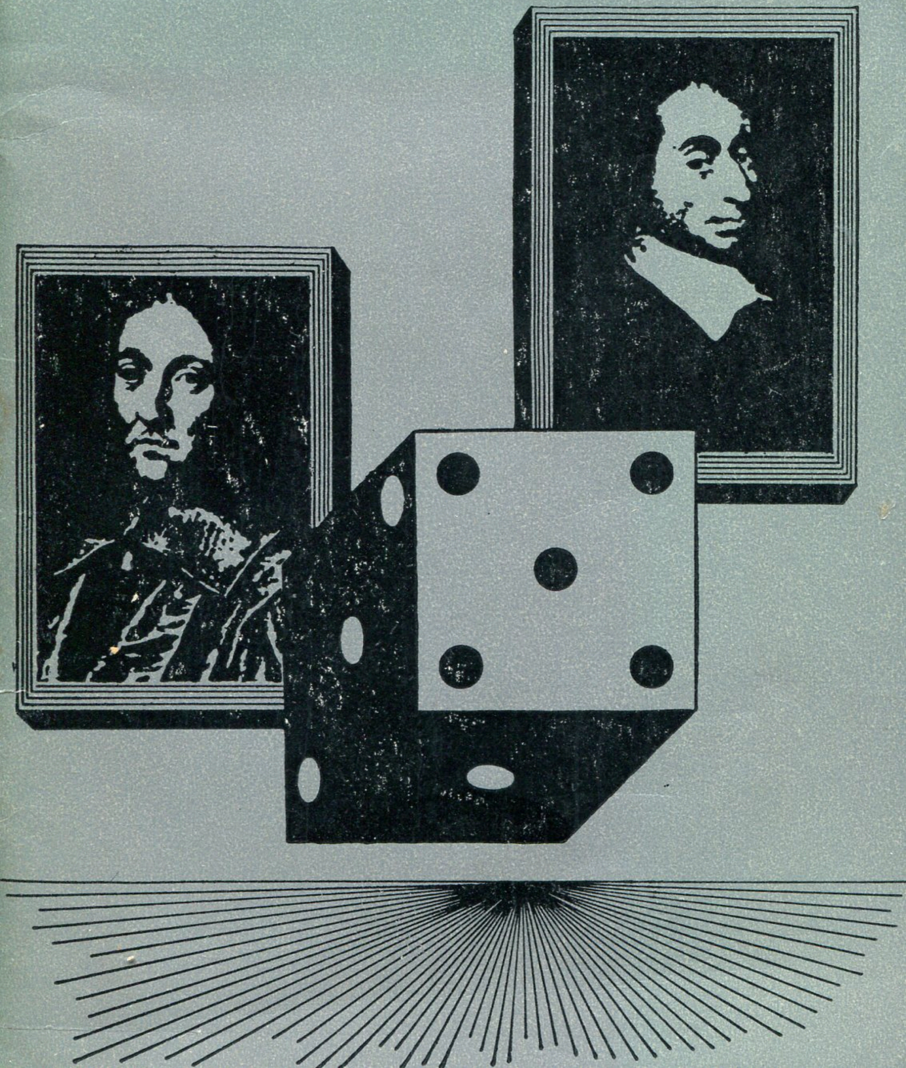
В МИРЕ НАУКИ И ТЕХНИКИ

А. РЕНЬИ

ПИСЬМА О ВЕРОЯТНОСТИ



ALFRÉD RÉNYI

LEVELEK A VALÓSZÍNŰSÉGRŐL

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST. 1969

АЛЬФРЕД РЕНЬИ

ПИСЬМА О ВЕРОЯТНОСТИ

Перевод с венгерского Д. Сааса и А. Крамли

Под редакцией и с предисловием
акад. АН УССР проф. Б. В. Гнеденко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1970

517.8
Р 39

Реньи А.

Р 39 Письма о вероятности. Перев. с венгер. Д. Сааса, А. Крамли. Ред. и предисл. акад. АН УССР проф. Б. В. Гнеденко, М., „Мир“, 1970.
96 с. (В мире науки и техники)

Книга известного венгерского математика Альфреда Реньи — беллетризированный рассказ об истоках теории вероятностей. В ней удивительным образом сочетается превосходное знание предмета, глубокое понимание логики и философии науки с великолепным даром литератора. Она может служить образцом высокой гуманитарной культуры, идущей рука об руку с точным знанием.

2-2-3
158-70

517.8

*Редакция научно-популярной
и научно-фантастической литературы*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несколько слов о книге

Советский читатель получает возможность ознакомиться в русском переводе с новой книгой известного венгерского математика Альфреда Реньи. Его первая книга, изданная примерно год назад под названием «Диалоги о математике» *, разошлась за каких-то несколько дней. Ее с увлечением читали и читают лица разного возраста, различных научных интересов и математической подготовки, и каждая категория читателей находит в ней много поучительного и интересного.

Чем вызван столь большой успех «Диалогов» (и не только у нас, а буквально во всем мире)? Несколькими причинами: превосходной литературной формой изложения, умением рассказать о принципиальных вопросах науки доступным языком, стремлением говорить о труднейших философских проблемах математики с широких позиций, талантом всесторонне охватить основную сюжетную линию и показать ее важность для научного познания Природы, для создания обоснованной картины мира.

Эта же линия проводится и в новой книге. Автор стремится показать необходимость изучения одного из основных понятий современного естествознания — случайного события — не только с качественной, но и количественной стороны. При этом он не скрывает, что многие вопросы, связанные с изучением структуры случайных событий, их природы, их философского содержания, до сих пор еще не решены. Им и теперь посвящаются многочисленные исследования, и ныне допускаются ошибки в их трактовке, остаются неразрешенными, казалось бы, самые простые из них.

Задавшись целью написать несколько писем от имени Паскаля, Реньи строго ограничил себя в выборе проблем, относящихся к математике случайного. При этом он сознательно лишал себя возможности рассказать о многих более поздних направлениях развития, о найденных глу-

---

* Альфред Реньи, Диалоги о математике, М., «Мир», 1969.

боких связях теории вероятностей с физикой, инженерным делом, биологией, экономикой, организацией производства и пр. Он лишил себя также возможности выявить место теории вероятностей в современной науке, ее роль в процессе создания научной картины мира. Вместе с тем ему удалось раскрыть тот исключительно сложный процесс, который происходит в каждой науке в первоначальный период ее становления, когда только-только зарождаются первичные задачи, требующие новых понятий и новых подходов для их решения. Именно в таком положении находилась теория вероятностей во времена Блэза Паскаля. Подход, избранный Реньи, позволил ему показать тот длительный путь, который проходит человечество от незнания к знанию, от знания менее полного к знанию более полному.

На мой взгляд, Реньи удалось создать превосходное и глубокое философское произведение. Оно волнует читателя и дает ему возможность познакомиться с особенностями эпохи, литературным стилем великого ученого-гуманиста Блэза Паскаля и с теми противоречиями, которые раздирали его, ибо в нем причудливо сочетался глубокий мыслитель и исследователь Природы и одновременно фанатически религиозный человек. Всего этого автору удается добиться благодаря счастливому сочетанию талантов математика, литератора, историка и философа. Реньи знаком со своеобразием литературного стиля Паскаля и в вымышленных письмах Паскаля превосходно ему подражает, широко используя характерные для последнего длинноты и многократное возвращение к одному и тому же предмету обсуждения. При этом вся небольшая книга основана только на тех произведениях, которые в ту пору волновали научные и литературные круги. Реньи удалось удержаться от того, чтобы приписать Паскалю взгляды, которые оторвали бы его от эпохи, перенесли бы его в более поздние времена; он нигде не изменяет исторической достоверности (если не считать, что самих этих писем Паскаля до Реньи не существовало). И в то же время затронутые в письмах вопросы глубоко современны и постоянно возникают и теперь как в философских и математических трактатах, так и на студенческих лекциях и в диспутах ученых.

Следует отметить такт, с которым Реньи отстаивает диалектико-материалистическую точку зрения на развитие человеческого знания, и то, с какой настойчивостью (но отнюдь не навязчивостью) он утверждает тезис, согласно которому ученый-естествоиспытатель в вопросах науки пусть даже стихийно, но обязательно становится материалистом. Достаточно вспомнить место беседы Паскаля с Митоном, где Митон высказывает мнение о том, что вероятность является не объективной характеристикой, а лишь субъективной оценкой психологического состояния познающего субъекта. В ответ Паскаль твердо заявляет, что он не может согласиться с такой точкой зрения, поскольку «вероятность случайного события всегда независима от нашего суждения о ней». В конце этого диалога Паскаль вновь повторяет, что «...наше личное мнение о шансах благополучного прибытия корабля не оказывает никакого влияния на его судьбу... Как по-Вашему, если бы Вы подумали, что некий корабль может утонуть, и это на самом деле случилось бы, мог бы суд привлечь Вас к ответственности на том основании, что Вы послужили причиной катастрофы? Не правда ли, Вы отвели бы обвинение, заявив, что Ваше личное мнение никак не могло повлиять на судьбу корабля? Будь я судьей, я снял бы с Вас обвинение в гибели судна, но осудил бы Вашу точку зрения относительно субъективности вероятности».

Нельзя также не отметить превосходной находки автора; письма Труверьяна (в переводе на русский язык.— Ничего не нашедшего) посланы из Химеры первого апреля, а сам Труверьян является профессором Университета Контеблэ (Голубая сказка).

Несколько слов об авторе

Альфред Реньи родился 20 марта 1921 года в Будапеште, в семье инженера. Его дед был известным литературным критиком, а отец свободно владел несколькими европейскими языками.

Окончив в 1946 году университет в Сегеде, Реньи поступил в аспирантуру к Ю. В. Линнику. Именно Линник привил ему вкус к занятиям теорией чисел и теорией вероятностей. Научная атмосфера Ленинграда, семинары Линника и беседы с ним, а также личный талант Реньи позволили ему менее чем за год закончить аспирантуру и защитить диссертацию на основе достигнутых весьма значительных результатов в области теории чисел.

Вернувшись после защиты диссертации в Венгерскую Народную Республику, Реньи начал педагогическую работу в Дебреценском университете, сочетая ее с интенсивной научной деятельностью. За три года (1946—1948) он опубликовал 15 работ, преимущественно по теории чисел, а в 1949 году начал активно работать над задачами теории вероятностей и теоретико-вероятностными методами в теории чисел.

Этот год был знаменателен для Реньи и рядом серьезных успехов другого характера: тогда же он был избран членом-корреспондентом Академии наук ВНР, получил профессуру в Дебреценском университете, был награжден орденом Кошута (в серебре).

В 1950 году при активном участии Реньи в Будапеште был организован Институт прикладной математики Венгерской Академии наук (в 1955 году он был переименован в Институт математики). Первым и бессменным (в течение двадцати лет) директором этого института стал Альфред Реньи. На этом посту он сделал очень многое для развития и укрепления венгерской школы математики, начал издание трудов института, превратившихся теперь в авторитетное периодическое издание, постоянно вкладывал много инициативы и усилий в дело укрепления научных связей Венгрии и СССР.

С 1952 года Реньи заведует кафедрой теории вероятностей Будапештского университета имени Этвеша. В эту пору расцвел его педагогический талант: он обновляет содержание курса теории вероятностей, использовав опыт советской школы; организует специальные семинары и читает спецкурсы; объединяет вокруг себя многочисленных талантливых учеников и товарищей по работе. Результаты не замедлили сказаться — именно с этого времени заявила о своем существовании и стала быстро набирать силу венгерская школа теории вероятностей.

В 1954 году появился учебник Реньи по теории вероятностей (впоследствии он был переработан для немецкого, французского и английского изданий). В том же году за выдающиеся научные, педагогические и организационные заслуги Реньи был награжден орденом Кошута (в золоте).

Огромную по размаху научную, педагогическую и организационную работу Реньи сочетал с участием в популяризации научных знаний. Он выступал с докладами перед школьниками, читал лекции по телевидению, писал популярные статьи в газетах и журналах.

Дискуссии с коллегами о принципиальных вопросах математики привели его к мысли изложить эти беседы в виде диалогов в форме, которая была бы доступна широкой аудитории и одновременно полезна для специалистов. Первоначально опубликованные в журналах, диалоги эти были затем собраны вместе и в 1965 году изданы в виде небольшой книги. Вскоре книга была переведена на ряд европейских языков и издана в ГДР, Румынии, Советском Союзе, США, Португалии и ряде других стран.

Вслед за этой книгой, принесшей Реньи широкую известность как популяризатору и философу математики, он начал работать над предлагаемой теперь советскому читателю книгой «Письма о вероятности». Вкратце замыслами о ней Реньи поделился со мной в октябре 1966 года, когда я был гостем венгерских математиков в Будапеште. Как-то перед одной из своих лекций по телевидению об элементах теории вероятностей он, рассказывая мне о том, что собирается публично выступить с демонстрацией игральных костей различных времен, упомянул о плане задуманной им новой книги.

В ноябре 1969 года я послал Реньи авторские экземпляры его «Диалогов о математике», вышедших в русском переводе. В самом конце декабря он выразил пожелание получить еще несколько экземпляров советского издания. В январе я выполнил его просьбу, но ответа от Реньи уже не получил. Вскоре пришло официальное сообщение из венгерского Математического общества им. Я. Бойяи о том, что 1 февраля текущего года А. Реньи умер от рака. До последних дней он сохранял работоспособность и усиленно работал над новой книгой, так и оставшейся незавершенной.

Преждевременный уход Реньи из жизни — тяжелая утрата не только для венгерских математиков, но и для всей математики в целом. Наука потеряла одного из блистательных своих представителей, а человечество — обаятельного, доброжелательного, умного и увлеченного наукой человека.

Альфред Реньи умер в расцвете сил, не достигнув пятидесяти лет. Короток его творческий путь, но он отмечен признаком большого таланта и удивительного умения систематически и напряженно работать. Список его работ (в том числе многочисленных переизданий и переводов на другие языки) насчитывает почти 350 названий. После него остались многочисленные ученики, которые продолжают начатые им работы, превосходный институт математики и научные труды, в том числе книги. Все это будет еще долгие годы оказывать воспитательное и научное влияние на подрастающие поколения математиков.

Место «науки о случайном» в познании закономерностей природы

Начиная с XVI века в естествознании трудами ряда ученых, и в первую очередь Галилео Галилея, были заложены основы господства детерминистско-механистической точки зрения на явления окружающей нас природы. Позднее эту точку зрения развивали Ренэ Декарт и многие его последователи. Пожалуй, наиболее яркое выражение этих идей мы находим в известном труде Пьера Лапласа «Опыт философии теории вероятностей». На второй странице этого труда содержится следующее утверждение: «Все явления, даже те, которые по своей незначительности как будто не зависят от великих законов природы, являются следствиями, столь же неизбежными, этих законов, как обращение солнца».

И далее: «Таким образом, мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего.

Ум, которому были бы известны для какого-либо определенного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором».

Такое сведение качественно многообразных закономерностей мира к механическому взаимодействию простейших тел и признание всех явлений одинаково необходимыми приводило к отрицанию случайного. Но отрицание случайного не может превратить случайное в необходимое, оно остается и играет центральную роль в познании окружающего нас мира. Недаром современная физика считает, что все законы, которым подчиняются физические явления, носят статистический характер.

Приведем примеры явлений, в которых элемент случайности играет решающую роль.

