вторичных частиц не зависят от физически выделенного начала отсчета азимутальных углов φ_i и, следовательно, могут быть просуммированы для многих актов ядерных взаимодействий. Авторы работ [21,22] пошли именно по такому пути. Они исследовали распределения $f(\varepsilon)$ парных азимутальных углов в суммарных ливнях, составленных из большого числа индивидуальных случаев. Очевидно, что полное число N парных углов ε_{ij} при анализе суммарного ливня, составленного из m взаимодействий, равно

$$N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[n_i(n_i - 1)\right], \qquad (10.8)$$

где n_i — число вторичных частиц в i-м акте взаимодействия.

Для определения величины a, характеризующей степень азимутальной анизотропии в выражении (10,6),

авторы работы [21] ввели экспериментально определяемую по суммарному распределению величину

$$R = \frac{N_1 - N_2}{N}, \qquad (10.9)$$

где N_1 и N_2 — числа пар частиц с углами соответственно $\varepsilon = (0\div 45°;\ 135\div 180°)$ и $\varepsilon = (45\div\div 135°)$;

$N = N_1 + N_2$ — полное число пар частиц в суммарном ливне, равное (10.8).

Очевидно, что для изотропного азимутального углового распределения величина R должна быть равной нулю, тогда как в случае тенденции вторичных частиц к компланарности в индивидуальных ливнях в распределении $f(\varepsilon)$ будет наблюдаться избыток углов ε, близких к 0 и π, что в свою очередь приведет к положительным значениям величины R.

Для экспериментального доказательства симметрии распределения $f(\varepsilon)$ относительно угла $\varepsilon = \pi/2$, т. е. симметричного вида анизотропии азимутальных углов φ, А. П. Мишакова и Б. А. Никольский [21] ввели величину

$$\Delta = \frac{N_3 - N_4}{N}, \qquad (10.10)$$

где N_3 и N_4 — числа пар частиц с углами $\varepsilon = (0\div 90°)$ и $\varepsilon = (90\div 180°)$ соответственно $(N_3 + N_4 = N)$.

Эта величина также легко определяется эмпирически по распределению $f(\varepsilon)$ в суммарном ливне.

Из соотношения (10.7) следует, что $R^2 = \frac{a^2}{\pi}$, т. е.

$$a = \sqrt{\pi R}. \qquad (10.11)$$

Погрешность в экспериментальном установлении величины a, характеризующей степень анизотропии азимутального углового распределения, определяется экспериментальной погрешностью величины R:

$$\sigma(a) = \frac{\pi}{2a}\sigma(R). \qquad (10.12)$$

Чтобы определить статистическую ошибку $\sigma(R)$ величины R, авторы [21] произвели модельный расчет методом Монте-Карло величин R для искусственных ливней», разыгранных в соответствии с распределением (10.6). Расчет показал, что ошибка $\sigma(R)$ зависит от степени анизотропии a, числа вторичных частиц в одном взаимодействии n и числа взаимодействий m:

$$\sigma(R) = \frac{f(a, n)}{\sqrt{m}}.$$

Из анализа многочисленных вариантов расчета при различных значениях a, n и m, проведен-

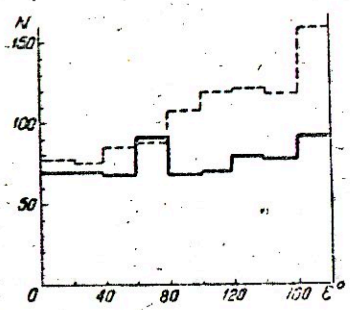

Рис. 16. Эмпирическое распределение $f(\varepsilon)$ парных азимутальных углов для вторичных частиц из pp-столкновений при $E_0 = 9$ *Гэв*:
пунктир — звезды с $n = 2,4$;
сплошная линия — звезды с $n = 6,8$.

ного авторами [21], следует, что статистическая ошибка $\sigma(R)$ величины R может быть удовлетворительно аппроксимирована зависимостью типа

$$\sigma(R) \simeq \frac{\alpha}{\sqrt{N}}, \tag{10.13}$$

где N (10.8) — суммарное число пар в рассмотренной группе взаимодействий;
α — коэффициент, отражающий зависимость $\sigma(R)$ от a.

Например, при значениях a, равных 0; 0,2; 0,4; 0,9, коэффициент $\alpha = \sigma(R)\sqrt{N}$ принимает соответственно значения: 1; 1,5; 2; 3.

Ошибка величины Δ (10.10) также определялась методом Монте-Карло, причем для распределения (10.6) она оказалась не зависящей от a.

На рис. 16 в качестве примера представлено распределение $f(\varepsilon)$ парных азимутальных углов для вторичных частиц из протон-протонных соударений при энергии 9 *Гэв* и «малых» ($n=2,4$) и «больших» ($n=6,8$) множественностях [21]. Из этого рисунка хорошо видно,

что при $n=6,8$ распределение $f(\varepsilon)$ изотропно ($\bar{R}=0,02\pm\pm0,06$). При малом же числе вторичных частиц ($n=2,4$) наблюдается существенно анизотропное (асимметричное) распределение величин ε_{ij}, причем имеется заметная тенденция к увеличению углов ε, близких к π. Авторы работы [21] не без основания предполагают, что наблюденное распределение углов (ε) при $n=2,4$ объясняется действием закона сохранения импульса, нарушающего статистическую независимость углов φ_i и приводящего к угловым корреляциям типа наблюдаемого (например, при упругом pp-рассеянии, когда образуется всего две вторичные частицы, азимутальный угол между ними всегда равен π). Однако это заключение не было подтверждено количественно.

§ 11. КРИТЕРИИ β_k [1]

Выше мы отмечали недостатки методики анализа азимутального углового распределения, основанной на критерии χ^2, и рациональность использования случайных величин — функций от парных азимутальных углов ε_{ij}. Методика [21], изложенная в § 10, также не свободна, на наш взгляд, от некоторых недостатков. Дело в том, что составление суммарного ливня не позволяет различать индивидуальные особенности в азимутальных угловых распределениях отдельных ливней, проводить детальное исследование зависимости наблюденных азимутальных эффектов от других характеристик индивидуальных актов взаимодействий и т. д.: это возможно делать лишь в среднем для больших групп ливней. Нам кажется, что наиболее целесообразно характеризовать случайной величиной — функцией парных азимутальных углов — угловое распределение в каждом ливне. Ниже мы остановимся на одной из методик [1] анализа азимутального углового распределения, превосходящей по своей эффективности описанные ранее.