Известно, что теперь во всех крупных населенных пунктах имеются станции скорой медицинской помощи. Нет возможности заранее предсказать моменты, когда потребуется оказать срочную помощь внезапно и остро заболевшим людям. Как много в течение заданного времени будет вызовов к таким больным? Как долго придется врачу и машине скорой помощи задержаться у больного? Сколько врачей и машин необходимо иметь во время дежурства, чтобы, с одной стороны, больные не слишком долго ожидали помощи, а с другой — не наблюдалось бы слишком непродуктивного использования врачебного персонала? Мы сталкиваемся с типичной ситуацией, в которой случайными являются моменты вызовов, длительность пребывания врача у постели больного, длительность проезда машины от пункта скорой помощи до дома, в котором живет больной. Очевидно, что мы не можем, не имеем права отказываться от пунктов медицинской помощи только потому, что их организация требует учета целой серии случайных событий. Напротив, мы обязаны сделать иной вывод: поскольку здоровье населения нуждается в таких учреждениях, необходимо тщательно изучить закономерности соответствующих случайных событий и разработать приемы, позволяющие рассчитать нужные характеристики качества обслуживания населения.

Как известно, при изготовлении массовой продукции — автомобилей, телевизоров и т. д. — ее качество меняется от изделия к изделию, и притом непредсказуемым образом. Неприметная глазу неточность обработки, разница в условиях закалки, молекулярная неоднородность вещества и другие причины служат основой и неоднородности продукции. Эта неоднородность может быть очень большой. Так, испытывая лампы накаливания в, казалось бы, тождественных условиях, наблюдают большой разброс в длительности их жизни (т. е. разности между максимальной и минимальной длительностями горения). Есть изделия, где этот разброс достигает сотен и даже тысяч процентов. Более того, в границах разброса наблюдаются характерные закономерности, свойственные случайным величинам. Спрашивается, можно ли при таких условиях ограничиваться изучением только строго детерминистических закономерностей? Естественно, на этот вопрос следует дать отрицательный ответ и наряду со строго детерминистическими закономерностями изучать закономерности случайных явлений. Само собой разумеется, что это изучение не может оставаться чисто качественным; для случайных явлений необходимо разработать строгие количественные методы изучения и соответствующие их природе числовые характеристики.

При организации работы телефонных станций важно учитывать решающую для их работы роль различного рода случайных факторов: моменты поступления вызовов абонентов, интенсивность этих поступлений, длительность разговоров, терпеливость абонентов и т. д. и т. п. И все эти случайные факторы действуют систематически, они составляют основу самого процесса телефонного обслуживания. Следовательно, для продуктивной работы телефонной станции необходимо разработать методы, которые позволяли бы находить оптимальные решения в условиях постоянно действующих случайных причин.

Число примеров, в которых случайные причины, случайные влияния определяют характер течения изучаемого процесса, несложно продолжить, без преувеличения, беспредельно. Гораздо сложнее указать процессы, которые бы развивались строго детерминистически, без влияния случайных воздействий. Отсюда следовало бы сделать ряд решающих выводов, в частности вывод о необходимости введения в программу средних школ учения о случайных явлениях и математической их теории. Это учение должно стать предметом внимания не только математики, но и физики, химии, биологии, где без концепции случайного невозможно более осмысливать как саму суть изучаемых явлений, так и внешние их проявления.

Несколько слов о развитии математики случайного

То, что случайные явления представляют собой не исключение, а правило в реальном мире, было замечено еще в древности. Об этом словами Лукреция Кара прекрасно говорит Альфред Реньи. Попытки математически подойти к изучению случайных явлений делались задолго до Паскаля и Ферма. Во всяком случае, факты устойчивости частот случайных событий, связанных с демографическими данными и потреблением больших городов, были известны еще в Древнем Китае и Древнем Риме. Изучать случайные события с помощью точных методов пытались Кардано и Галилей. Однако начало теории вероятностей на самом деле положила только переписка Паскаля и Ферма по поводу вопросов кавалера де Мере. К тому времени процесс научного познания уже победил; научное мышление уверенно одолевало воззрения теологов, и свободный полет творческой мысли неизбежно приводил к одному из основных вопросов познания: каковы типы закономерностей, господствующих в Природе? Нет ли наряду с механистическим детерминизмом детерминизма более общего, позволяющего охватить явления природы шире и глубже?

На этот вопрос теперь дан определенный ответ: закономерности случайных явлений дают нам детерминизм более широкого типа, который в качестве предельного случая включает детерминизм полный, практически в реальных явлениях не наблюдаемый.

Начиная с Паскаля, Ферма и Гюйгенса, в научный обиход вошли первые понятия теории вероятностей — математической науки о случайных событиях. Эти понятия формировались на примерах изучения азартных игр, но создатели начал теории вероятностей отчетливо понимали общее натурфилософское значение своих рассмотрений. В связи со сказанным полезно привести подлинные слова Гюйгенса, которые содержатся в его трактате «Об азартных играх»: «...я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории». Последующее развитие науки в полной мере подтвердило эту точку зрения.

С течением времени изменялся и расширялся объект изучения теории вероятностей. Если в самом начале ее появления, фактически вплоть до конца XVIII века, основной интерес представляло исследование вероятностей случайных событий, то уже в XIX веке центр тяжести переносится на исследование случайных величин. Впрочем, само это понятие формировалось очень долго, и его элементы встречаются уже в работе Гюйгенса. Позднее случайными величинами занимались Муавр, Котс, Даниил Бернулли, Лаплас, Лежандр, Гаусс. Работы упомянутых ученых (кроме Муавра) относились к теории ошибок наблюдений, и здесь по необходимости до́лжно изучать не столько случайные события, сколько случайные величины. Логически четкий смысл понятие случайной величины приобрело только в работах акад. А. Н. Колмогорова, а понятие функции распределения — в одной из работ А. Ляпунова.

На этом, однако, не прекратилось расширение объекта изучения. Во второй четверти нашего столетия в теорию вероятностей было введено важнейшее понятие — понятие случайного процесса. Его формирование протекало под влиянием физики, биологии, инженерного дела. Суть в том, что как физика и биолога, так и инженера в первую очередь интересует процесс развития явления во времени, а потому рассмотрение только случайных величин, которые не связаны с течением времени, имеет лишь ограниченное значение. И хотя определение случайного процесса связано с именами таких выдающихся исследователей, как А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, Е. Е. Слуцкий, следует все же отметить, что у них были и предшественники — Лаплас, Башелье, Пуанкаре, А. А. Марков. По предложению французского математика Адамара в честь Маркова назван важнейший класс случайных процессов (марковские процессы), для которых все влияние прошлого на развитие процесса в будущем заключается в достигнутом им в настоящий момент состоянии. Вскоре задачи геофизики и других областей естествознания привели к необходимости рассмотрения не только случайных величин, зависящих от одного параметра — времени, но и от многих параметров — времени и положения. Так появились новые объекты изучения — случайные поля.

Само собой разумеется, что центральное понятие теории вероятностей — вероятность — не могло оставаться неизменным на протяжении почти трехсот лет. Хорошо известно, что классическое определение, возникшее в переписке Паскаля и Ферма, оказалось недостаточным уже в XVIII столетии, когда наука столкнулась с необходимостью изучения задач страхования, ошибок наблюдения. Разрыв логических основ теории вероятностей с потребностями практики сказывался уже в начале прошлого века и стал совершенно нетерпим в наши дни. Вот почему в последние пятьдесят лет ученые уделяли такое внимание логическим вопросам, вопросам разумного расширения действия понятий теории вероятностей. Это было вызвано потребностями как бурно прогрессирующей практики, предъявившей к теории вероятностей многообразные требования, так и самой математики.

Теория вероятностей сейчас вошла в семью математических наук и в своем развитии испытала мощное влияние со стороны буквально всех ветвей математики; в свою очередь она сама заставила пересмотреть содержание ряда направлений математических исследований. Одновременно теория вероятностей исключительно тесно связана со всем разнообразием прикладных исследований — от лингвистики до организации производства и экономики. Под влиянием практики она получала и продолжает получать мощные толчки для дальнейшего прогресса. Сейчас математика случайного испытывает период расцвета, вот почему так важно глубже рассмотреть ее центральные методологические проблемы. Именно этому и посвящена предлагаемая читателю книга А. Реньи. Пожелаем же ей успеха. Она этого заслуживает.

В переводе книги с венгерского языка принимали участие Домокош Саас и Андраш Крамли (Д. Саас перевел переписку Реньи с профессором Труверьяном и все четыре письма Паскаля, А. Крамли — остальную часть книги). Мною осуществлена литературная обработка, сравнение с текстом немецкого издания и редактирование. Работой над книгой мы хотели бы внести свою долю в сохранение памяти о прекрасном человеке, ученом и литераторе Альфреде Реньи.

Б. Гнеденко

Вместо предисловия

Химера,
1 апреля 1966 года
Профессору
Альфреду Реньи
Будапешт

Дорогой профессор Реньи!

Я не уверен, что Вы помните о нашем разговоре, который состоялся 9 июня 1962 года во время конференции в Клермон-Ферране, посвященной 300-летней годовщине со дня смерти Паскаля. Поэтому разрешите вкратце напомнить его содержание.

В тот день для участников конференции была организована экскурсия на горную вершину Пюи де Дом, где 19 сентября 1648 года Перье, шурин Паскаля, проводил опыты, запланированные Паскалем и относящиеся к измерению давления воздуха. В то время, когда мы пили кофе на террасе ресторана, находящегося на горной вершине, и любовались раскинувшейся перед нами панорамой, мы говорили, конечно, о Паскале. Разговор касался того, в чем он оказал наибольшее влияние на развитие науки, — его аэро- и гидродинамических исследований, исследования бесконечно малых величин, создания элементов теории вероятностей, сконструированной им первой счетной машины.

Я рассказал Вам тогда о датированном 1654 годом письме Паскаля в Парижскую Академию наук, основанную Мерсеном (и позднее возглавленную Ле Пеллером). В этом письме перечисляется ряд запланированных и почти подготовленных Паскалем работ, которые он намеревался вскоре направить в Академию. Среди этих работ Паскаль назвал одну статью на совершенно новую, до тех пор систематически не разрабатывавшуюся тему — о математике случайного. Я, помнится, сказал, что из тех немногих строк, в которых Паскаль изложил содержание этой работы, вытекает, что он полностью осознал принципиальное и одновременно практически основополагающее значение открытой им новой области науки — теории вероятностей.

Очень жаль, сказал я Вам далее, что Паскаль не написал этой работы, особенно потому, что в сохранившихся рукописях и письмах к Ферма, в которых изложена суть теории вероятностей, он ограничился лишь решением задач кавалера де Мере (и изложением проблем комбинаторики, связанных с этими задачами). Если бы нам осталось неизвестным письмо Паскаля в Парижскую Академию наук, то мы не имели бы даже уверенности в том, что он сознавал, насколько заложенные им и Ферма основы новой отрасли науки революционизировали наше научное представление о картине мира.

Вы, г-н Реньи, ответили мне на это, что полностью уверены в том, что Паскаль где-то должен был изложить свои мысли о теории вероятностей. Затем Вы сказали, что следует продолжить поиски потерянной рукописи. На это я заметил, что немногими посмертными рукописями занимались столь основательно, как рукописями Паскаля; я сам посвятил несколько лет архивным поискам новых рукописей без заметного, однако, успеха. Но Вы остались при своем мнении и высказали предположение, что Паскаль, возможно, по обычаям того времени, изложил свою теорию в форме писем к Ферма. При этом может статься, что известные нам письма Паскаля на эту темы не были единственными, в которых говорится об игре в кости. Вы еще добавили, что, быть может, поиски не увенчались успехом и потому, что исследователи искали потерянные рукописи в бумагах Паскаля, вместо того чтобы искать их в наследии Ферма.

Тогда Ваше замечание заставило меня задуматься, поскольку высказанная Вами гипотеза показалась мне заслуживающей внимания. Однако сильная занятость не позволила мне всерьез заняться Вашей идеей, и я вспомнил о ней только в самом начале 1966 года, когда вынужден был выехать в Тулузу по личному делу. Случилось так, что умер мой дядюшка — старый холостяк с причудами — и завещал мне все свое имущество и тулузское имение при условии, что я раскрою историю тяжбы за это имение, которая происходила около трехсот лет назад. Последнее желание дяди я хотел выполнить вполне добросовестно, тем более что меня интересовала история нашей семьи. В январе текущего года я выехал в Тулузу и приступил к исследованию городского архива, в котором хранятся связки деловых бумаг, относящихся к 1660 году. Как я уже говорил, я посвятил несколько лет жизни изучению рукописей Паскаля; в результате, смею утверждать, его почерк я знаю лучше, чем свой собственный.

Не удивительно поэтому, что, когда вечером 17 января, перелистывая досье, на котором, среди других, стояла и подпись Ферма, я наткнулся на одно письмо, мне сразу бросился в глаза почерк Паскаля. Можете себе представить, какой священный трепет охватил меня! Я не покидал архива до следующего утра. Забыв о пище и питье, я продолжал поиски до тех пор, пока не нашел еще три письма. Позднее я выяснил, что после смерти Ферма эти письма затерялись среди судебных бумаг, датированных 17 января 1665 года и оставшихся на его квартире, и таким образом оказались в архиве. Триста лет на них никто не обращал внимания!

Вот так, совершенно случайно, я стал владельцем писем, имеющих столь огромное научное и историческое значение. Их открытие в действительности не моя заслуга, мне только улыбнулось счастье. Вы же были тем, кто первый выдвинул смелую гипотезу, согласно которой потерянные работы Паскаля по теории вероятностей были написаны в форме писем к Ферма и их следует искать среди сохранившихся бумаг последнего. Поэтому я и полагаю, что именно Вам принадлежит право опубликовать эти письма.

Я вкладываю в конверт перепечатанный и тщательно проверенный мною текст. Но все же я вынужден просить Вас подготовку писем к печати провести самостоятельно, без какой-либо помощи с моей стороны.

Думаю, что моя просьба Вас удивит, поэтому я должен объяснить, чем она вызвана. Надеюсь, Вы меня поймете. Среди судебных бумаг я нашел также несколько листков теоретико-числового содержания, исписанных почерком Ферма. На этих листках почти нет текста. Они сплошь заполнены формулами. Однако и без текста совершенно очевидно, что они находятся в связи с великой теоремой Ферма. Теперь я днем и ночью тружусь над расшифровкой этих заметок. Надеюсь, что мне удастся либо найти доказательство, данное Ферма, либо обосновать, что свое утверждение он в действительности доказать не смог и осознал это в последние годы жизни. Я убежден, что Вы понимаете, сколь важен для меня этот вопрос и почему я не могу заняться ничем другим, пока не удастся его разрешить. После того как мне посчастливилось найти письма Паскаля, я решил опубликовать их и сопроводить публикацию большой статьей. Но не успел я к ней приступить, как в руки мне попали упомянутые заметки Ферма. С тех пор я занимаюсь только ими. Если я сумею разгадать тайну этих листков, то еще успею написать запланированное исследование о письмах Паскаля. Но затягивать издание писем не имею права. Именно поэтому я и прошу Вас взять на себя труд скорейшего их опубликования.

Заранее примите мою признательность и разрешите выразить Вам, мой дорогой друг, глубокое уважение.

Преданный Вам Анри Труверьян,
профессор истории математики Университета Контеблэ

Будапешт,
10 апреля 1966 года
Профессору
Анри Труверьяну
Химера

Дорогой профессор Труверьян!