Как и в предыдущем параграфе, наряду с азимутальными углами φ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $0 \leqslant \varphi_i < 2\pi$) вторичных частиц, отсчитываемых от некоторой оси в плоскости, перпендикулярной направлению первичной частицы, будем рассматривать парные азимутальные углы ε_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$; $0 \leqslant \varepsilon_{ij} \leqslant \pi$) в этой плоскости. Ясно, что любая функция от относительных углов ε_{ij} не будет зависеть от начала отсчета углов φ_i. Составим случайные величины

$$\beta_k = \sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \cos\,(k\varepsilon_{ij})/\sqrt{n(n-1)} \qquad (11.1)$$

$$(k=1,2)$$

(множитель $1/\sqrt{n(n-1)}$ введен для нормировки). Для практического вычисления величин β_k в ливнях нет необходимости вычислять углы ε_{ij}, поскольку величины β_k могут быть легко представлены в функции обычных азимутальных углов φ_i:

$$\beta_k = \sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \cos k(\varphi_i-\varphi_j)/\sqrt{n(n-1)} =$$

$$=\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\cos(k\varphi_i)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n}\sin(k\varphi_i)\right]^2-n\right\}\Big/\sqrt{n(n-1)}. \qquad (11.2)$$

Из структуры величин β_k, кроме их независимости от выбора начальной оси для отсчета углов φ_i, легко усмотреть следующие их свойства: 1) корреляции симметричного типа (см. рис. 13 *а*) приводят к возрастанию величины β_2, но не оказывают существенного влияния на величину β_1; 2) корреляции асимметричного типа (см. рис. 13*б*) приводят к возрастанию как β_1 (преимущественно), так и β_2 (относительно слабо); 3) величины β_k ограничены и могут принимать значения, лежащие в интервале

$$-\sqrt{n(n-1)}\leqslant\beta_k\leqslant\sqrt{n(n-1)}. \qquad (11.3)$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию величин β_k. Для этого представим эти величины в виде

$$\beta_k = \left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\cos k\varphi_i\cos k\varphi_j + \sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\sin k\varphi_i\sin k\varphi_j\right)\Big/\sqrt{n(n-1)}.$$

Предполагая статистическую независимость углов φ_i и используя известные теоремы (§ 1) о свойствах математического ожидания сумм и произведений случайных величин, легко найти математическое ожидание $\nu(\beta_k)$ величин β_k при произвольном распределении углов φ_i:

$$\nu(\beta_k)=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\left[\nu\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\cos k\varphi_i\cos k\varphi_j\right)+\nu\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\sin k\varphi_i\sin k\varphi_j\right)\right]= \qquad (11.4)$$

$$=\sqrt{n(n-1)}\left[\nu^2(\cos k\varphi)+\nu^2(\sin k\varphi)\right]\geqslant 0.$$

Если азимутальное угловое распределение изотропно, т. е. углы φ_i равномерно распределены в интервале $(0,2\pi)$, нетрудно доказать следующие очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned}\nu(\cos k\varphi)&=\nu(\sin k\varphi)=0\\ \nu(\cos^2 k\varphi)&=\nu(\sin^2 k\varphi)=1/2\end{aligned}\right\} \qquad (11.5)$$

Из (11.4) и (11.5) следует, что при изотропии и статистической независимости n углов φ_i

$$\nu(\beta_k)=0. \qquad (11.6)$$

При этих предположениях нетрудно также подсчитать и дисперсию β_k. Из соотношения

$$\sigma^2(\beta_k)=\nu(\beta_k^2)=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\nu\left[\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\cos k\varphi_i\cos k\varphi_j+\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\sin k\varphi_i\sin k\varphi_j\right)^2\right]$$

Из формул (3.5) после несложных вычислений приходим к равенству

$$\sigma^2(\beta_k)=1. \qquad (11.7)$$

Для усредненных по m ливням с любыми, не обязательно одинаковыми n, случайных величин

$$\overline{\beta}_k = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}/m \tag{11.8}$$

справедливы следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \nu\left(\overline{\beta}_k\right) &= 0 \\ \sigma\left(\overline{\beta}_k\right) &= \frac{1}{\sqrt{m}} \end{aligned}\right\}. \tag{11.9}$$

Наконец, легко показать, что величины β_1 и β_2 не коррелированы, а при большом n независимы и могут быть представлены в виде

$$\beta_k \approx \frac{1}{2}\chi_2^2 - 1, \tag{11.10}$$

где величина χ_2^2 имеет χ^2-распределение с двумя степенями свободы. Из (11.3) и (11.10) следует, что условие применимости теоремы Ляпунова [8] выполняется для любой последовательности ливней. Согласно этой теореме величины $\overline{\beta}_k$ при достаточно большом числе ливней m можно считать нормально распределенными. Поэтому легко указать доверительный интервал (его границами можно считать, как и ранее, $-\frac{2}{\sqrt{m}}$ и $+\frac{2}{\sqrt{m}}$), внутри которого должно лежать значение $\overline{\beta}_k$ с вероятностью, близкой к единице. Если хотя бы одно из полученных значений $\overline{\beta}_k$ не будет лежать в этом интервале, можно утверждать, что азимутальная изотропия и статистическая независимость углов φ_i не имеют места, по крайней мере в некоторой части исследуемых ливней.

Рассмотрим поведение случайных величин β_k в случае азимутальной анизотропии различных типов. При статистической независимости углов φ_i и их произвольном распределении математическое ожидание величин β_k определяется формулой (11.4). Для любого симметричного распределения азимутальных углов

$\nu(\beta_1) = 0$. Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины β_2 в предположении корреляций типа

$$\left.\begin{aligned} p(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}(1 + a\cos 2\varphi) \\ 0 &\leqslant a \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

в азимутальном угловом распределении. Так как в случае (11.11)

$$\left.\begin{aligned} \nu(\cos 2\varphi) &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, p(\varphi)\, d\varphi = \frac{a}{2} \\ \nu(\sin 2\varphi) &= \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, p(\varphi)\, d\varphi = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{11.12}$$

из (11.4) немедленно следует:

$$\nu(\beta_2) = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{a^2}{4}. \tag{11.13}$$

При вычислении дисперсии $\sigma^2(\beta_2)$ величины β_2 для случая (11.11) воспользуемся формулой

$$\sigma^2(\beta_2) = \nu\left(\beta_2^2\right) - \nu^2(\beta_2), \tag{11.14}$$

согласно которой необходимо подсчитать математическое ожидание $\nu\left(\beta_2^2\right)$ величины β_2^2:

$$\nu\left(\beta_2^2\right) = \frac{1}{n(n-1)}\,\nu\left[\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \cos 2\varphi_i \cos 2\varphi_j + \sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \sin 2\varphi_i \sin 2\varphi_j\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[\nu\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \cos 2\varphi_i \cos 2\varphi_j\right)^2 + \nu\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n} \sin 2\varphi_i \sin 2\varphi_j\right)^2\right]. \tag{11.15}$$

эти вероятности приведены для значений $a = 0{,}2$ и 0,4 и разных значений m и n.

Случайные величины β_k могут быть использованы не только для обнаружения азимутальных корреляций типа *а* или *б* (см. рис. 13) но и, например, для обнаружения парных корреляций, которые могут возникать вследствие распада короткоживущих частиц на две заряженные

Таблица 3

n	m			
	25	50	100	500
5	— 0,16	— 0,25	— 0,42	0,17 0,97
10	— 0,47	— 0,71	0,16 0,92	0,55 1,00
15	— 0,74	0,19 0,93	0,31 1,00	0,87 1,00
20	0,19 0,89	0,30 0,99	0,48 1,00	0,98 1,00

Примечание. Приведены лишь вероятности больше 0,15. В каждой ячейке таблицы верхнее значение соответствует выбранному в формуле (11.11) параметру $a = 0{,}2$, нижнее — $a = 0{,}4$.

частицы. Предположим, что углы φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ изотропно распределены: $n - l$ первых величин φ_i независимы, а остальные углы выражаются через предшествующие по формулам

$$\varphi_{n-l+i} = \varphi_i, \qquad (11.20)$$

$$i = 1, 2, \ldots, l, \qquad l \leqslant n/2.$$

В этом случае, как легко показать, математическое ожидание величин β_k равно

$$\nu(\beta_k) = \frac{2l}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (11.21)$$

Разберем несколько примеров использования случайных величин β_k для анализа азимутального углового распределения. В работе [1] нами были проанализированы распределения азимутальных углов φ_i в 85

ливнях, образованных однозарядными частицами космических лучей и удовлетворяющих следующим критериям отбора: 1) число сильноионизующих частиц $\leqslant 5$ (квазинуклонные взаимодействия); 2) число заряженных релятивистских частиц $n \geqslant 8$. Энергия первичных частиц в этих ливнях изменялась в широких пределах (от нескольких десятков до 10^3 *Гэв*). Для

Таблица 4

Характеристика ливней	Величина	$\bar{\beta}$	$\lvert\bar{\beta}\rvert\sqrt{m}$
$n_s \leqslant 5$ $8 \leqslant n \leqslant 22$ $m = 85$	β_1 β_2	$-0{,}24$ $-0{,}04$	2,2 0,4

Примечание. $\lvert\bar{\beta}_k\rvert\sqrt{m}$ — отличие величины (11.8) от ее математического ожидания в единицах стандартного отклонения (11.9).

каждого ливня были подсчитаны значения β_k по формулам (11.2). Результаты обработки представлены в табл. 4.

Низкое значение $\bar{\beta}_1$ позволяет сделать вывод, что азимутальная изотропия и статистическая независимость углов φ_i не имеют места для рассмотренных 85 ливней. Значения $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$ хорошо согласуются с предположением, что основной причиной, нарушающей эти условия, является закон сохранения импульса, в соответствии с которым, как будет показано ниже (в § 12), уменьшается математическое ожидание величины β_1, но который не влияет на распределение величины β_2 при $n \geqslant 8$. На рис. 18 показано распределение упомянутых 85 ливней по значениям β_1 и β_2, подтверждающее это предположение. Если бы существовала четко выраженная тенденция вторичных частиц к компланарности, значение $\bar{\beta}_2$ было бы положительным. Заметим, что наблюденное значение $\bar{\beta}_2 = -0{,}04$ для 85 ливней будет совместимо с предположениями, использованными при выводе формул (11.13) и (11.17), если $a < 0{,}16$, так как при любом $a > 0{,}16$ разность

$$\nu(\bar{\beta}_2) - \sigma(\bar{\beta}_2)$$

превышает $-0{,}04$.

Нами исследовались также [1] 117 ливней, образованных однозарядными частицами космического излучения при их взаимодействии с тяжелыми ядрами фотоэмульсии (критерии отбора: 1) число сильноионизующих частиц в ливне $n_h \geqslant 8$, 2) число заряженных ливневых частиц $n \geqslant 10$). Результаты обработки этих ливней приведены в табл. 5. Для выяснения зависимости азимутального углового

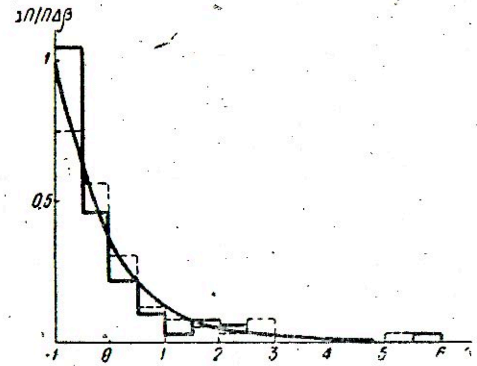

Рис. 18. Распределение 85 ливней [1] по значениям β_1 (сплошная линия) и β_2 (пунктир). Кривая представляет собой плотность распределения величины (11.10).