Ваше любезное письмо от 1 апреля и письма Паскаля я получил, за что приношу Вам свою сердечную благодарность. Вашу просьбу я, разумеется, выполню с большой радостью. Но прошу Вас разрешить вместе с письмами Паскаля опубликовать и посланное Вами письмо. Это объяснит научной общественности, что именно Вы нашли письма и при каких обстоятельствах. Я далек от намерения отвлекать Вас от расшифровки заметок Ферма Как я, так и все мои коллеги желаем Вам в этой работе самых больших успехов и с огромным нетерпением ожидаем Ваших результатов.

Хотел бы задать Вам еще один вопрос: как Вы думаете, есть ли надежда найти ответы Ферма на письма Паскаля?

С искренним уважением
Альфред Реньи

Химера,
3 мая 1966 года
Профессору
Альфреду Реньи
Будапешт

Дорогой профессор Реньи!

Благодарю Вас за письмо от 10 апреля. Я счастлив, что Вы взяли на себя заботы по опубликованию писем Паскаля и, освободив меня от этого труда, тем самым предоставили мне возможность сосредоточить все силы на расшифровке заметок Ферма. К сожалению, эта задача оказалась труднее, чем я полагал. Ферма употребляет совершенно необычные обозначения, в понимании которых я делаю только первые шаги. Разумеется, я не возражаю, чтобы вместе с письмами Паскаля Вы опубликовали мое предыдущее письмо, а если сочтете целесообразным, то и настоящее письмо также.

Что касается ответов Ферма, то мне не представляется, каким образом их можно найти. После смерти Паскаля его сестра, Жильбер Перье, приводила в порядок его бумаги. Она тщательно сохранила все заметки, написанные Паскалем, но, к сожалению, все письма, адресованные Паскалю, уничтожила. Поэтому о содержании писем Ферма мы можем судить только по ответным письмам Паскаля.

Искренне расположенный к Вам
Анри Труверьян

Письма Паскаля к Ферма

Первое письмо

Париж,
Предместье Сен-Мишель,
28 октября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма
Тулуза

Дорогой г-н Ферма!

Наш общий друг, г-н Каркави, вчера сообщил мне, что собирается в Тулузу, и спросил, не желаю ли я передать Вам письмо. Конечно, я не хотел упустить удобный случай, но поскольку время у меня было ограничено, я смог написать лишь несколько строк [1]. Однако, как выяснилось, г-н Каркави отложил свою поездку на два дня, и у меня появилась возможность написать Вам подробнее.

Теперь, когда вопросы, поставленные около года назад кавалером де Мере — во время путешествия в Пуату в обществе герцога Роаннского и г-на Митона, — полностью выяснены, должен признаться, что больше всего я радуюсь тому, что корреспонденция, связанная с этими вопросами, послужила укреплению нашей дружбы, и я рад этому больше, чем самому их решению. Я ценю эту дружбу превыше всего не только потому, что считаю Вас крупнейшим геометром [2] современной Европы, но и потому, что Ваши письма помогли мне узнать такого человека, дружбой которого могут гордиться даже короли. Так вопросы бравого кавалера — если сами по себе они и не представляют серьезного интереса — сослужили неоценимую службу. Именно потому, что я столь ценю Вашу дружбу, мне хотелось бы поделиться с Вами некоторыми мыслями. Я ощущаю потребность сообщить Вам, почему меня так волнуют эти вопросы, почему я считаю их — даже по двум различным причинам — достойными внимания математиков и откуда у меня взялась смелость пригласить Вас принять участие в разрешении этих проблем. При этом я сознаю, какую ответственность беру на себя, когда пытаюсь отвлечь Вас от тех исследований, перед которыми, впрочем, никто не преклоняется больше меня. И хотя, как я уже говорил, в этом отношении моя совесть чиста, считаю своим долгом пояснить, о чем же идет речь, поскольку в наших письмах об этих проблемах еще не говорилось. Руководствуясь этими соображениями, я пришел к мысли написать Вам настоящее письмо.

Для этого, однако, имеются и другие причины. Хочу надеяться, что Вы знакомы с моим письмом в Парижскую Академию, которое я написал несколько недель назад [3]. Боюсь, что Вам покажется высокопарным следующее предложение, которое составляет содержание задуманной, но еще не написанной мной работы: «Таким образом, это учение, объединяющее точность математических доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул — математика случайного»[4]. Приведенные строки я записал немедленно после того, как у меня зародились и оформились изложенные здесь мысли. Перечитывая вновь свои собственные слова, я вспоминаю то ликование, которое охватило меня, когда я записал это предложение. Я ликовал, ибо зародился новый раздел математики и, смею надеяться, с большим будущим. Я не удивлюсь, если скажут, что в моей безудержной радости повинно то обстоятельство, что в создании новой ветви математики есть доля и моего участия. Что ж, такая гордость является одним из видов человеческой слабости, которых я не лишен, хотя и постоянно пытаюсь с ними бороться. Спешу, однако, заметить, что Вашу долю в создании нового учения я считаю гораздо более значительной. Я убежден, что все, о чем я говорю в настоящем письме, Вы воспримете лишь как несовершенное оформление Ваших, быть может еще не высказанных и не записанных, но уже давно перебродивших и выкристаллизовавшихся мыслей. Если же мои формулировки еще недостаточно совершенны, то в оправдание себе могу лишь сказать, что для выражения этих мыслей я не имел подходящих слов и был вынужден воспользоваться словами обиходного языка, придавая им новый смысл.

Надеюсь, Вы понимаете, почему я ощущаю непреодолимое желание поделиться с Вами своими мыслями. Но, видимо, когда Вы дойдете до этого места, Вас удивит, к чему так много предварительных разъяснений. Вы первый, кому я поверяю свои мысли, и хотя я ни у кого не могу рассчитывать на большее понимание, чем у Вас, я все-таки с трепетом ожидаю Вашего суда: сумел ли я дать Вам правильное представление об их сути? Именно поэтому я столь многословен и так оттягиваю начало, уподобясь некоему больному, который боится выдернуть зуб и всячески тянет время, сообщая врачу излишние подробности об ужасной боли и о том, как долго она продолжается. Но хватит об этом, пора перейти к делу.

По моему убеждению, человек родился, чтобы думать. Способность мыслить отличает его от животных, в этом состоит его человеческое достоинство[5]. Нас окружает двойная бесконечность: с одной стороны, бесконечная протяженность Вселенной, в которой не только мы сами, но и Земля и даже вся солнечная система являются лишь каплями в море; с другой — бесконечная сложность мира, в котором каждая капля воды сама по себе образует небольшую Вселенную. Мы сами находимся посредине между бесконечно большим и бесконечно малым. Мы являемся пылинками по сравнению со звездами, и в то же время гигантами по сравнению с мельчайшими живыми существами, кишащими в каждой капле воды[6]. Обращаем ли мы наш взор к звездам или же проникаем в собственную душу, желаем ли мы изучить будущее или прошлое — повсюду в равной мере мы не можем найти прочной точки опоры. Если тщательно рассмотреть все, что нам известно и во что мы верим, поместить в центр нашего внимания и под микроскоп нашей логики, то окажется, что мы ни в чем не можем быть уверены. Я нахожу ничтожным утешением то, что моя тщетная борьба с этими проблемами все же доказывает, что «я существую». Впрочем, меня интересует не вопрос, существую ли я, а кто я, собственно, есть. На этот вопрос я не нахожу ответа и иногда страдаю от этой тягостной неуверенности. Мы не знаем, откуда мы взялись, зачем родились и куда идем. Человечеству есть над чем поразмыслить. Но задумывается ли над этим большинство людей? Нет, об этом не может быть и речи. Люди думают о войне, деньгах, развлечениях и азартных играх. Впрочем, игрока я еще понимаю: игра делает его счастливым, поскольку на время он забывает о своих нуждах и заботах. Однако при этом он забывает и о себе. Игра одурманивает его как опиум и отвлекает от истинных проблем [7]. Но если кто-либо время от времени забывается, погружаясь в освежающий душ игры, то и в этом еще нет большой беды; нельзя только допускать, чтобы при этом он захлебнулся. На мой взгляд, размышления над замечательными закономерностями азартных игр как раз могут стать тем средством, которое способно освободить игрока от притягательности игры и возвратить его в мир мышления. Но не только в этом состоит важнейшая польза исследования математических задач, относящихся к справедливым играм.

Перед тем как перейти к изложению сути этих вопросов, я должен добавить, что такого рода исследования оказали на кавалера де Мере самое положительное влияние. Недавно я встретил его вновь и был поражен, увидев, как он изменился за этот год. Раньше он гордился тем, что ничто его не интересует по-настоящему, всему внимал с холодным равнодушием. Ему было бы стыдно признаться, что его интересует и захватывает что-либо, помимо игры. Он гордился тем, что не является рабом какой-то страсти, в том числе и науки. На самом деле он таким и был. А теперь он удивил меня своими фундаментальными знаниями в области математики, которыми он овладел в течение столь короткого времени, а также тем, сколь ревностно и основательно он занимается различными проблемами, и не без успеха. Поймите меня правильно, я не обольщаюсь тем, что это дело моих рук, ведь соответствующие стремления у него уже были до нашего знакомства. Ничто не свидетельствует об этом лучше, чем тот факт, что он сам поставил задачи, связанные с игрой в кости, и даже нашел решение наиболее легкой из них [8]. Но он не смог решить вторую задачу — задачу, которую Вы и я разрешили совершенно различными путями, ведущими, правда, к одному и тому же результату. Возможно, Вы вспомните, как, будучи в восторге от этого, я написал Вам, что истина одна и та же как в Париже, так и в Тулузе [9]. Именно это, я думаю, вызвало в нем упомянутое изменение, задело его гордость, особенно когда ему удалось понять наши решения и он почувствовал, что стоило ему немного серьезнее заняться этим вопросом, и он также смог бы прийти к этому решению. Вы, разумеется, знаете, что это не случайность. Каждое открытие, если оно правильно понято, оказывает подобное воздействие. В этом я вижу верный признак того, что кавалер де Мере правильно понял наше решение (и это меня очень радует), но не больше. Однако я снова отклонился от основной темы, поскольку сейчас я хочу говорить о математике случайного, а не о поразительной перемене в кавалере де Мере, который Вас, по-видимому, вряд ли интересует, так как Вы его совсем не знаете.

Угнетающая неопределенность, о которой я говорил выше, коренится в суеверии людей — ведь большинство из них считает, что если они о чем-либо не имеют полного знания (а мы почти никогда не имеем полного знания), то они вообще ничего об этом не знают. Я же исхожу из утверждения, что такого рода мнение глубоко ошибочно. Частичное знание также является знанием, и неполная уверенность равным образом имеет некоторое значение, особенно когда мне известна степень этой уверенности. Кто-нибудь может спросить: «А разве можно измерить степень уверенности числом?» Конечно, отвечу я; могут же лица, играющие в азартные игры, основываться именно на этом. Когда игрок подбрасывает игральную кость, он заранее не знает, какое число очков выпадет в результате. Но кое-что он все же знает. Например, то, что все шесть чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — имеют одинаковую долю успеха. Если мы условимся принять возможность появления достоверного за единицу, то возможность выпадения шестерки, так же как и каждого из остальных пяти чисел, выразится дробью $^1/_6$. Если подбросить игральную кость четыре раза, то, как справедливо заметил кавалер де Мере, выгоднее (при равных ставках) держать пари, что по меньшей мере один раз выпадет шестерка. Это можно также выразить по-другому, сказав, что уверенность в событии выпадения по меньшей мере одной шестерки при четырехкратном бросании игральной кости будет больше чем $^1/_2$. Если шансы наступления некоторого события и того, что оно не наступит, точно совпадают (как, например, при броске монеты шансы выпадения «герба» и «решетки»), то я говорю, что степень уверенности в наступлении этого события составляет $^1/_2$, т. е. она в точности равна степени уверенности в том, что это событие не наступит. Конечно, то, что я выбираю степень уверенности в появлении достоверного события равной единице, сделано совершенно произвольно; вместо единицы можно было бы выбрать и другое число, например 100. Тогда степень уверенности в том, что зависящее от случая событие будет иметь место, выражалась бы в процентах. Можно также приравнять полную уверенность в каждом конкретном случае другому подходящему числу; например, при броске кости взять его равным шести. Тогда степень уверенности в выпадении каждой из шести граней будет равна единице. Однако я считаю более простым и естественным принять степень уверенности в появлении достоверного события равной единице. Тем самым степень возможности наступления случайных событий соизмеряется с тем, какую часть единицы она составляет. Само собой разумеется, что степень уверенности в наступлении невозможного события оказывается равной нулю. Итак, если степень возможности появления случайного события является положительным числом, то это означает, что наступление этого события возможно, даже если шансы его наступления ничтожны.

Замечу сразу же, что степень возможности (уверенности) события я назвал *вероятностью*. Я много размышлял над выбором слова и в конце концов именно это счел наиболее выразительным. По-моему, выбранное название находится в полном соответствии с обычным словоупотреблением. В будничной речи обычно говорят о некотором случайном событии, что оно очень вероятно или невероятно или же что одно событие вероятнее другого. В своей теории я исхожу из того основного предположения, что каждому событию, наступление которого зависит от случая, можно поставить в соответствие определенное число, заключенное между нулем и единицей, в качестве его вероятности. Вероятности событий, которые в разговорной речи называют вероятными, близки к единице, т. е. к вероятности достоверного события; точно так же вероятности событий, которые в обычной речи называют невероятными, близки к нулю, т. е. к вероятности невозможного события. При выборе слова «вероятность» меня в известной мере смущало то обстоятельство, что в казуистике это слово употребляется совсем в ином смысле. Там достоверными называют такие утверждения, которые находятся в Священном писании, папских буллах или же в резолюциях соборов. Те же утверждения, которые находятся в книгах теологов, называют вероятными. Если по одному и тому же вопросу различные теологи высказали взаимно противоречащие утверждения, то каждое из утверждений такого рода называют «вероятным»[10]. Но я придерживаюсь того мнения, что это странное словоупотребление не дает оснований опасаться использования слова «вероятный», поскольку вряд ли кому-нибудь (кроме иезуитов) придет в голову понимать это слово по-другому. Впрочем, в вопросе выбора обозначения я опираюсь на Декарта, который в своих «Правилах» [11] говорит: «Всякий раз, как я хочу ввести новый специальный термин, я выбираю его из слов, находящихся в употреблении, и то из них, которое мне кажется самым подходящим, я всегда употребляю в установленном мной значении». В дальнейшем я всюду буду пользоваться термином «вероятность» для обозначения числа, выражающего степень уверенности.

Наиболее существенное из всего сказанного заключается в том, что неполное знание также может иметь определенную ценность, но только в том случае, если мы можем выяснить степень его истинности. Если известно, что вероятность случайного события измеряется некоторым числом, то нам о нем известно нечто определённое, хотя, собственно говоря, у нас нет уверенности в его наступлении. Следовательно, надо ценить и неполное знание, но нельзя его переоценивать, смешивая с полным знанием. Монтень, «Опыты» которого — самая близкая для меня книга (хотя во многом я с ним и не согласен), сформулировал эту мысль так: «Меня заставили возненавидеть вероятные суждения те, кто выдает их за верные» [12]. То, о чем говорит здесь Монтень, является и моим внутренним убеждением. Неоднократно случалось, что мои друзья хотели убедить меня в чем-то, но я соглашался с ними только в общем и целом, они же желали, чтобы их мнение было принято полностью, без всяких оговорок. В результате споров наши мнения расходились еще больше, поскольку, как выяснялось впоследствии, мы различно понимали и такие факты, относительно которых я первоначально думал, что наши мнения совпадают. И мы расставались как люди, которые мыслят по-разному. Мне кажется, у Монтеня были те же переживания, поскольку так неизбежно случается с каждым, у кого слова и дела едины — *quibus vivere est cogitare* [13]. Но я опять отклонился от темы; я хотел говорить не о Монтене и сослался на него только для того, чтобы доказать: хотя идея количественного измерения вероятностей и нова, она является логическим продолжением давно известных замыслов.

Вы, должно быть, уже заметили, что при измерении степени уверенности я пользовался предположением относительно безграничной делимости достоверности подобно линии, пространству или числу. В связи с этим следует задаться вопросом: может ли действительно вероятность появления случайного события принимать любое значение между нулем и единицей? Простым примером я берусь показать, что это действительно так.

Друзья постоянно смеются над моей привычкой, присущей, как утверждают, в Париже мне одному, хотя я считаю ее вполне естественной: я ношу часы в кармане и кладу их ночью возле кровати, чтобы узнать время, когда я просыпаюсь (что случается очень часто). Так вот: как велика вероятность того, что, когда я проснусь ночью и посмотрю на часы, большая стрелка будет стоять между 15 и 20 минутами? Поскольку большая стрелка движется равномерно, то из 60 минут точно 5 минут (т. е. $^1/_{12}$ часа) будут находиться между указанными границами и, стало быть, искомая вероятность составляет $^5/_{60}={}^1/_{12}$. Можно, конечно, об этом же событии сказать и так: направление большой стрелки окажется в 30-градусном секторе, вероятность чего равна $30°/360°={}^1/_{12}$. Но если я выберу на моих часах такой угол, величина которого равна $360°\cdot x$, где x — любое число между 0 и 1, то вероятность того, что, когда я проснусь ночью и посмотрю на часы, большая стрелка будет находиться в заданном угле, равна точно x.

Конечно, в азартных играх бывают только такие вероятности, которые можно выразить как отношение двух целых чисел. Ведь в этих играх всегда можно указать, сколько равновозможных и взаимно исключающих исходов может произойти. Таким образом, вероятность любого события, относящегося к результату игры, равна частному от деления числа благоприятных для этого события исходов на число всех возможных исходов. Например, при бросании кости число всех возможных исходов равно шести, так как результат может быть любым из чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Следовательно, вероятность события, состоящего в выпадении шестерки при броске кости, равна $^1/_6$, а для события, что шестерка не выпадет, — $^5/_6$ (ибо в первом случае число благоприятных исходов равно единице, а во втором — пяти). Сумма вероятностей события, что выпадет шестерка, и противоположного события (шестерка не выпадет) равна единице. Это, очевидно, характерно и для любого события, поскольку вероятность достоверного события, т. е. единица, разделяется между событием и противоположным ему событием. И еще одна общая черта: если событие разделяется на несколько взаимно исключающих, то его вероятность равна сумме вероятностей, его составляющих, подобно тому как при разделении определенного объема жидкости на несколько сосудов сумма объемов жидкости в отдельных сосудах равна объему всей жидкости. Другими словами, если в некоторой игре рассматривается несколько взаимно исключающих событий, то сумма вероятностей этих событий равна вероятности того, что какое-нибудь из этих событий наступит. Это правило я назвал *теоремой сложения вероятностей.*

Наряду с этой почти самоочевидной теоремой я устанавливаю также другую, более глубокую теорему, которую мне хотелось бы назвать *теоремой умножения вероятностей.* Она утверждает следующее: если некто сыграет в одну и ту же игру дважды, то вероятность того, что одно определенное событие произойдет при первой игре, а другое определенное событие (которое может быть идентично первому или же отличаться от него) — при второй игре, будет равна произведению вероятностей этих событий при отдельных играх. То есть если я подбрасываю одну и ту же кость дважды, то вероятность того, что как при первом, так и при втором броске получатся числа, отличные от шести, равна $^5/_6 \cdot {}^5/_6 = {}^{25}/_{36}$. Результат в обоих случаях может быть произвольной упорядоченной парой чисел, взятых из 1, 2, ... , 6, их число равно 36. Среди них имеется 25 пар, в которых оба члена отличны от шести. Подобным же образом если я подброшу игральную кость четыре раза, то вероятность того, что я ни разу не получу шестерку, равна $^{25}/_{36} \cdot {}^{25}/_{36} = {}^{625}/_{1296}$; это произведение означает, что шестерка не появится ни при первых двух, ни при вторых двух бросках. Вероятность противоположного события, т. е. что при четырех бросках кости по меньшей мере раз выпадет шестерка, равна $1 - {}^{625}/_{1296} = {}^{671}/_{1296}$. Таким образом, мы получили Ваш хорошо известный ответ на первый вопрос кавалера де Мере.

Как просты две основные теоремы математики случайного! Вы можете спросить, относятся ли эти размышления к самой математике или же к естественным наукам, использующим математические соображения. Я считаю, что здесь речь идет о новой ветви математики, которую можно назвать математикой случайного (что я и сделал в моем письме в Академию); можно также назвать ее *теорией вероятностей*. Второе название кажется мне более выразительным.

Итак, назовем новое учение, цель которого состоит в том, чтобы давать определенное знание о случайных, неопределенных событиях, теорией вероятностей. Что же касается того, является ли теория вероятностей областью математики, то весь вопрос сводится к следующему: что мы подразумеваем под математикой? Если под математикой понимают только традиционные ее разделы — геометрию, арифметику и алгебру, то, конечно, в таком узком определении нет места ни для какой новой ветви. Я же в этом вопросе согласен с Декартом, который утверждал, что все исследования [14], направленные на изучение порядка и меры, принадлежат математике, независимо от того, что́ является их предметом и к чему относятся рассматриваемые порядок и мера.

Теперь, когда все, о чем я столько думал, уже написано, я испытываю облегчение (так как у меня были трудности при формулировании) и одновременно озабоченность (ибо не знаю, удалось ли мне понятно выразить то, о чем я думал). Прошу Вас, не оставляйте меня слишком долго в неведении и сообщите побыстрее Ваше мнение об этой весьма капризной по характеру новорожденной, которую я нарек «теорией вероятностей». Если Вы найдете в ней какие-либо недостатки, ошибки или противоречия, то можете быть уверены, что от Вас я с благодарностью приму самую строгую критику.

Многие важные вопросы, над которыми я уже давно задумываюсь, здесь не затронуты. Если из Вашего ответа мне станет ясно, что я иду по верному пути, то постараюсь привести в порядок мысли и в следующем письме поделиться с Вами своими соображениями.

Возможно, Вы избавите меня от связанных с этим мук — если в Вашем ответе мне удастся прочесть свои собственные мысли в столь ясном изложении, какого сам я не мог и вообразить.

Письмо получилось слишком длинным, и все же я не могу закончить его, не сообщив Вам, что, думая обо всех этих вопросах, я много раз доставал Ваше письмо об игре в кости и старался угадать Ваши мысли, читая их между строк. Мысленно я все время спорил с Вами, и многое, о чем здесь написано, является как бы ответом на те вопросы, которые Вы задавали мне во время наших воображаемых бесед. Я был бы невообразимо счастлив, если бы все сказанное оказалось не пустой фантазией, а, возможно, пусть несовершенным и грубым, но черновиком Ваших мыслей.

Ваш искренний и верный поклонник и почитатель

Блэз Паскаль

3—1243

Второе письмо

Париж,
6 ноября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма
Орлеан

Дорогой г-н Ферма!

Ни одно послание до сих пор не приносило мне такой радости, как Ваше письмо, отправленное Вами с г-ном Каркави. Я ждал возвращения г-на Каркави с огромным нетерпением, чтобы узнать от него, как Вы восприняли мое письмо от 28 октября. Я рассчитывал лишь на то, что от Вас он привезет мне только обещание вскоре ответить. Но то, что он передаст Ваш ответ, было сверх всяких ожиданий. Поэтому, несмотря на то что Ваше письмо и дает материал для размышлений на долгие месяцы, я отвечаю Вам без промедления, хотя и сознаю, что именно из-за этого мой ответ будет во многом несовершенным. Мне говорили, будто некоторые шахматисты при игре используют песочные часы для ограничения времени каждого из игроков на размышления. На мой взгляд, наша переписка похожа на такую шахматную партию, в которой я принимаю участие с огромной радостью, не жалея о том, что в этом соревновании Вы, без сомнения, выйдете победителем.

Итак, попытаюсь ответить на Ваши вопросы. Прав ли я в том, что могу это сделать так быстро, или ошибаюсь — судить Вам. Но все эти вопросы без исключения стояли передо мной и раньше, и именно это обстоятельство позволяет мне ответить на них без подготовки. Более того, когда я уже запечатал свое первое письмо, мне стало ясно, что на Ваши вопросы, особенно на второй вопрос, следовало бы, собственно, ответить в этом письме. Впрочем, со мной это вечная история: я только в самом конце письма понимаю, с чего мне следовало бы начинать. Но именно из-за того, что я уже привык по окончании работы быть недовольным началом, я ничего и не изменял в том письме к Вам. Ибо если бы я его переписал, то в конце вновь остался бы недоволен написанным.

Ответ на Ваш первый вопрос чрезвычайно прост, и я убежден, что он Вам хорошо известен; Вам, вероятно, хочется только выяснить, насколько основательно я продумал то, о чем писал. Ваш вопрос относится к тому, что в азартных играх, как я утверждал, вероятность некоторого события можно определить путем деления числа благоприятствующих событию исходов на число всех возможных, равновозможных и взаимно исключающих исходов. Вы абсолютно правы, когда пишете, что вместо «равновозможных» можно говорить о «равновероятных» исходах; оба эти выражения означают одно и то же. Вы спрашиваете, не идет ли здесь речь о *circulus vitiosus* (порочном круге), поскольку при определении вероятности мы опираемся на понятие «равновероятных событий» и, следовательно, само определение вероятности опирается на это понятие; это, разумеется, непозволительно и к тому же не менее абсурдно, чем если бы мы утверждали, что можно поднять самого себя, начав тянуть за волосы кверху.

В действительности же здесь нет никакой логической ошибки; дело в том, что на сей раз речь идет не об определении вероятности как понятия, а лишь о правиле для определения численного значения определенной вероятности.

По моему предложению, каждое случайное событие обладает определенной вероятностью, которая является числом, заключенным между нулем и единицей, и выражает степень неполноты уверенности в том, что рассматриваемое событие наступит. Вопрос о том, являются ли два события равновероятными или нет, может быть решен без знания численных значений их вероятностей. Когда я утверждаю, что игральная кость правильна, это означает, что если ее грани не будут пронумерованы, то они не могут быть распознаны (различены). Если же кто-либо в мое отсутствие изменит нумерацию граней, то после возвращения я не смогу этого заметить. Отсюда ясно, что игральная кость в результате броска с равными вероятностями падает на любую грань. Положение вещей здесь совершенно подобно тому, какое имеет место, когда хотят убедиться в равенстве длин двух отрезков без измерения их длин: их накладывают друг на друга, и если их конечные точки совпадают, значит, они равны. Точно так же с помощью рычажных весов можно решить вопрос о том, одинакова ли тяжесть двух предметов (т. е. имеют ли они равный вес), без измерения их веса.

Ответ на Ваш второй вопрос далеко не так прост. Вы спрашиваете, как можно для неправильной кости, центр тяжести которой не совпадает с геометрическим центром, определить вероятности появления каждой из граней. Этот вопрос, безобидный на первый взгляд, в действительности очень сложен, поскольку он затрагивает выяснение другого основополагающего вопроса, которым, собственно, мне следовало бы заняться еще в первом письме. Конечно, задай Вы этот вопрос моему другу, кавалеру де Мере, он заявил бы, что играет в кости только с джентльменами, в компании, где не принято играть неправильными костями, и если бы когда-нибудь выяснилось, что кость неправильная, то ее выбросили бы вместе с тем, кому она принадлежит. На это Вы с полным правом могли бы возразить: а откуда они узнали бы, что кость неправильная? Кавалер, по всей видимости, не нашел бы ничего иного, как сказать: играющий неправильной костью получал бы при бросках шестерку чаще, чем этого можно ожидать от правильной кости, поскольку именно в этом и состоит замысел тех, кто изготовляет неправильные кости.

Но если бы Вы затем, и вполне логично, спросили — надеюсь, Вы простите меня за то, что я делаю Вас главным действующим лицом диалога, — какого результата ожидал бы кавалер для правильной кости, то он ответил бы Вам, что при достаточно длительной игре грань с шестеркой должна выпадать приблизительно с такой же частотой, как и все другие грани, т. е. примерно в $^1/_6$ всех случаев. Тем самым кавалер, собственно, и ответил бы на Ваш первоначальный вопрос, хотя к этому и не стремился, а именно: если неправильная кость бросается N раз и шестерка при этом выпадет $x \cdot N$ раз (здесь x — некоторое число, больше $^1/_6$), то очевидно, что вероятность выпадения шестерки при бросании неправильной кости равна x.

Тут Вы снова могли бы задать каверзный вопрос: если кто-нибудь бросает неправильную кость 600 раз и при этом шестерка выпадает 150 раз, то можем ли мы быть уверены в том, что для этой кости вероятность выпадения шестерки равна $^{150}/_{600} = ^1/_4$? На это кавалер мог бы ответить таким образом (конечно, при условии, что он прочитал мое предыдущее письмо и использует введенные там понятия), что его ответ можно было бы счесть необоснованным заключением. Ведь если бы кость была правильной и тем самым вероятность шестерки равнялась бы $^1/_6$, то из 600 бросков шестерка выпадала бы не ровно 100 раз. Поэтому и в случае неправильной кости нельзя утверждать на основании результатов бросков, что вероятность выпадения шестерки равна в точности $^1/_4$, можно лишь говорить, что она близка к $^1/_4$. В таком случае Вы могли бы спросить: как же все-таки можно найти точное значение искомой вероятности? На это кавалер, как опытный игрок, наверняка ответил бы, что он не знает метода, с помощью которого можно было бы найти точное значение искомой вероятности. Но если полученное приближенное значение Вас не удовлетворяет (хотя проведенный эксперимент с несомненностью подтверждает, что кость неправильная и самое лучшее — выбросить ее поскорее), то Вы могли бы получить более точное приближение, увеличив число бросков, скажем, до 1200. Если, к примеру, в серии из 1200 бросков игральной кости шестерка появилась бы 288 раз, то для упомянутой вероятности Вы получили бы более надежное приближение $^{288}/_{1200}=0,24$. Быть может, кавалер к сказанному добавил бы еще (как я Вам уже писал, в последнее время он начал усиленно интересоваться философией), что, в то время как правильной игральная кость может быть только одним способом, неправильной она может быть в силу бесконечного множества причин, т. е. бесконечно большим числом способов.

Я не стану продолжать этот воображаемый диалог, поскольку Вы и без того знаете значительно больше, чем смогли бы узнать от кавалера де Мере. Вместо этого я попытаюсь ответить на Ваши вопросы своими собственными словами.