распределения вторичных ливневых частиц от степени развития внутриядерного каскада (числа сильноионизующих частиц) и первичной энергии ливни были разделены на две группы (группы 1 и 2 табл. 5) по числу сильноионизующих частиц n_h; из ливней с большими n_h, кроме того, были выделены ливни с большими значениями лоренц-фактора γ_c системы центра масс (группа 3 табл. 5). Значения $\overline{\beta_1}$, указанные для групп 2 и 3 табл. 5, свидетельствуют о наличии четких корреляций в азимутальном угловом распределении ливневых частиц, не объяснимых (см. § 12) влиянием закона сохранения импульса. Значения $\overline{\beta_1}$ и $\overline{\beta_2}$, приведенные для этих групп, согласуются с предположением о несимметричной плотности распределения (11.18) и статистической независимости углов вылета φ_i вторичных частиц, при котором для математического

ожидания и дисперсии величины β_1 справедливы формулы (11.19), а $\nu(\beta_2) = 0$. Используя эти формулы и предполагая для простоты, что значения параметра a для всех ливней одинаковы, легко оценить a по экспериментальным значениям $\overline{\beta_1}$ (табл. 5).

Следует заметить, что большие значения $\overline{\beta_1}$ могут быть связаны с неправильным отождествлением следа

Таблица 5

№ группы	Характеристика ливней	$\overline{\beta_1}$	$\overline{\beta_2}$	a	$\overline{\beta_1'}$	$\overline{\dot\beta_1}$
1	$8 \leqslant n_h \leqslant 15$ $10 \leqslant n \leqslant 35$ $\overline{n} = 14$ $m = 67$	−0,23 (1,9)	0,02 —	— —	−0,03 —	0,11 —
2	$16 \leqslant n_h \geqslant 35$ $11 \leqslant n \leqslant 41$ $\overline{n} = 20$ $m = 50$	0,59 (4,2)	−0,04 —	$0{,}35 \pm 0{,}06$ —	0,02 —	0,54 (3,9)
3	$n_h > 15$ $\gamma_c > (\gamma_c)_m$ $\overline{n} = 21$ $m = 25$	0,66 (3,3)	0,09 —	$0{,}36^{+0{,}08}_{-0{,}09}$	0,10 —	0,60 (3,0)

Примечание. $(\gamma_c)_m$ — медианное значение γ_c для 50 ливней с $n_h > 15$. В скобках указаны значения $|\overline{\beta}_1|\sqrt{m} > 1$.

первичной частицы. При увеличении лоренц-фактора γ_c вероятность принять след вторичной частицы за след первичной уменьшается вследствие уменьшения числа вторичных частиц с $\vartheta > \pi/2$ и эффект ложной азимутальной асимметрии должен ослабевать. Однако значения $\overline{\beta_1}$ и a не уменьшаются с ростом первичной энергии (ср. группы 2, 3 табл. 5). Для подтверждения того, что эффект не является ложным, и для исследования возможной зависимости азимутального эффекта от пространственного угла ϑ вторичных частиц мы определили

*10

в каждом из 117 ливней половинный угол $\vartheta_{1/2}$ и подсчитали значения β_1 отдельно для ливневых частиц, имеющих углы вылета $\vartheta < \vartheta_{1/2}\left(\beta_1'\right)$, и для частиц, имеющих углы $\vartheta > \vartheta_{1/2}\left(\beta_1''\right)$. Как видно из табл. 5, эффект азимутальной асимметрии связан с ливневыми частицами широкого конуса, что трудно понять, исходя из предположения о неправильном определении следа первичной частицы. Естественное объяснение

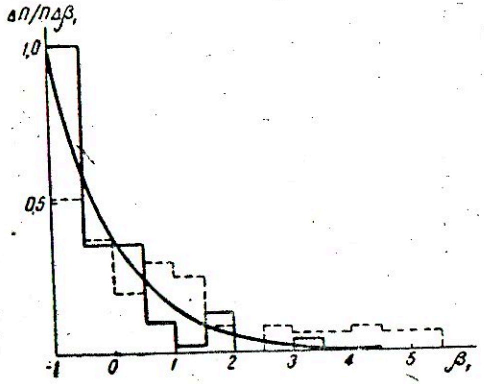

Рис. 19. Распределение 117 взаимодействий [1] с тяжелыми ядрами по значениям β_1. Сплошная гистограмма относится к 67 ливням с $n_h = 8 \div 15$, пунктирная — к 50 ливням с $n_h > 15$. Кривая представляет собой плотность распределения величины (11.10).

наблюденного азимутального эффекта — предположение о несимметричном в азимутальной плоскости развитии внутриядерного каскада при нецентральных * столкновениях быстрых частиц с тяжелыми ядрами. На рис. 19 отражено распределение 117 ливней по величине β_1, подтверждающее систематическое отклонение распределения β_1 при больших n_h от соответствующего азимутальной изотропии и статистической независимости углов φ_i.

* Под нецентральными столкновениями в данном случае подразумеваются столкновения, при которых центр ядра не лежит на продолжении траектории первичной частицы.

Авторы работы [7] с помощью критериев β_k исследовали распределение «серых» следов в некоторой части соударений с тяжелыми ядрами, проанализированных в работе [1]. Для измерений азимутальных углов «серых» треков отбирались звезды с $n > 15$ и $n > 10$ (группа 2 табл. 5), отстоящие от краев эмульсионной стопки больше чем на 2,8 *мм* (последняя цифра — минимальный пробег для частицы, оставляющей в эмульсии «серый» трек). В 33 ливнях, удовлетворяющих упомянутым требованиям, наряду с азимутальной асимметрией частиц была обнаружена и статистически обеспеченная асимметрия азимутального углового распределения «серых» следов.

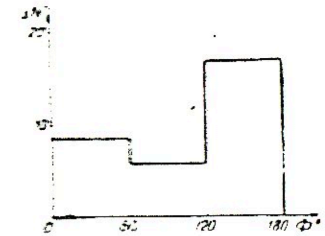

Рис. 20. Распределение углов Ф для 33 ливней [7].

При наличии азимутальной асимметрии «серых» следов и ливневых частиц возникает вопрос о взаимной ориентации направлений преимущественного испускания этих двух групп вторичных частиц. Направление преимущественного испускания серых следов (или ливневых частиц) в отдельном ливне задается суммой единичных векторов, совпадающих с проекциями следов на плоскость, перпендикулярную направлению первичной частицы. Угол Ф между направлениями преимущественного испускания двух групп частиц легко определить по формуле

$$\cos\Phi = \frac{a_s a_g + b_s b_g}{\left[\left(a_s^2 + b_s^2\right)\left(a_g^2 + b_g^2\right)\right]^{1/2}}, \qquad (11.22)$$

где

$$a_s = \sum_{i=1}^{n_s} \cos\varphi_i, \qquad b_s = \sum_{i=1}^{n_s} \sin\varphi_i,$$

$$a_g = \sum_{j=1}^{n_g} \cos\varphi_j, \qquad b_g = \sum_{j=1}^{n_g} \sin\varphi_j$$

(индексы s и g относятся соответственно к ливневым и «серым» частицам). Распределение углов Φ для 33 ливней (рис. 20) не согласуется с изотропным распределением (полученное значение $\chi^2=6{,}7$ превышает верхний 5%-ный предел, равный $\chi^2=6{,}0$ при двух степенях свободы). Избыток углов Φ в области около 180° указывает на то, что по крайней мере в части исследованных ливней проявляется тенденция к испусканию ливневых частиц и протонов отдачи («серых» следов) в противоположных в азимутальной плоскости направлениях. Наблюденный эффект можно качественно объяснить на основе представлений о внутриядерном каскаде.

§ 12. ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Расчет математических ожиданий и дисперсий случайных величин, использованных в предыдущих параграфах для анализа азимутального углового распределения вторичных частиц из ядерных взаимодействий при высоких энергиях, производился в предположении статистической независимости азимутальных углов частиц φ_i. Уже отмечалось, что закон сохранения энергии-импульса подчиняет импульсы вторичных частиц и их направления некоторым связям, которые нарушают предполагаемую независимость φ_i. Если поперечные импульсы вторичных частиц различаются слабо, а число частиц (включая нейтральные) велико, влияние закона сохранения импульса на азимутальное угловое распределение, по-видимому, незначительно. При малых же множественностях, а также в случае существования энергетически выделенных вторичных частиц с большими поперечными импульсами нарушение статистической независимости углов φ^i может стать очень существенным фактором.

Качественно влияние закона сохранения импульса на использованные в предыдущих разделах случайные величины, характеризующие азимутальное угловое распределение, можно оценить следующим образом. Если поперечные импульсы вторичных частиц одного порядка, то действие закона сохранения импульса проявляется в запрещении возможных при статистической независимости азимутальных углов случаев, когда большинство вторичных частиц имеет приблизительно одинаковые углы φ, т. е. в симметризации азимутального углового распределения. Эта симметризация должна приводить к уменьшению математических ожиданий величин α_m, α'_m, β_k (§ 9, 11), т. е. действовать в сторону, противоположную действию азимутальных корреляций (это рассуждение, однако, может быть неверным при экстремально малых множественностях; например, при рассмотрении упругого рассеяния ($n=2$) закон сохранения импульса приводит к компланарности вторичных частиц).

Важно выяснить, как действует закон сохранения импульса на распределение случайных величин, характеризующих азимутальное угловое распределение, количественно при различных множественностях в предположении, что другие причины нарушения азимутальной изотропии и статистической независимости углов φ_i отсутствуют.

С этой целью мы произвели обработку таблицы «случайных» звезд [17], имитирующих протон-протонные соударения при энергии 10 *Гэв* согласно статистической теории множественного образования частиц. Были вычислены значения β_k (11.5) для каждой из 124 звезд с числом вторичных заряженных частиц $n=4$ (полное число вторичных частиц в этих звездах, включая нейтральные, было в среднем в $\sim 1{,}5$ раза больше). Получены следующие значения для математического ожидания и дисперсии величин β_k:

$$\left.\begin{aligned} \nu(\beta_1) &= -0{,}48 \pm 0{,}06 \\ \nu(\beta_2) &= -0{,}06 \pm 0{,}08 \\ \sigma^2(\beta_1) &= 0{,}45 \pm 0{,}08 \\ \sigma^2(\beta_2) &= 0{,}92 \pm 0{,}14 \end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Отсюда видно, что под влиянием закона сохранения импульса сильно уменьшаются математическое ожидание и стандартное отклонение величины β_1 по сравнению с их значениями в (11.6) и (11.7). Это уменьшение будет предельно сильным при отсутствии нейтральных частиц и одинаковых поперечных импульсах n вторичных заряженных частиц, когда закон сохранения поперечного импульса записывается в виде

$$\beta_1 = -\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \qquad (12.2)$$

Здесь справа стоит наименьшее из возможных значений β_1. В предыдущем параграфе было показано, что величины β_1 и β_2 являются некоррелированными, а при больших n и независимыми, если имеют место изотропия азимутального углового распределния и статистическая независимость углов φ_i. Из ряда испытаний, соответствующих выполнению этих условий, требованиям закона сохранения импульса будут отвечать случаи, удовлетворяющие соотношению (12.2). Но поскольку β_1 и β_2 независимы, распределение величины β_2 в отобранных испытаниях останется прежним. Эти рассуждения, естественно, ведут к предположению о том, что при не очень малых n закон сохранения импульса не влияет на распределение β_2, даже если при этом его влияние на величину β_1 будет предельно сильным. Цифры в (12.1) подтверждают это заключение.