Ради краткости я хотел бы предпослать изложению одно определение. Предположим, что мы неоднократно проводим опыт в одних и тех же условиях; тогда число опытов, в которых произойдет определенное событие E, можно назвать *частотой* события E, а отношение частоты к числу всех опытов (при которых мы наблюдаем за появлением и непоявлением события E) — *относительной частотой E* в данном ряде опытов. Те, кто не раз играл в азартные игры, знают, что относительная частота любых событий при многократном повторении игр, вообще говоря, близка к вполне определенному числу; более того, отклонение относительной частоты от его вероятности тем меньше, чем дольше длится игра. Например, при игре в кости относительная частота появления шестерки при стократном бросании кости будет находиться вблизи $^1/_6$ (если кость правильная) или вблизи другого числа (если кость неправильная). Вероятность выпадения каждой из сторон неправильной кости можно приближенно определить — для этого имеется лишь единственный, только что описанный путь. В принципе на этом пути указанные вероятности можно определить с любой точностью; практически же, однако, эту точность нельзя увеличивать безгранично — во-первых, на это потребовалось бы очень много времени и, во-вторых, сама кость изнашивалась бы в процессе опытов. Но я думаю, что Вас по-настоящему интересует не точное значение вероятности того, что при бросании неправильной кости выпадет шестерка, в действительности Ваш вопрос значительно глубже: как можно вообще определить вероятность зависящего от случая события, если задача не может быть сведена к подсчету числа благоприятствующих, равновероятных и исключающих друг друга исходов испытания? Правила, применимые для правильной (но не для неправильной) кости, можно считать *основанными на симметрии,* поскольку они опираются на симметрию правильной кости. Пример кристаллов показывает, однако, что симметрия встречается и в природе, а не только в искусственно созданных человеком объектах. Тем не менее во многих естественных явлениях мы вообще не находим симметрии. Среди обточенных водой камешков, которые попадаются нам во время прогулки по берегу моря, едва ли удастся найти такой, который обладал бы сколько-нибудь правильной геометрической формой, например был бы шаром. Да и человека не назовешь вполне симметричным. Недавно я где-то прочел, что в Древнем Риме солдаты играли не правильными деревянными или сделанными из бивней слона костями (они назывались тессера и были распространены среди богатых людей), а использовали кости коленной чашечки овцы или козы, так называемые талус, или таксиллус. Эти косточки были известны еще древним грекам (там они назывались астраголос и употреблялись с той же целью). Вероятности возможных исходов для этих костей могут быть приближенно определены только эмпирически, путем наблюдения относительных частостей.

Хотя таксиллус имеет шесть граней, выпасть могут только четыре из них, поскольку две остальные выпуклые. Древние греки и римляне обычно бросали сразу четыре кости; наибольшую ценность имел тот бросок, когда каждая из них выпадала своей собственной, отличной от других стороной. Этот бросок называется *Венерой*. Недавно я достал две такие игральные косточки и провел с ними эксперимент. У одной из них частоты выпадения четырех граней при тысяче бросков оказались равными 408, 396, 91 и 105. Другую я подбросил только 100 раз, после чего она затерялась. Из этих 100 бросков частоты оказались равными 38, 43, 11 и 8. Обозначим два наиболее вероятных положения таксиллуса через A и B, а два менее вероятных — через C и D. Предположим ради простоты, что положения A и B таксиллуса имеют равные вероятности — по $^4/_{10}$, а положения C и D — по $^1/_{10}$. Согласно моему эксперименту, это предположение близко к истине. Тогда, как Вы также можете легко подсчитать, при бросании четырех таксиллусов вероятность появления Венеры равна $^{24}/_{625}$. Согласно упомянутой в моем первом письме теореме умножения вероятностей, прежде всего перемножим все эти четыре вероятности: $^4/_{10} \cdot {}^4/_{10} \cdot {}^1/_{10} \cdot {}^1/_{10} = {}^1/_{\cancel{650}}$ 625. Но это вероятность того, что грани A, B, C, D появятся на определенным образом упорядоченных костях. Четыре же таксиллуса можно упорядочить 24 различными способами. На основании теоремы сложения вероятность появления Венеры равна $^{24}/_{625}$, т. е. немного меньше $^1/_{25}$. Отсюда понятно, почему римляне радовались появлению Венеры.

Косточки таксиллус, конечно, не вполне одинаковы, и поэтому возможно, что для них вероятность выпасть стороной A не одна и та же для разных таксиллусов, и для одного экземпляра равна $^4/_{10}$, для другого $^{38}/_{100}$ и т. д. Но если выбран определенный таксиллус, то для него вероятность выпадения грани A является вполне определенным числом. Относительная частота выпадения грани A определенной кости таксиллус сама зависит от случая, и поэтому невозможно предвидеть ее значение; известно только, что она будет близка к вероятности. Если, например, 100 раз подбросить таксиллус, для которого вероятность появления A равна $^4/_{10}$, то это отнюдь не означает, что грань A выпадет в 40 случаях; это число может быть 38 или 41, 44 или 36 и т. д. Если же провести серии по 100 бросков, то, вообще говоря, относительная частота в различных сериях будет различна, но она почти всегда будет находиться вблизи от вероятности, т. е. равна примерно $^4/_{10}$. Таким образом, вероятность есть та неподвижная точка, вокруг которой случайным, непредсказуемым образом колеблется относительная частота, но в своих капризных изменениях она, как правило, будет отклоняться от вероятности лишь незначительно. Если число наблюдений увеличивается, то отклонения частоты от ожидаемой величины (т. е. от произведения вероятности на число наблюдений) также увеличиваются, но отклонения относительной частоты от вероятности, как правило, будут уменьшаться. Например, если мы бросим таксиллус 400 раз, то действительное число выпадений грани C редко будет отклоняться от ожидаемого, т. е. от $^1/_{10}\cdot 400=40$, больше чем на 12. Но если мы проведем серию из 1000 бросков, то частота выпадения грани C будет отклоняться от ожидаемого значения, т. е. от $1000\cdot{}^1/_{10}=100$, на 12 или даже на бо́льшую величину достаточно часто, но очень редко будет превосходить 20. Это означает, что, в то время как при 400 бросках относительная частота появления грани C будет находиться между $^7/_{100}$ и $^{13}/_{100}$, в случае 1000 бросков она в подавляющем большинстве случаев будет находиться между $^8/_{100}$ и $^{12}/_{100}$.

В то время как вероятность некоторого случайного события является вполне определенным числом (хотя, возможно, и не известным нам точно), которое не зависит от случая, частота того же случайного события является числом неопределенным, зависящим от случая. Точное его значение предвидеть невозможно, его можно определить только экспериментальным путем. Но мы не должны забывать, что это значение могло бы быть и иным, и если мы повторим эксперимент, то следует помнить, что мы встретимся с совсем другим числом. Если вероятность нам известна (например, в силу соображений симметрии либо благодаря использованию правил сложения и умножения или других аналогичных правил), то значение относительной частоты мы можем предвидеть с большей или меньшей точностью. С другой стороны, на основании наблюдений за относительной частотой мы можем сделать заключение о приближенном значении вероятности (если она нам неизвестна). Оба эти способа заключений существуют, но природа их совершенно различна. Первый способ по своему характеру подобен вычислению массы предмета по известной плотности и известному объему, тогда как второй — вычислению неизвестной плотности вещества по измеряемым массе и объему предметов из этого вещества. Впрочем, если мы произведем такого рода расчеты с различными предметами из того же вещества, то для плотности получим не точно совпадающие, а только близкие друг к другу значения, поскольку измерение связано с ошибками.

Зависимость вероятности от относительной частоты примерно такая же, как отношение точного и полученного в результате измерений значения плотности. Следовательно, наблюдение относительной частоты можно рассматривать как способ измерения вероятности. Это измерение позволяет получить только неточное значение (как, впрочем, и любое другое измерение), но неточность измерения можно произвольно уменьшить за счет увеличения числа наблюдений. Правда, встав на этот путь, нельзя получить абсолютно точного значения вероятности. Монтень однажды утверждал [15], что «факты не дают полной уверенности, потому что сами они всегда изменчивы». Эти слова Монтеня я бы дополнил так: факты не дают с полной достоверностью определить даже степень уверенности. Значит, на практике нам следует довольствоваться лишь частичным знанием неполной уверенности. Это равносильно тому, как если бы Вы получили только часть моего письма, поскольку остальная часть его была потеряна при передаче, да и эту часть смогли бы прочесть не полностью, так как почтальон уронил ее в воду и поэтому строки расплылись. Я искренне надеюсь, что настоящее письмо такая судьба не постигнет; что же касается документов прошлого, то они почти неизбежно теряются таким или подобным образом. Тем не менее историческая наука даже по неполным документам пытается восстановить картину давно прошедшего, но наши представления об отзвучавших временах по необходимости в известной мере гипотетичны, хотя большинство историков не желает признать это с полной искренностью.

Резюмируя сказанное, мы можем заключить, что отношение частоты некоторого события к числу наблюдений приблизительно такое же, как отношение вероятности этого события к вероятности достоверного события, т. е. к единице. Это соответствие между фактами и логикой, между возможностью и осуществимостью я нахожу поистине замечательным!

Оба упомянутых вида заключений можно применять также попеременно: из наблюдений частоты мы можем делать заключения о значении определенной вероятности, а из полученных таким образом вероятностей вычислять другие, пользуясь правилами вычисления вероятностей, и, наконец, отсюда извлекать сведения о возможности появления событий в будущем. Так, из наблюдений и размышлений, которые взаимно дополняют друг друга, появляется возможность познавать мир. Я не строю иллюзий, будто мне первому выпала честь осмыслить это явление; я убежден, что оно было известно еще Платону. Недавно я перечитал «Тимея» и нашел там следующее замечательное положение [16]: «Как возникновение относится к бытию, так размышление относится к истине». Помоему, этим таинственно звучащим высказыванием Платон хотел выразить ту же мысль, о которой только что шла речь. Мое убеждение подтверждается тем, что непосредственно за процитированной фразой Тимей говорит о вещах, которые не достоверны, а только вероятны. Мне кажется, что в Древней Греции были и другие философы, например Карнидес, которые понимали, что́ хотел сказать Платон, однако со временем истинный смысл этого несколько неясного высказывания забылся. Когда же на днях мне удалось обнаружить это место в «Тимее», я почувствовал себя сродни тем, кто из глубин земли выкопал прекрасную греческую статую и, очистив ее от грязи, увидел, как мрамор засиял в первозданном блеске.

От моей свечи остался лишь небольшой огарок; отсюда я делаю вывод, что ответ на Ваш второй вопрос потребовал от меня много времени. Ваш третий вопрос проще, хотя он, подобно факелу, освещает некоторые оставшиеся в тени части нашей проблемы. Но надеюсь, Вы простите меня за то, что ответ на него я оставляю на будущее, ибо завтра утром мне предстоит встретиться с одним надежным лицом, которое завтра же отправляется в Орлеан — где, как я слышал, Вы сейчас находитесь у г-на Каркаби,— и передаст Вам это письмо.

Мне бы очень хотелось, чтобы Вы получили его как можно скорее и смогли убедиться, что семена, посеянные Вами, не только взошли, но и успели уже принести плоды. От души надеюсь, что эти плоды моих размышлений, хотя они еще не вполне зрелы, Вы все же найдете съедобными. Дабы они не показались Вам очень терпкими, посылаю Вам еще корзину яблок из моего сада. Вряд ли эти яблоки лучше тех, что произрастают в Тулузе, но, возможно, этот скромный дар поможет мне убедить Вас в том, что у Вас нет более искреннего единомышленника и горячего почитателя, чем

Блэз Паскаль

Третье письмо

Париж
8 ноября 1654 года,
на рассвете
Г-ну Пьеру Ферма
Орлеан

Дорогой г-н Ферма!

Прошедшей ночью меня мучили кошмары и я проснулся весь в поту и с сильным сердцебиением. Чтобы отвлечься, я решил ответить на Ваш третий вопрос, а именно показать, при каких условиях верна теорема умножения вероятностей. Вы, в частности, отметили, что если из колоды дважды подряд вытянуть по одной карте, то теорема умножения вероятностей окажется верной лишь в том случае, когда, прежде чем вторично вынуть карту, мы возвращаем в колоду вынутую первоначально и всю колоду хорошенько тасуем. Если же не возвратить карту, теорема перестанет быть верной.

Рассмотрим, например, колоду, состоящую из 16 карт и содержащую по четыре карты — туз, король, дама и валет — каждой масти (пики, черви, трефы и бубны). Тогда вероятность того, что сначала мы вытянем короля, составит $^1/_4$. Если перед тем, как вновь тянуть, мы возвращаем вынутую карту в колоду, то и на сей раз вероятность вытянуть короля окажется равной $^1/_4$. Если же после первого раза мы не возвращаем вынутую карту, то вероятность вытянуть короля как в первый, так и во второй раз уже будет равна не $^1/_4 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_{16}$, а только $^1/_{20}$, ибо двух королей при этом мы можем извлечь только $4 \cdot 3 = 12$ различными способами (тогда как число всех возможных способов составит $16 \cdot 15 = 240$). На первый взгляд этот пример противоречит теореме умножения, о которой я писал Вам в письме от 28 октября; но это противоречие кажущееся. Стоит нам подробнее изучить приведенный пример, и мы увидим, что теорема умножения верна и здесь.

Действительно, если после первого извлечения мы не возвращаем вынутую карту в колоду и при этом вынутым оказался король, то при втором извлечении в колоде остаются уже 15 карт и среди них лишь три короля. Тем самым вероятность извлечения короля во второй раз оказывается равной $^3/_{15}$, т. е. $^1/_5$. Но тогда, согласно теореме умножения, искомая вероятность составит $^1/_4 \cdot {}^1/_5 = {}^1/_{20}$, как и следовало ожидать. Если же предположить, что в первый раз из колоды вынут не король (и карта обратно не возвращена), то вероятность извлечения короля во второй раз будет равна $^4/_{15}$. Итак, вероятность того, что в первый раз мы вытянем не короля, а во второй — короля, согласно теореме умножения, равна $^3/_4 \cdot {}^4/_{15} = {}^1/_5$. Вероятность же того, что во второй раз мы вытянем короля, независимо от результата первого извлечения составляет $^1/_{20} + {}^1/_5 = {}^1/_4$, т. е. она столь же велика, как если бы после первого раза мы вновь положили вытянутую карту в колоду. Однако это верно лишь до тех пор, пока нам не становится известным результат первого извлечения. Если же он стал нам известен, то положение изменяется, и теперь если первая извлеченная карта оказалась королем, то вероятность извлечения короля во второй раз оказывается равной только $^1/_5$ (т. е. меньше $^1/_4$). И наоборот, когда при первом извлечении вынут не король, вероятность того, что во второй раз мы вытянем короля, оказывается равной уже $^4/_{15}$ (т. е. больше $^1/_4$). Естественно, напрашивается вопрос: меняется ли вероятность от того, что́ мы узнаем о вынутой карте? Ведь карта не может знать о том, что́ я подсмотрел, что́ появилось! Другими словами, как может мое знание повлиять на вероятность результата второго извлечения, ведь она зависит не от меня, а только от состава колоды? Это действительно так, но если я подсмотрю, какая карта вытянута в первый раз, то с полной достоверностью буду знать, какой из 16 карт нет среди оставшихся 15! К тому же отсутствие этой карты влияет и на упомянутую вероятность, ибо от этого зависит, сколько королей — четыре или только три — находится среди оставшихся карт. Собственно говоря, нас смущает то обстоятельство, что я подсмотрел вытянутую карту; на самом-то деле речь идет не о том, увидел ли я, какая это карта, а лишь о том, сохранились ли среди 15 карт все четыре короля. Следовательно, важно не то, что нам становится известна извлеченная карта, а то, оказалась ли вынутая при первом извлечении карта королем. Поскольку нас интересует лишь вторая карта, которую мы извлекаем из колоды, при вычислении вероятности того, что она окажется королем, мы должны учитывать обе возможности первого извлечения (т. е. был вынут король или же король не был вынут) и образовать *взвешенное среднее значение* условных вероятностей $^1/_5$ и $^4/_{15}$ с вероятностями обоих возможных результатов первого извлечения (т. е. $^1/_4$ и $^3/_4$ как их весами). Таким образом, в действительности получаем $^1/_4 \cdot {}^1/_5 + {}^3/_4 \cdot {}^4/_{15} = {}^1/_4$.