Нами были вычислены также математические ожидания и дисперсии случайных величин α_m (9.11) и α'_m (9.23) при различных $m \leqslant 10$ в рассмотренных 124 „случайных" звездах. Результаты расчета свидетельствуют о том, что обе эти характеристики существенно уменьшаются (аналогично величине β_1) по сравнению с их значениями в (9.12), причем степень отклонения математических ожиданий и дисперсий этих величин от значений в (9.12), уменьшается, по-видимому, с ростом m.

Для более детального изучения влияния закона сохранения импульса на азимутальное угловое распределение, а также рассмотрения различных способов учета этого влияния мы провели [6] дополнительные расчеты по методу Монте-Карло, ограничившись учетом закона сохранения поперечного импульса, так как объектом исследования являются лишь азимутальные углы вторичных частиц.

Действие закона сохранения импульса на азимутальное угловое распределение вторичных частиц может быть имитировано различными способами при

розыгрыше случайных звезд. Рассмотрим, в частности, следующие две схемы:

1) n заряженных и n_0 нейтральных частиц испускаются независимо, причем азимутальное угловое распределение изотропно, поперечный импульс $p_\perp$ вторичных частиц не зависит от азимутального угла φ, а распределение поперечных импульсов одинаково для всех частиц*. В каждой „случайной" звезде, удовлетворяющей перечисленным требованиям, вычисляется суммарный поперечный импульс $P_\perp$:

$$P_\perp = \left[\left(\sum_{l=1}^{n+n_0} p_{\perp l} \cos \varphi_l\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n+n_0} p_{\perp l} \sin \varphi_l\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (12.3)$$

Звезды, для которых значения суммарного поперечного импульса $P_\perp$ не превышают некоторого максимального значения $(P_\perp)_{max}$, используются для определения моментов (математического ожидания и дисперсии) величин β_k. Каждый момент является функцией $(P_\perp)_{max}$, значение которой при $(P_\perp)_{max} = 0$ отвечает случаю, когда закон сохранения импульса учитывается полностью. Это значение может быть без труда найдено путем экстраполяции;

2) $n+n_0-1$ частиц испускаются независимо, а поперечный импульс и азимутальный угол последней частицы определяются из условия обращения в нуль суммарного поперечного импульса $P_\perp$, причем последняя компенсирующая частица является заряженной с вероятностью $n/(n+n_0)$.

Для качественной оценки влияния закона сохранения импульса при варианте 1 предположим, что число заряженных частиц велико, число нейтральных частиц n_0 равно нулю, а поперечный импульс может принимать лишь одно постоянное значение. В этом случае, как показано выше, реализуется соотношение (12.2) и ма-

* В ряде работ ([25] и др.) показано, что средние поперечные импульсы различных сортов вторичных частиц (например, пионов и нуклонов) различны. Однако это различие довольно слабо отражается на распределениях поперечных импульсов, и мы не будем его учитывать.

Таблица 6

№ пп	Тип звезд	n	n_0	m	$\nu(\beta_1)$	$\nu(\beta_2)$	$\sigma^2(\beta_1)$	$\sigma^2(\beta_2)$
1	Случайные звезды (вариант 2)	4	2	250	−0,50±0,04	0,12±0,07	0,41±0,08	1,12±0,11
2		9	2	125	−0,38±0,07	−0,01±0,09	0,55±0,13	0,97±0,15
3	pN-взаимодействие при энергии 24 *Гэв*	4		171	−0,44±0,08	−0,02±0,08	0,57±0,09	1,11±0,14
4		4—6		430	−0,44	0,01	—	—
5		7—10		158	−0,38	0,01	—	—

Примечание. В строках 4 и 5 приведены средние значения величин β_k.

тематическое ожидание и дисперсия величины β_1 оказываются соответственно равными:

$$\left.\begin{aligned}\nu(\beta_1) &\approx -1\\ \sigma^2(\beta_1) &= 0\end{aligned}\right\}. \qquad (12.4)$$

С другой стороны, при большом n, азимутальной изотропии и независимости углов φ_i величины β_1 и β_2 независимы и в результате отбора звезд, удовлетворяющих условию (12.2), распределение β_2 не изменится. Мы разыграли несколько сотен случайных звезд при различных значениях n и n_0, не равных 0, а также в предположении максвелловского распределения поперечных импульсов, и подтвердили сделанные выше качественные выводы.

Для оценки влияния закона сохранения импульса при варианте 2 предположим, что две компоненты поперечного импульса p_x и p_y независимы и имеют одинаковые нормальные распределения с дисперсией σ^2. Это предположение ведет к азимутальной изотропии и независимости поперечного импульса от угла φ, причем плотность распределения поперечных импульсов равна

$$N(p_\perp) = \frac{p_\perp}{\sigma^2} \times \exp\left(-\frac{p_\perp^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (12.5)$$

и находится в приближенном согласии с экспериментальными данными (см., например, [25]). Розыгрыш случайных звезд варианта 2 легко выполняется при различных значениях множественности. В табл. 6 сведены результаты обработки этих звезд для двух случаев: $n=4$, $n_0=2$ и $n=9$, $n_0=2$, близких к соответствующим значениям для двух групп протон-нуклонных взаимодействий при $E=24$ *Гэв*, проанализированных нами ранее [6]. Результаты обработки (табл. 6) подтверждают отмеченные выше особенности варианта 1. Как и следовало ожидать, с увеличением числа вторичных заряженных частиц n действие закона сохранения импульса на моменты величины β_1 ослабевает. Обращает на себя внимание хорошее согласие между распределениями величин β_k для случайных звезд, разыгранных по варианту 2, и pN-взаимодействий при $E=24$ *Гэв*. Если предположить, что единственной причиной, вследствие которой нарушаются азимутальная изотропия и статистическая независимость углов φ_i в упомянутых pN-взаимодействиях, является закон сохранения импульса, то следует заключить, что простой вариант 2 розыгрыша случайных звезд удовлетворительно отражает влияние закона сохранения импульса на азимутальное угловое распределение вторичных частиц.

Проведенные расчеты (см. выше) свидетельствуют, что закон сохранения импульса уменьшает математическое ожидание и дисперсию рассмотренных в предыдущих разделах случайных величин, характеризующих азимутальное угловое распределение, за исключением величины β_2, на распределение которой он действует сравнительно слабо.