Приведенный пример показывает, сколь большой осмотрительности требует обсуждение этих на первый взгляд простых вопросов; почти на каждом шагу нас подстерегают засады. Но об этом мне хотелось бы написать Вам в другой раз. Что же касается теоремы умножения, то общая и корректная формулировка ее сводится к следующему: вероятность того, что события A и B осуществятся, равна произведению вероятности события A на вероятность события B, причем последняя вероятность вычисляется при условии, что событие A осуществилось. Это последнее значение я называю *условной вероятностью* B при условии A.

По-моему, я ввел новое понятие — условную вероятность. Но в принципе оно не отличается от понятия *вероятность.* В самом деле, вероятность любого события зависит от некоторых условий, при которых рассматривается его наступление или ненаступление. Когда мы утверждаем, что вероятность выпадения шестерки при бросании игральной кости равна $^1/_6$, мы заранее предполагаем, что кость правильная. Когда мы говорим, что вероятность извлечения короля из протянутой нам колоды карт равна $^1/_4$, мы исходим из того, что в колоде 16 карт, среди них четыре короля и сами карты хорошо перетасованы. Если условия изменились, то меняется и вероятность. Если условия вполне определенные и не изменяются, то о них просто не упоминают. Введение понятия условной вероятности по сути является плеоназмом, подобным выражению «смертный человек», ибо всем известно, что человек смертен. Но во избежание недоразумений все же целесообразно говорить об условных вероятностях в тех случаях, когда условия изменяются, а не заданы навечно.

Может случиться, что вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, равна вероятности события B без дополнительного условия. В этом случае вполне обоснованно называть события A и B *независимыми* событиями; при этом вероятность события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B.

В том случае, когда события A и B независимы, теорему умножения вероятностей можно сформулировать, не прибегая к понятию условной вероятности. При этом мы можем прямо утверждать: вероятность того, что наступят оба события A и B, равна произведению вероятностей каждого из этих событий в отдельности. Это произойдет, если события A и B, например, касаются выпадения числа очков (на разных костях). При этом события A и B независимы, поскольку кости не могут оказывать влияние друг на друга. Если же кости как-то связаны между собой, например посредством нити, то оба события уже не являются независимыми.

Два события могут быть независимыми не только тогда, когда невозможно представить себе, каким образом наступление шансов, благоприятствующих одному из них, может повлиять на другое. Для примера обозначим через A событие, которое заключается в том, что при извлечении наугад карты из колоды мы вынем карту масти пик, а через B — что извлеченная карта окажется королем. В этом случае оба события относятся к одному и тому же явлению и все же они не зависят друг от друга. Действительно, среди 16 карт имеются четыре короля, среди четырех карт масти пик имеется один король. Далее, среди 12 оставшихся карт имеются три короля; таким образом, вероятность события B равна $^1/_4$ — как в том случае, когда событие A наступило, так и в том, когда оно не наступило, а также тогда, когда событие A вообще не принимается во внимание.

8 ноября, вечером

Перечитав написанное мной на рассвете, я пришел к выводу, что мой ответ вызывает новые вопросы. В самом деле, что же, собственно говоря, означает утверждение, что колода карт «тщательно перетасована»? Если бы мы спросили об этом опытного игрока, например кавалера де Мере, то он, очевидно, ответил бы, что это означает следующее: один из играющих достаточно долго тасует колоду, не делая при этом попыток обмануть других; иными словами, он, подражая опытным игрокам, поручает случаю порядок расположения карт в колоде и не пытается оказать на него влияние. Но я пошел бы дальше и спросил: можно ли только по порядку расположения карт (не зная, как именно они тасовались) установить, хорошо ли перетасованы карты? На первый взгляд этот вопрос кажется вполне безобидным, и мне чрезвычайно любопытно, что ответил бы на него кавалер де Мере. Если бы он и в самом деле ответил так, как я представляю себе, то мне хотелось бы спросить его, какова, по его мнению, вероятность того, что после тщательного тасования карт дама червей будет лежать сверху. По-видимому, он ответит, что после хорошего тасования у каждой из 16 карт будет одна и та же вероятность оказаться сверху, т. е. вероятность эта составит $^1/_{16}$. Хорошо, продолжил бы я, если дама червей окажется сверху, то какова вероятность, что следующая за ней карта окажется тузом пик (или любой другой из оставшихся карт)? Очевидно, что $^1/_{15}$, ответил бы на это кавалер.

Все эти соображения позволяют нам заключить, что при тщательном тасовании вероятности каждого из возможных порядков расположения карт должны быть одинаковы. Но как же в таком случае только на основании изучения порядка расположения карт можно решить, насколько хорошо перетасована колода — ведь появление одного порядка столь же вероятно, как и появление любого другого? А если на основании рассмотрения порядка нельзя решить, что колода карт хорошо перетасована, то имеет ли само это выражение какой-нибудь определенный смысл? На это де Мере ответил бы, что, конечно, результаты одного-единственного тасования еще не позволяют установить, обманывает ли тасующий; но если он слишком часто, чаще, чем этого следовало бы ожидать, сдает себе хорошие карты, то можно не сомневаться, что мы имеем дело с плутом. После этого я спросил бы кавалера: если игрок тщательно тасует карты, то, как он полагает, каждый возможный порядок их расположения наступает приблизительно одинаково часто? Если бы его ответ был утвердительным, то он и на сей раз угодил бы в ловушку. Ведь число всех возможных расположений карт равно произведению всех целых чисел от 1 до 16, а это число столь велико, что если бы играющая в карты компания занималась этим и день и ночь без перерыва и ежеминутно тасовала бы колоду, то потребовалось бы около 39 миллионов лет, чтобы мог появиться каждый возможный порядок! * Таким образом, следуя по этому пути, невозможно практически проверить качество тасования. Недавно я придумал незамысловатое устройство для тасования карт: карты соскальзывают по наклонной плоскости и попадают в коробку, которую часовой механизм тащит наверх и затем высыпает на другую наклонную плоскость. Процесс повторяется последовательно много раз. Возможно, что это устройство и способно производить за минуту 10 тасований, но и ему понадобилось бы проработать около 4 миллионов лет, прежде чем могли бы появиться все возможные расположения карт. Когда же я подсчитал возможное число порядков расположения карт в колоде из 52 карт, у меня чуть было не началось головокружение.

Но не будем пока касаться щекотливого вопроса о тщательности тасования карт и предположим, что для этого имеется надежная машина (или опытный и честный игрок), которая (который) с одной и той же вероятностью получает каждый возможный порядок расположения карт. Машина (игрок) тасует колоду из 16 карт, и в результате осуществляется определенный порядок — один из более чем двадцати тысяч миллиардов. Вы только подумайте, что то означает: мы может стать свидетелями события, вероятность которого меньше 0,00000000000005, т. е. равна единице, деленной на двадцать миллиардов! До сих пор мне казалось, что событие, которое имеет очень малую вероятность, скажем всего одну миллиардную, практически невозможно. Однако, как показывает пример тасования карт, с подобными выводами не следует торопиться. Итак, мы должны поставить следующий вопрос: в каком же все-таки смысле верно, что наступление событий малой вероятности можно принимать почти исключенным, в то время как наступление событий с вероятностью, близкой к единице, можно принимать практически достоверным? По-моему, этот вопрос не так труден, каким кажется на первый взгляд. Ведь если я заранее указываю порядок, в котором должны расположиться карты, а *затем* тасую колоду, то

---

* Как убедится читатель, расчеты Паскаля очень просты:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{365 \cdot 24 \cdot 60} \approx 39\,000\,000.$$

появление именно этого порядка практически исключено, хотя он не менее вероятен, чем любой другой, в том числе и тот, который в действительности осуществится.

В свое время, когда я только-только начал размышлять о вероятности, все казалось мне простым и ясным, и лишь теперь я постигаю всю глубину своего заблуждения. Всякий раз, когда мне кажется, что я нашел истину, она ускользает из моих рук. Почти на каждом шагу подстерегают нас здесь ловушки. Возможно, все это и отразилось на моем сне, который так мучил меня прошедшей ночью. Мне снилось, будто я нахожусь в пещере и в непроглядной тьме пытаюсь отыскать выход. Я старался двигаться в том направлении, откуда, как мне казалось, пробивается свет. Но путь преграждала огромная скала. После многих попыток мне, наконец, удалось ее обойти, и я увидел отверстие, которое, видимо, служило выходом из пещеры, ибо там проглядывал свет. Я выпрямился и направился было к отверстию, но едва шагнул, как кто-то невидимый схватил меня за плечо и толкнул назад. Видно, задел плечом нависший кусок камня, подумал я (ведь я знал, что, кроме меня, в пещере никого нет). Поднявшись, я вновь направился к выходу. На сей раз я был осторожнее и, цепляясь за стену, внимательно смотрел перед собой. То, что открылось моему взору, заставило меня отшатнуться: прямо передо мной зияла какая-то дыра. Если бы не тот толчок, я непременно свалился бы в нее. На первых порах я даже не осознал в полной мере, какой опасности избежал. Любопытства ради я бросил в дыру камень и начал равномерно считать, чтобы, услышав удар камня о дно, установить глубину. Когда я досчитал до 5 и все еще не слышал удара камня, до меня впервые дошло мое положение; весь дрожа, я досчитал до 10, затем до 20 и все еще не слышал стука камня о дно. Объятый ужасом, я тщетно считал дальше, пока меня не сморил сон.

Думаю, после всего сказанного Вы поймете, почему, проснувшись, я не делал попыток заснуть вновь и, стремясь избавиться от удручающих впечатлений сна, на рассвете принялся за настоящее письмо.

Сейчас я уже могу спокойно размышлять о странном сне, но все еще не представляю, как объяснить его. Возможно, его первопричиной послужила моя упорная борьба с все ускользающим от меня понятием вероятности. Недаром же об этом некогда писал Лукреций:

> Если же кто-нибудь занят каким-либо делом прилежно,
> Иль отдавалися мы чему-нибудь долгое время
> И увлекало наш ум постоянно занятие это,
> То и во сне представляется нам, что мы делаем то же [17].

А возможно, мой сон значит совсем другое. В чем же состоит опасность, которая подстерегала меня, чья таинственная рука удержала меня от гибели? И вообще откуда берутся наши сны и следует ли придавать им какое-нибудь значение? Здравый смысл подсказывает мне, что отдыхающий во сне мозг неосознанно смешивает самые различные представления, подобно тому как игрок, тасуя карты, придает им случайный порядок. Не удивительно, что во сне эти представления возникают в произвольном порядке и в их появлении вовсе не следует искать каких-либо особых причин или таинственных знаков, равно как и в случайном расположении карт после тасования. Понятие случайного на протяжении тысячелетий окружалось суеверными представлениями, и, видимо, именно это удерживало людей от попыток сделать случайные явления предметом научных исследований. Что же касается меня, то я уверен, что мне удалось освободиться от парализующих цепей ужасных суеверий, но в объяснении моего сна никакие логические аргументы не позволяют мне освободиться от гнетущего чувства, что он все-таки должен что-то означать.

Простите, что помимо всего прочего я докучаю Вам еще и описанием моих сновидений. Меня самого это несколько стесняет, но все же я испытываю большое облегчение от того, что смог поделиться с Вами размышлениями относительно причин этого кошмарного сна. Надеюсь, что Вы, столь хорошо понимающий мои мысли, вникните в их суть и поймете мое напряженное душевное состояние. И если кого-нибудь иного, с кем меня не связывает такое тесное душевное родство, такая исповедь, пожалуй, и испугала бы, то для Вас эта откровенность будет дополнительным залогом нашей дружбы, и Вы еще раз воспримете из этого письма, что Вашим самым искренним другом, самым горячим почитателем остается

Блэз Паскаль

Четвертое письмо

Париж,
19 ноября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма
Тулуза

Дорогой г-н Ферма!

В письме, которое Вы послали мне 12 ноября из Орлеана, в силу присущей Вам скромности Вы заявили, будто Вам не известны ответы на те вопросы, которые были поставлены Вами в предыдущем письме. Не сочтите за обиду, но я по-прежнему убежден, что мои ответы не явились для Вас неожиданностью. И так как я верю, что Вы заранее ответили на все предложенные Вами вопросы, то я особенно рад тому обстоятельству, что, как можно судить по Вашему письму, Вы в основном соглашаетесь с моим ответом.

Что же касается новых вопросов, которые Вы поставили в последнем письме, то я склоняюсь к тому, что вопросы эти далеко не риторические. К тому же они настолько связаны с основными философскими проблемами, что, по моему глубокому убеждению, к ним во все эпохи будут возвращаться мыслители. Так как человечество постоянно накапливает знания, ответы на эти вопросы будут становиться все более полными, но ни один из них не будет в состоянии дать исчерпывающее решение. Ваша несомненная заслуга в том, что Вам первому удалось сформулировать эти вопросы с такой неподражаемой ясностью. Если бы, скажем, лет через триста мне удалось воскреснуть и я увидел бы, что математики, естествоиспытатели и философы все еще спорят по этому поводу, меня бы это нисколько не удивило. Не удивился бы я и тому, что появилось множество весьма туманных суждений. Поскольку в данном случае речь идет о принципе неопределенности, мы вправе ожидать, что люди поверхностные отнесутся к этому как к области, где отнюдь не обязательно стремиться к совершенной чистоте мышления. Меня ничуть не удивило бы и отношение людей, питающих отвращение к математическому методу мышления: они полагают, что, поскольку случайные явления все равно нельзя предвидеть (а если можно, то лишь в самых общих чертах), при их математическом толковании можно допускать определенную небрежность и пользоваться непродуманными и недостаточно аргументированными понятиями. В действительности же дело обстоит как раз наоборот. Все хозяйки хорошо знают, что для свежего хлеба требуется более острый нож, чем для черствого. По сути мы ведем речь о том же самом. В любом научном исследовании, для того чтобы приблизиться к истине, необходимо оперировать отточенными логическими суждениями и кристально чистой аргументацией, осторожно продвигаться вперед и проверять каждый свой шаг. И это особенно важно именно при изучении случайных явлений.

В силу только что сказанного Вы вряд ли будете удивлены, обнаружив, что я не беру на себя смелость дать окончательные и полные во всех отношениях ответы на Ваши вопросы. Более того, я спешу поделиться с Вами теми мыслями, которые будят во мне Ваши вопросы; одно это способно доказать Вам, до какой степени меня интересует то, о чем Вы мне писали, причем делаю я это тем охотнее, что Ваши вопросы не явились для меня полной неожиданностью. Хотя я и не сумел так четко и сжато их сформулировать, как Вы, все же должен признаться, что эти проблемы увлекают меня уже довольно давно.

Некоторое время назад в салоне мадам д'Эгийон я беседовал о них с моим давним другом Дамьеном Митоном; он присутствовал и при том, когда кавалер де Мере ставил мне свои вопросы об игре в кости. С тех пор г-н Митон, естественно, интересуется этими вещами и частенько расспрашивает меня о том, чего я достиг в изучении математики вероятностей. Вы, очевидно, знаете, что г-н Митон очень образованный человек, он интересуется не только литературой (причем является знающим, дельным и выдающимся ее деятелем), но и наукой, и острота его ума подобна лезвию бритвы. Однако при этом он обладает свойством, которое нередко заставляет меня с ним спорить: обо всем у него совершенно определенное суждение, даже о том, что он слышит впервые. Эта его самоуверенность меня раздражает, и я по мере сил пытаюсь доказать ему, что его мнение опрометчиво. Чтобы Вы могли составить представление об этом человеке, позвольте привести следующий пример. Если во время спора мне удается загнать г-на Митона в угол, то он заканчивает спор весьма своеобразно: в таких случаях он обычно говорит, что признает возможность вполне серьезного обоснования мнения, отличного от его собственного и даже противоположного ему, и потому не желает убеждать меня в истине собственного суждения, а также с готовностью признает, что я имею право высказывать личное мнение, но именно поэтому он просит, чтобы я не навязывал ему своего. Его любимое выражение: «Одни предпочитают блондинок, другие брюнеток». Обычно он добавляет, что в этом вопросе он лишен предрассудков. На этом дискуссия чаще всего заканчивается и разговор переходит на тему о красивых женщинах. (В этой области у меня нет оснований сомневаться в обстоятельности знаний и обоснованности суждений г-на Митона.)

После всего сказанного, я думаю, Вы уже можете судить, каков г-н Митон вместе со всеми его добродетелями и недостатками. История учит, что люди, которые — как и он — верят в то, что каждый имеет право на собственное мнение и никто не смеет пытаться ограничивать других в этой свободе, приносили человечеству все же намного меньше бед, чем те, кто истину — действительную или мнимую — огнем и мечом, инквизицией и костром стремился навязать другим. В свете исторических событий я не удивляюсь тому, что многие люди думают так же, как Митон. Что же касается науки, то для нее свобода мышления подобна живительному воздуху, без которого она задохнется. Впрочем, и здесь я не могу во всем согласиться с Митоном: в науке свобода мышления не должна распространяться столь далеко, чтобы пренебрегать фактами. Если же суждения людей противоречат фактам или попросту бессмысленны, поскольку они противоречивы сами по себе и алогичны, то высказывать такие суждения по меньшей мере глупо. Но если бы в научных спорах мы отказались от стремления убеждать других в правоте своего мнения, основываясь лишь на фактах и логике, то остановилось бы само развитие науки. Естественно, что я имею в виду лишь аргументированные убеждения, а не насильственное навязывание своего мнения другим или же подавление оригинальной мысли.

Теперь мне хотелось бы перейти к изложению беседы с г-ном Митоном о вероятности, содержание которой я записал в тот же вечер. Разумеется, запись эта не дословна, ибо в письменном виде мне удалось сформулировать собственные мысли гораздо яснее, нежели, высказанные сгоряча, они звучали в жарком споре. Понятно, что я не устоял перед искушением записать сказанное в этом уже несколько перебродившем виде. Но справедливость требовала, чтобы и слова г-на Митона подверглись огранке, что я и сделал. И хотя запись нашей беседы не столь точна, как судебный протокол, я надеюсь, что в таком виде мне удалось лучше передать суть нашего спора, чем если бы я дословно записал всю беседу.

В самом начале беседы на вопрос г-на Митона о том, чего я достиг в исследовании математических закономерностей случайного, я вкратце изложил содержание моих писем к Вам. Я определил вероятность как степень уверенности и при этом подчеркнул, что, собственно говоря, любая вероятность является условной и ее значение изменяется с изменением условий. Я указал, что относительная частота события колеблется около его вероятности как центра колебаний по капризам случая. Конечно, продолжал я, это верно лишь в том случае, когда наступление или ненаступление события наблюдается в последовательности попыток, осуществленных в одинаковых обстоятельствах, независимых друг от друга и не оказывающих никакого взаимного влияния. При этом я сослался на следующий пример. Упомянутое правило справедливо, если из урны, содержащей черные и белые шары в заданной пропорции, мы последовательно вынимаем шар и после каждого извлечения возвращаем вынутый шар обратно, а затем хорошенько встряхиваем урну и тем самым восстанавливаем положение, в котором урна находилась перед предыдущим извлечением. Именно к этому примеру и относилось первое замечание Митона.

Митон

Г-н Паскаль, мне понятно воодушевление, которое Вы испытываете в связи с тем, что Вам первому удалось сформулировать этот интересный закон. Однако, как мне кажется, круг его применимости весьма узок: за исключением лотерей и азартных игр (которые, кстати, интересуют и меня, но не в такой степени, как нашего общего друга кавалера де Мере), мне трудно представить себе ситуацию, в которой выполнялись бы условия этой теоремы. Вы, г-н Паскаль, очевидно, знаете, что я частенько бываю на скачках [18] не с целью выиграть деньги (к счастью, в этом я не нуждаюсь), а ради хорошего общества.

Но коль скоро я попадаю на скачки, я с интересом слежу за соревнованием и из собственного опыта знаю, что невозможно предсказать, какая лошадь выиграет заезд, если придерживаться тех же правил, как и при бросании игральной кости, хотя и здесь речь идет о случайности. На скачках Ваш закон неприменим; ведь если бы в них неоднократно принимали участие одни и те же лошади и наездники (чего никогда не бывает), то у лошадей были бы различные шансы, ибо как раз здесь очень многое зависит от состояния и лошадей и наездников. Часто случается, что какая-нибудь лошадь спотыкается и падает, или же у нее подвертывается нога, или же получает травму всадник. И если даже к следующим соревнованиям они обретают форму, все равно для них происшедшее не проходит бесследно.

П а с к а л ь

Правильность закона не нарушается от того, что в некоторых случаях его предположения не выполнены и потому он неприменим. Он сомнителен лишь в тех случаях, когда его выводы в каком-то примере оказались ошибочными, хотя условия его применимости и были выполнены. Однако Вы правы, утверждая, что существуют случайные события, наступление которых можно наблюдать лишь раз, поскольку наблюдать их в подобных же условиях более невозможно. Такие случайные события я называю *однократными случайными событиями.*

М и т о н

Значит, при таких однократных случайных событиях нельзя определить вероятность эмпирическим путем, т. е. посредством наблюдения относительной частоты?

П а с к а л ь

Вы правы. Ведь при этом мы можем провести только одно наблюдение, следовательно, значение относительной частоты может быть только 0 или 1.

М и т о н

Что же означает тогда для таких однократных случайных событий утверждение, что их вероятность равна некоему определенному числу, например $^1/_2$?

П а с к а л ь

Смысл этого утверждения тот же, что и в случае событий, которые можно наблюдать сколько угодно раз. Вспомните, например, широко распространенный обычай, когда двое детей тянут, каждый за свой конец, косточку из грудки цыпленка, имеющую вид вилки, до тех пор пока она не сломается. При этом каждый загадывает желание; считается, что тот, у кого кончик косточки не сломается, осуществит свое желание. Но так как упомянутая косточка симметрична, то разумно утверждать, что оба ребенка могут выиграть с вероятностью $1/2$ вопреки тому, что сломать данную кость можно только раз.

Митон.

В этом примере мы и в самом деле можем говорить о правильности Вашего закона, ибо если неоднократно наблюдать, как ломаются такие косточки, то нетрудно убедиться, что приблизительно в половине случаев выигрывает как тот ребенок, который держит левую, так и тот, который держит правую часть косточки. Не так обстоит дело со скачками. В этом случае дилемма неразрешима. Впрочем, я согласен с Вами в одном: и в случае скачек можно утверждать, что одна из лошадей выиграет с некоторой вероятностью, скажем с вероятностью $1/2$. В самом деле, зрители на скачках имеют об этом достаточно определенное мнение и именно поэтому заключают пари об исходе скачек. Однако я замечал, что обычно мнения людей сильно расходятся в зависимости от той информации, которой они располагают о лошадях. На основании приведенного примера я заключаю, что люди по-разному оценивают вероятность одного и того же события, и я не вижу оснований, позволяющих судить, кто же из них прав. Тот, чья лошадь приходит к цели первой, тем самым еще не доказывает свою правоту или правоту тех, кто ставил на эту лошадь: верно лишь, что им повезло. Конечно, когда речь заходит об азартных играх, все знатоки придерживаются единого мнения, но ведь так бывает лишь в исключительных случаях. Вы, г-н Паскаль, определили вероятность события как степень уверенности в его наступлении. Мне кажется целесообразным изменить это определение так: вероятность данного случайного события для каждого человека имеет свое значение, поскольку она выражает степень его уверенности в наступлении данного события.

Я полагаю, что о вероятности случайного события можно говорить так же, как о красоте стихов, картин или женщин; о вкусах не спорят. Вкусы различны, и поэтому люди по-разному судят о шансах случайных событий.

Паскаль

В этом я не могу с Вами согласиться; я считаю, что вероятность случайного события не зависит от нашего суждения о ней, она представляет собой некое число, значение которого разными лицами оценивается по-разному. Если кто-либо на скачках посоветует мне поставить на определенную лошадь и эта лошадь и в самом деле выиграет, то это вовсе еще не означает, что мой советчик правильно судил об ожидаемом исходе скачек. Однако если его советы в большинстве случаев, скажем в $^9/_{10}$, удачны, а советы другого удачны лишь в $^1/_{10}$ части случаев, то не кажется ли Вам, что к первому советчику следует прислушаться, а советами второго можно пренебречь?

Митон

Конечно.

Паскаль

Можем ли мы в этом случае говорить о том, что суждения первого надежнее, чем суждения второго?

Митон

Очевидно.

Паскаль

Вот я и поймал Вас. Ведь это как раз и означает, что первый советчик способен лучше оценивать истинную вероятность исхода скачек; так что и в этом случае имеет смысл говорить о действительном значении вероятностей данных событий, хотя их точно никто не знает и различные лица могут оценивать их по-разному.

Митон

Я признаю, что Вы весьма ловко меня обошли, хотя, собственно говоря, Вы имеете в виду вероятность совершенно другого события, а именно вероятность того, что знаток скачек даст правильный совет. Но при этом речь идет уже не об однократном случайном событии, а о событии, которое можно повторить много раз и тем самым оценить его вероятность на основании наблюдения относительной частоты. Но оставим скачки в покое, ведь важен не пример, а принципиальный вопрос. Мне хотелось бы выяснить, на чем Вы базируетесь, когда говорите о вероятности вообще, независимо от лица, у которого складывается суждение относительно ее значения. Я убежден, что любая вероятность субъективна; если же

Вы полагаете, что это не так, что разумно говорить об объективной вероятности, то и докажите мне свою правоту.

Паскаль

Я охотно признаю, что не сумею этого доказать, это аксиома, а, как известно, аксиомы нельзя, да и не нужно доказывать. Я могу только утверждать, что эта аксиома столь же разумна, как и те аксиомы, в правильности которых ни Вам, ни кому другому и в голову не придет сомневаться, и что следствия этой аксиомы согласуются с нашим ответом. Пожалуй, Вас удивит, если я скажу, что аксиома объективности вероятности является естественным и само собой разумеющимся продолжением одной принятой всеми аксиомы.

Митон

Какую аксиому Вы имеете в виду?

Паскаль

Аксиому причинности, согласно которой в природе течение явлений точно определено совокупностью факторов, оказывающих на них влияние, и одинаковые причины всегда приводят к одинаковым следствиям. Этого нельзя доказать, и именно поэтому она основополагающая. Разве из ничего можно было бы что-нибудь доказать? Я надеюсь, Вы не сомневаетесь в принципе причинности?

Митон

Не сомневаюсь, хотя мне никогда не приходило в голову, что это недоказуемая аксиома.

Паскаль

Она не только недоказуема, но и не нуждается в доказательстве; она является основой нашего научного мировоззрения, и каждый закон природы, открытый наукой, служит дополнительным аргументом правильности и необходимости этой аксиомы. Однако тот, кто принимает принцип причинности, должен принять и другую аксиому, согласно которой случайные события имеют определенные, независимые от нас и тем самым объективные вероятности, ибо это не что иное, как более универсальная и точная формулировка того же принципа.

Митон

Ваше утверждение удивительно и мне непонятно. Не могли бы Вы пояснить его на каком-либо примере?

Паскаль

С большим удовольствием. Обобщенный принцип причинности можно сформулировать следующим образом: если нам известны все обстоятельства, которые влияют на данное явление, то они однозначно определяют его течение. Однако если нам известна лишь часть существенных обстоятельств, то они позволяют явлению изменяться многими путями, хотя и определяют однозначно вероятность каждого пути. Когда говорят, что наступление события зависит от случайности, подразумевают следующее: принятые во внимание обстоятельства не определяют однозначно, что́ именно произойдет, а позволяют установить как то, что событие наступит, так и то, что оно не наступит; они определяют вероятности каждой из этих возможностей. То, что в одних случаях эти вероятности известны нам точно, в других — приближенно, а в-третьих — неизвестны совсем, не относится к сути дела, а также к принципу причинности. Это аналогично тому, как в одних случаях для вполне детерминированных явлений нам известен точный закон, которому подчинено их развитие (например, как будет падать брошенный камень), в то время как в других этот точный закон нам неизвестен. Так как Вы хотели, чтобы я привел доступный Вам пример, то рассмотрим движение маятника, которое изучал Галилей. Если известна длина маятника и известно, когда и из какого положения маятник был приведен в движение, то (предполагая, что трение и сопротивление воздуха пренебрежимо малы) для любого момента времени мы можем точно вычислить положение маятника. Однако если нам известны длина и исходное положение маятника, но неизвестен момент, в который он начал двигаться, то мы не можем точно предсказать, в каком положении он будет в определенный момент, но все-таки можем утверждать, что с вероятностью $1/2$ он будет находиться слева или справа от самого нижнего положения. И какой бы угол α ни был задан, можно подсчитать вероятность того, что направление маятника в данный момент наблюдения отклонится от вертикального положения на угол, меньший чем α.

Митон

Я начинаю понимать Вашу мысль, хотя это вовсе не означает, что я принимаю ее. Если я Вас правильно понял, то совершенная детерминированность является лишь предельным случаем принципа объективности вероятности, не правда ли?

Паскаль

Вы превосходно поняли меня. Это в самом деле идеальный предельный случай, который в действительности никогда не осуществляется абсолютно точно, а лишь приблизительно. Ведь нам никогда не бывают в точности известны все обстоятельства, которые оказывают влияние на данное явление. В приведенном выше примере я указал, что, если отвлечься от трения в точке подвеса и от сопротивления воздуха, мы можем точно определить движение маятника. В действительности же полностью пренебречь действием этих причин нельзя. Если бы даже нам удалось поместить маятник под колпак и выкачать из-под него воздух — как в том эксперименте, который я провел вслед за Торричелли,— то и тогда мы не смогли бы полностью исключить трение и вибрацию здания, в котором производится эксперимент, а также ряд других более или менее случайных факторов. И такая же картина во всех случаях, когда мы считаем, что имеем дело с точными законами. Если нам и удастся когда-нибудь учесть все важнейшие причины, определяющие явление, то ход явления можно будет предвидеть лишь в самых общих чертах; в мельчайших подробностях предусмотреть его нет никакой возможности. Быть может, Вы помните о моих экспериментах, связанных с измерением давления воздуха. Мне удалось показать, что на высокой горе, например на вершине Пюи де Дом, столбик ртути ниже, чем у ее подножия, так как у подножия вес столба воздуха больше, чем на вершине горы, поскольку он выше. Однако вес воздуха не остается постоянным даже в одной и той же точке пространства — он зависит от погоды и от влажности, а эти факторы постоянно изменяются, и притом непредвиденным образом. Итак, нельзя утверждать, что вес воздуха в Париже имеет вполне определенное значение; мы можем лишь говорить о том, что с большой вероятностью он окажется между какими-то определенными пределами. Но эта вероятность определена географическим положением Парижа, временем года и погодой, и, что бы Вы ни думали о вероятности, от этого в опыте Торричелли ртуть не поднимется и не опустится даже на сотую долю миллиметра. Сошлемся также на пример падения звезд. Как известно, чаще всего падающие звезды наблюдают в августе. Но они падают и тогда, когда этого никто не видит. Падающих звезд в августе больше не потому, что мы так думаем, наоборот, мы думаем об этом так лишь потому, что в этот месяц их действительно больше. Случайные события, происходящие на Луне, также имеют определенные вероятности, хотя ни у кого из нас о них не может быть собственного мнения, ведь мы не знаем даже, о каких событиях идет речь.