§ 13. АЗИМУТАЛЬНОЕ УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УГЛАХ

С помощью рассмотренных выше критериев можно исследовать азимутальное угловое распределение в целом независимо от угла ϑ с направлением первичной частицы. Можно представить себе, однако, что имеется такая азимутальная асимметрия частиц, летящих под разными углами ϑ, что суммарное азимутальное угловое распределение в ливнях остается приблизительно изотропным. Подобные эффекты могут возникать, в частности, в результате возможного движения возбужденных центров под некоторым углом к траектории первичных частиц в системе центра масс взаимодействий в рамках двухцентровых моделей множественного образования частиц.

Для решения подобного рода задач необходимо совместное исследование распределений пространственных (ϑ) и азимутальных (φ) углов в отдельных ливнях. Наиболее простой путь — подбор некоторой случайной величины — функции пространственных и азимутальных углов частиц в отдельном ливне, характеризующей азимутальное угловое распределение вторичных частиц в зависимости от их углов ϑ. Одна из таких величин была введена и исследована в работе [5] (см. также [37]).

Для характеристики азимутального углового распределения вторичных частиц возьмем случайную величину

$$\alpha = \frac{n\left(\overline{\cos\vartheta}\right)^2}{\overline{\sin^2\vartheta}}\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta_0, \qquad (13.1)$$

где

$$\overline{\cos\vartheta} = \sum_{i=1}^{n}\cos\vartheta_i/n,$$

$$\overline{\sin^2\vartheta} = \sum_{i=1}^{n}\sin^2\vartheta_i/n,$$

ϑ_0 — угол между направлением первичной частицы и осью ливня, проходящей через центр тяжести точек пересечения вторичных частиц со сферой единичного радиуса, центр которой совпадает с вершиной ливня. Если x_i, y_i, z_i — координаты точки пересечения i-го вторичного следа со сферой единичного радиуса, описанной вокруг начала координат, совпадающего с вершиной ливня, то, направив ось Y по продолжению следа первичной частицы, нетрудно вывести формулу для угла ϑ_0:

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta_0 = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}. \qquad (13.2)$$

Выражая в (13.1) и (13.2) декартовы координаты через сферические, легко получить следующее выражение для случайной величины α:

$$\alpha = 1 + \frac{\sum\limits_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\sin\vartheta_i\sin\vartheta_j\cos\varepsilon_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\vartheta_i}. \qquad (13.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_i - \varphi_j.$$

Из (13.3) видно, что случайная величина α не зависит от начала отсчета азимутальных углов φ_i. С помощью этой величины можно решить вопрос об отклонении распадающихся центров от направления первичных частиц, так как это отклонение ведет к увеличению ϑ_0.

Пусть $f(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \dots, \vartheta_n, \varphi_n)$ — плотность вероятности многомерного распределения. Рассмотрим статистические флуктуации случайной величины α в однородных ливнях с одинаковой множественностью n. В предположении азимутальной изотропии углового распределения каждой частицы при любом ϑ, когда

$$f(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \dots, \vartheta_n, \varphi_n) = f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)(2\pi)^{-n}, \qquad (13.4)$$

и при фиксированных направлениях других $n-1$ частиц математическое ожидание величины α и ее дисперсия соответственно равны

$$\nu(\alpha) = \int\alpha f(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \dots, \vartheta_n, \varphi_n)\prod_{i=1}^{n}d\vartheta_i\,d\varphi_i = \int\alpha f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)\prod_{i=1}^{n}d\vartheta_i\,d\varphi_i\,2\pi = 1, \qquad (13.5)$$

$$\sigma^2(\alpha) = \int\alpha^2 f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)\prod_{i=1}^{n}d\vartheta_i\frac{d\varphi_i}{2\pi} = \nu\left[1 - \frac{\overline{\sin^4\vartheta}}{n\left(\overline{\sin^2\vartheta}\right)^2}\right] < 1. \qquad (13.6)$$

Как и раньше, ограниченность дисперсии (13.6) случайной величины α позволяет на основании теоремы

Ляпунова [8] указать критический предел для усредненной по m ливням с любыми, не обязательно одинаковыми, n случайной величины

$$\overline{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i / m, \qquad (13.7)$$

вероятность превышения которого очень мала. Так как величину $\overline{\alpha}$ при достаточно большом числе ливней m можно считать нормально распределенной, то на основании (13.5) и (13.6) можно утверждать, что

$$P(\overline{\alpha} - 1 > t/\sqrt{m}) <$$
$$< P\left(\overline{\alpha} - 1 > t\sqrt{\overline{\sigma^2(\alpha)}}/\sqrt{m}\right) \approx$$
$$\approx (2\pi)^{-1/2} \int_t^{\infty} \exp(-x^2/2)\, dx. \qquad (13.8)$$

В более общем случае, когда

$$f(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \ldots, \vartheta_n, \varphi_n) =$$
$$= f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) f_2(\varphi_1) f_2(\varphi_2) \ldots f_2(\varphi_n), \qquad (13.9)$$
$$\int f_2(\varphi)\, d\varphi = 1,$$

математическое ожидание α отличается от единицы на величину

$$\nu(\alpha) - 1 = a\nu \left[\frac{n\overline{(\sin\vartheta)}^2}{\overline{\sin^2\vartheta}} - 1 \right] \geqslant 0, \qquad (13.10)$$

$$a = \nu^2(\cos\varphi) + \nu^2(\sin\varphi).$$

Для любого симметричного распределения азимутальных углов $a = 0$ и $\nu(\alpha) = 1$. Азимутальная асимметрия, в том числе и та, которая может возникать вследствие отклонения распадающихся центров от направления первичной частицы, приводит к увеличению углов ϑ_0 в ливнях, так что $\nu(\alpha)$ становится больше единицы.

Теми же свойствами [имеются в виду равенство (13.5) и неравенство (13.6)] обладает величина

$$\alpha' = \frac{n\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0'}{\overline{\mathrm{tg}^2\vartheta}} = 1 + \frac{\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \mathrm{tg}\,\vartheta_i\,\mathrm{tg}\,\vartheta_j \cos\varepsilon_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{tg}^2\vartheta_i}, \qquad (13.11)$$

где ϑ_0' — угол между направлением первичной частицы и прямой, проходящей через вершину ливня и центр тяжести точек пересечения следов вторичных заряженных частиц или их продолжений (для частиц с $\vartheta > \pi/2$) с плоскостью, касательной к сфере единичного радиуса в точке пересечения этой сферы с продолжением следа первичной частицы.

Экспериментальные значения α' легко вычисляются с помощью так называемых мишенных диаграмм вторичных частиц.

Закон сохранения импульса, в силу которого нарушается статистическая независимость углов вылета вторичных частиц, приводит к симметризации угловых распределений и уменьшению математических ожиданий и дисперсий величин α, α', так же как для других случайных величин, рассмотренных в предыдущих разделах.

Критерии α (13.1) и α' (13.11) уступают в чувствительности критериям α_m, α_m' и β_k (§§ 9,11), поэтому их целесообразно использовать совместно с последними.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдужамилов Ш. [и др.]. ЖЭТФ, *45*, 407, 1963.
2. Абдужамилов Ш. [и др.]. ЖЭТФ, *47*, 24, 1964.
3. Абдужамилов Ш. [и др.]. «Изв. АН УзССР», сер. физ.-мат. наук, № 1, 98, 1965.
4. Абдужамилов Ш. [и др.]. ЯФ, *3*, 657, 1966.
5. Азимов С. А., Чудаков В. М. ДАН УзССР, № 9, 10, 1960.
6. Азимов С. А. [и др.]. ДАН УзССР, № 1, 11, 1965.
7. Азимов С. А., Расулкулов М. С., Чудаков В. М. ЯФ, *3*, 112, 1966.
8. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей, М.—Л., ОНТИ, 1934.
9. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика, ИЛ, М., 1960.
10. Вентцель Е. С. Теория вероятностей, М., Физматгиз, 1962.
11. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей, М., Физматгиз, 1961.
12. Гуревич И. И. [и др.]. ЖЭТФ, *37*, 1594, 1959.
13. Гусева В. В. [и др.]. «Изв. АН СССР», сер. физ., *26*, 549, 1962.
14. Ден Пхен Су, Жданов Г. Б., Третьякова М. И. Труды Международной конференции по космическим лучам, т. I, М., 1960.
15. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), М., Гостехиздат, 1955.
16. Жданов А. П. [и др.] Труды Международной конференции по космическим лучам, т. I, 87, М., 1960.
17. Копылов Г. И. Препринт ОИЯИ, Р-259, 1959.
18. Крамер Г. Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, М., Физматгиз, 1960.
21. Мишакова А. П., Никольский Б. А. ЖЭТФ, *43*, 1213, 1962.
22. Мишакова А. П., Никольский Б. А. ЯФ, *5*, 150, 1967.
23. Мишакова А. П., Никольский Б. А. ЖЭТФ, *47*, 1214, 1964.
24. Мур В. Д., Розенталь И. Л. В сб. «Физика элементарных частиц», М., Атомиздат, 1966.
25. Мурзин В. С., Сарычева Л. И. Космические лучи и их взаимодействие, М., Атомиздат, 1968.
26. Пернегр Я., Петржилка В., Шимак В. Труды Международной конференции по космическим лучам, т. I, 119, М., 1960.
27. Речицкий И. В., Чудаков В. М. ЖЭТФ, *43*, 454, 1962.
28. Ройнишвили Н. Н., Мандрицкая К. В. ЯФ, *1*, 1028, 1965.
29. Романовский В. И. Математическая статистика, кн. 2, Ташкент, АН УзССР, 1963.
30. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, М., Физматгиз, 1965.
31. Фейнберг Е. Л., Чернавский Д. С. УФН, *82*, 3, 1964.
32. Фридлендер Э. М. ЖЭТФ, *39*, 965, 1960.
33. Хайякава С. УФН, *89*, 259, 1966.
34. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями, М., ИЛ, 1956.
35. Чернов Г. М. Кандидатская диссертация, Ташкент, 1964.
36. Чернов Г. М., Чудаков В. М. ЖЭТФ, *47*, [illegible], 1964.
37. Чудаков В. М. ЖЭТФ, *40*, 156, 1961.
38. Barkow A. G. [e. a.]. Phys. Rev., *122*, [illegible], 1961.
39. Ciok P. [e. a.]. Nuovo Cimento, *8*, 166, 1958; *10*, 741, 1958.
40. Cocconi G. Phys. Rev., *111*, 1699, 1958.
41. Czyzewski O., Krzywicki A. Nuovo Cimento, *30*, 603, 1963.
42. Friedlander F. M. Nuovo Cimento, *A52*, [illegible], 1967.
43. Hasegawa S. Progr. Treor. Phys., *29*, [illegible], 1963.
44. Koba Z., Takagi S. Nuovo Cimento, *10*, [illegible], 1958.
45. Kraushaar W. L., Marks L. J. Phys. Rev., *93*, 326, 1954.
46. Niu K. Nuovo Cimento, *10*, 994, 1958.
47. Rao G. K., Kamal A. A. Proc. Phys. Soc., [illegible], 190, 1963.
48. Stern D. P. Nuovo Cimento Suppl., *16*, 251, [illegible].

ОГЛАВЛЕНИЕ

Садык Азимович Азимов,
Гилель Мордухович Чернов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Редактор *М. И. Павлова*
Художник *П. Н. Хапилин*
Технический редактор *А. Т. Шепельков*
Корректор *Г. Кулманова*

Р04831. Сдано в набор 28/XI-1969 г. Подписано к печати 30/I-70 г.
Формат 84×108$^1/_{32}$-1,69 бум. л. — 5,67 печ. л. Уч. изд. л. 5,3 Изд. № 164.
Тираж 650 Цена 57 к.

Типография изд-ва „Фан" УзССР, г. Ташкент, ул. Черданцева 21.
Адрес изд-ва: г. Ташкент, ул. Гоголя, 70. Заказ 10.