Митон

Не продолжайте, г-н Паскаль, здесь я вполне с Вами согласен. Я, как и Вы, считаю, что вероятности, относящиеся к явлениям неживой природы, имеют объективное значение; в этом я никогда не сомневался. Позвольте, однако, напомнить, что в нашем споре Вы вновь уклонились в такую сторону, где имеете возможность опереться на прочную основу, ибо все приводимые Вами примеры относятся к явлениям, которые можно наблюдать в одинаковых условиях (если не практически, то по крайней мере в принципе сколько угодно раз), и тем самым о действительных значениях вероятностей можно делать заключения по их относительным частотам. Мои же возражения относились к однократным случайным событиям, таким, как исход скачек или кораблекрушения. Я и впредь буду настаивать на том, что в таких случаях вероятностное суждение может быть лишь субъективным.

Паскаль

В том, что однократные случайные события имеют объективные вероятности, я убежден потому, что они также имеют причины. Кроме того, я не вижу принципиальной разницы в объективности вероятностей для случайных событий, относящихся к неживой и к живой природе. Закон причинности имеет силу и в живой природе; вероятности событий, относящихся к живой природе, так же определенны и объективны, с той только разницей, что связи в них намного сложнее и, следовательно, более необозримы. Именно поэтому точно предвидеть события в живой природе нам еще труднее, чем в природе неживой; но из этого, однако, следует лишь то, что в этой области исследования вероятностей, когда их возможно провести, еще важнее.

Если Вы хотите, рассмотрим подробнее пример с кораблекрушением. Несомненно, что у торговцев и коммерсантов имеются определенные суждения о том, какова вероятность того, что корабль в целости прибудет на место назначения. Я слышал, в Англии торговцы стремятся обезопасить себя от потери грузов, отправленных на корабле, заранее выплачивая некоторую сумму обществу, которое специально этим занимается; общество же взамен возмещает торговцу ущерб, если груз погибнет в результате кораблекрушения или же из-за нападения пиратов. Если же груз благополучно прибывает на место назначения, то первичный страховой взнос остается у общества. Несомненно, при установлении размера взноса торговец и общество как-то оценивают вероятность потери груза, и хотя оба суждения имеют чисто субъективный характер, все же, по-моему, и в этом случае можно говорить об объективной вероятности благополучного прибытия корабля; только нужно честно признаться, что нам эта вероятность неизвестна. Каково бы ни было наше личное мнение о шансах благополучного прибытия корабля в порт, оно никак не скажется на судьбе корабля. На нее оказывает влияние лишь объективная вероятность, которая является не чем иным, как квинтэссенцией объективных обстоятельств. Как по-Вашему, если бы Вы подумали, что некий корабль может утонуть, и это на самом деле случилось бы, мог бы суд привлечь Вас к ответственности на том основании, что Вы послужили причиной катастрофы? Не правда ли, Вы отвели бы обвинение, заявив, что Ваше личное мнение никак не могло повлиять на судьбу корабля? Будь я судьей, я снял бы с Вас обвинение в гибели судна, но осудил бы Вашу точку зрения относительно субъективности вероятности. Впрочем, то обстоятельство, что страховое общество хотя бы приблизительно верно оценивает эти вероятности, зависит от того, насколько выгодно для него это предприятие. Если общество ошибочно оценивает действительную вероятность (которая может изменяться от случая к случаю), то по прошествии некоторого времени оно разорится: либо потому, что возмещение убытков превысит сумму взносов, либо потому, что взносы столь высоки, что торговцы не склонны их выплачивать.

Митон

Г-н Паскаль, Вы напоминаете мне кошку, которая всегда падает на лапы. Теперь Вам вновь удалось перейти от однократных событий к событиям, которые наблюдаются многократно и для которых наблюдение относительной частоты дает объективную оценку вероятности.

Паскаль

Поверьте, г-н Митон, причиной тому не мои скромные способности к дискуссии, а тот факт, что истина на моей стороне.

Митон

Дабы доставить Вам удовольствие, я склонен принять, что и однократным случайным событиям можно придавать не зависящую от нас объективную вероятность, хотя мы не знаем ее точного значения и, больше того, не можем ее знать. Однако, по-моему, занятие вещами, которые недоступны опытной проверке, едва ли может составлять предмет науки; если же такие вещи и существуют, то возникает вопрос: что следует понимать под их существованием?

Паскаль

Да то же, что и под существованием атомов Лукреция, которые мы также не в состоянии увидеть даже под микроскопом. Тем не менее с их помощью мы можем объяснить все, что видим в окружающем нас мире В обоих случаях речь идет о научной гипотезе, непосредственно проверить которую мы не можем и делаем это лишь с помощью проверки выведенных из нее следствий.

Митон

Г-н Паскаль, Вы могли бы быть выдающимся адвокатом; я замечаю, с какой ловкостью Вы пользуетесь методом «argumentum ad hominem» *. Вы, верно, помните, в свое время я Вам сказал, что очень люблю читать книгу «О природе вещей», и не только потому, что, подобно Лукрецию, высоко ценю богиню Венеру. И хотя Вы еще не вполне убедили меня, Ваше сравнение с атомами заставляет меня задуматься. Значит, по-Вашему, вероятности однократных событий также принадлежат к тем вещам, о которых некогда говорил поэт [19]:

Выслушай то, что скажу, и ты сам, несомненно, признаешь,
Что существуют тела, которых мы видеть не можем.
Ветер, во-первых, морей неистово волны бичует,
Рушит громады судов и небесные тучи разносит.
. . . .
Стало быть, ветры — тела, но только незримые нами.

---

* Апелляция к чувствам человека. — *Прим. ред.*

Так Вы полагаете, что незримый ветер и неизвестная вероятность совместно топят несчастные галеры?

Паскаль

Можно выразиться и так, с этим согласился бы и сам Лукреций — ведь, по его представлениям, весь мир создается в результате случайного столкновения атомов. Вы, очевидно, помните следующие его строки:

Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно,
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движениях своих не условились раньше, конечно.
Если ж начала вещей во множестве, многоразлично
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и все испытуя,
Что только могут они породить из своих столкновений,—
То и случается тут, что они в этом странствии вечном,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
Сходятся так, наконец, что взаимная их совокупность
Часто великих вещей собой образует зачатки:
Моря, земли и небес, и племени тварей живущих [20].

Митон

Как же не помнить! Я превосходно помню и то место, где Лукреций сравнивал случайное движение первичных элементов с танцем пылинок, который можно наблюдать, если смотреть сбоку на луч солнца в комнате [21]. По-Вашему, теорией вероятностей можно воспользоваться и для изучения таких случайных явлений?

Паскаль

Я в этом убежден. Для меня очевидно, что теория вероятностей позволит математическими методами исследовать такие явления природы, которые немыслимо объяснить другими математическими методами; я имею в виду явления природы, зависящие от случая.

Митон

Вы говорите о случайности так, словно с полной определенностью можно утверждать, зависит ли событие от случайности или нет. Мне же кажется, что однозначно решить нельзя даже это. То, что для одного является случайным, для другого вовсе не случайно. Если Вы не знаете, в какой момент я отпускаю маятник, то для Вас положение маятника в данный момент является случайным. Но если я отпустил маятник, то я точно знаю, когда это произошло, и для меня движение маятника вполне определенно и не зависит от случая. Следовательно, представление о случайности данного события является субъективным.

Паскаль

Я вполне согласен с тем, что одно и то же событие в одних случаях приходится считать случайным, а в других вполне детерминированным — в зависимости от того, при каких обстоятельствах мы его исследуем. Вспомните, что я говорил Вам в самом начале нашей беседы: каждая вероятность в действительности условна. И вообще то обстоятельство, что данное событие является случайным, зависит от объективных условий, и если оно случайно, то именно эти условия определяют его вероятность.

Митон

Пусть будет так, я не стану оспаривать это положение. Вы убедили меня в том, что Ваша трактовка последовательна и продуманна и, вне всяких сомнений, на вещи можно смотреть и с таких позиций. И все же я остаюсь при своем мнении о субъективных вероятностях, так как их я знаю, а с Вашими объективными вероятностями, даже если я и приму их, мне нечего делать, так как их я не знаю. По Вашей милости я нахожусь сейчас в таком состоянии, словно Вы сначала долго и настойчиво расхваливали мне кого-то, а затем, убедив меня в том, что общество упомянутого господина или дамы было бы мне приятно, сообщили, что у Вас нет ни сил, ни возможностей познакомить меня с ним.

Паскаль

Позвольте мне несколько видоизменить Ваше сравнение. На мой взгляд, положение скорее таково, что я расхваливал Вам древнегреческого автора, с кем лично бессилен Вас познакомить, но произведения которого, хотя и не полностью, но в подавляющей части сохранились. Так вот, из этих произведений, если Вам удастся преодолеть языковые трудности, Вы сможете узнать и автора; более того, Вы даже сможете с уверенностью догадаться и о том, что могло содержаться в утерянных произведениях. Конечно, задача не из легких, но она заслуживает усилий.

Митон

Я еще об этом подумаю. Сейчас же, г-н Паскаль, скажите мне лишь следующее: относятся ли открытые Вами математические закономерности, например законы сложения и умножения, только к объективным или же и к субъективным вероятностям?

Паскаль

Субъективные вероятностные суждения в большинстве случаев даже не количественные, а только качественные. Но если бы чьи-то субъективные суждения всегда были количественными, то и тогда упомянутые законы были бы верны, но лишь при условии, что суждения данного человека находятся в полном соответствии друг с другом и составляют когерентную систему без противоречий. Я не верю, что такой человек существует. Поэтому если исходить из субъективной оценки вероятности какого-то события, то лучше поступать так: оценивать вероятность сложного события не на основании собственных ощущений, а вычислять посредством математических формул на основании ранее оцененных исходных вероятностей. При этом, конечно, только если исходные вероятности не противоречат друг другу, Вы получите систему, которая внутренне непротиворечива; в ней общие законы выполняются без каких бы то ни было исключений. Ведь в этом случае Вы получите то значение, которое было бы истинной (объективной) вероятностью, если бы исходные вероятности, принятые на основе субъективных суждений, совпадали с действительными значениями. Рано или поздно, следуя по этому пути, можно дойти до события, вероятность которого можно проверить эмпирически. Тогда в случае необходимости удастся исправлять исходные значения, принятые на основе субъективных суждений.

Митон

Следовательно, Вы тоже признаете, хотя бы только для исходных значений, необходимость субъективных вероятностей?

Паскаль

У меня иной подход: то, что Вы называете субъективным вероятностным суждением, я воспринимаю как гипотезу.

Митон

Мне кажется, здесь различие только в названиях.

Паскаль

Не совсем. На первых порах я не придаю гипотетическим вероятностям определенного числового значения, но обозначаю их буквами, скажем *x*, *y*, *z* и т. д. И только затем, на основании наблюдений над другими событиями, вероятности которых зависят от этих величин, пытаюсь делать выводы об их значениях.

Митон

После всего сказанного Вами мне начинает казаться, что наши трактовки не так различны, как можно было бы подумать в начале беседы; по крайней мере в том, что касается практических выводов, различия несущественны. Поэтому, я думаю, нам не следует надоедать своим спором всему обществу. К тому же, сколько бы мы ни спорили, каждый из нас останется при собственном мнении, а потому по необходимости в наших заключениях всегда будет оставаться некоторое различие. Мне кажется, что в процессе спора наши трактовки сблизились настолько, насколько это вообще возможно, поэтому дальнейшее обсуждение вопроса было бы попросту бесцельным. К тому же прекрасные дамы, окружающие нас, начинают на нас сердиться — они думают, что мы ими пренебрегаем. Если Вы не возражаете, закончим на сегодня нашу дискуссию.

Паскаль

Как Вы того желаете, г-н Митон.

На этом мы прервали нашу беседу. Так как в ней содержится все, что я могу сказать по поводу Ваших вопросов, то я счел за благо привести ее целиком, без каких-либо комментариев. Прошу Вас, во имя нашей дружбы, напишите совершенно откровенно, что Вы думаете об этой беседе с г-ном Митоном Вашего самого верного почитателя

Блэза Паскаля

P.S. На днях, приводя в порядок книги, я наткнулся на «Размышления» Марка Аврелия и случайно открыл ту страницу, где он пишет о двух возможностях: либо мир является огромным хаосом, либо в нем царствует порядок и закономерность; какая из двух взаимноисключающих возможностей реализуется, мыслящий человек должен решить сам — он, как скала в море, о которую разбиваются яростные волны, должен оставаться там, куда его забросили судьба или случай. И хотя я уже много раз читал эти строки, но теперь впервые задумался над тем, а почему, собственно, Марк Аврелий считал, что в мире господствуют либо случайность, либо порядок и закономерность? Почему он думал, что эти две возможности исключают друг друга? Мне кажется, в действительности оба утверждения не противоречат друг другу, более того, они действуют одновременно: в мире господствует случай и одновременно действуют порядок и закономерность, которые формируются из массы случайностей, согласно законам случайного. Вот почему я и придаю такое значение выяснению понятия вероятности и интересуюсь неразрывно связанными с этим вопросами. Разумеется, мне нет нужды объяснять Вам, что с самого начала, как только мы начали переписку по поводу этих проблем, и Вы и я знали, что речь идет о вопросах куда более серьезных, чем игра в кости.

Письмо к читателю

Дорогой читатель!

В связи с эпистолярной формой этой книги мне хотелось бы сообщить Вам то, о чем Вы, верно, уже догадались, а именно, что профессора Анри Труверьяна никогда не существовало, следовательно, он не мог ничего найти (на это намекает и его имя — Труверьян, т. е. Ничего не нашедший) и, таким образом, приводимых в книге писем Паскаль в действительности не писал. Возможно, Вы все же ждете, чтобы я объяснил, почему для изложения основ теории вероятностей я избрал эпистолярную форму, причем прибегнул к вымышленным письмам Паскаля. Но вопрос этот не требует ответа. Если Вы внимательно и с интересом прочли эти письма, Вы не станете ни о чем спрашивать; если же письма Вам не понравились, то никакие объяснения не помогут. Поэтому я только замечу, что при выборе литературного жанра этой книги я руководствовался примерно теми же соображениями, что и при написании «Диалогов» *, только на сей раз мне захотелось проэкспериментировать с другой его формой **. Вымышленные письма — весьма распространенная форма литературного жанра, восходящая к Древней Греции. Уже при Платоне она была обычной, философские вопросы нередко излагались в форме писем. Это поэтическое искусство живо и в наши дни. В качестве примера я хотел бы сослаться на мастерское произведение Торнтона Уайльдера «Мартовские иды» ***.

Что же касается выбора корреспондентов, Паскаля и Ферма, то я придерживался тех же принципов, что и в «Диалогах»: я отнес их переписку ко времени возникновения понятий теории вероятностей, чтобы представить себе их *in statu nascendi* (т. е. в состоянии зарождения), сохранив при этом всю их первозданную свежесть.

* См. [10].

** Впрочем, местами я комбинировал обе родственные формы, вводя в письма короткие диалоги.

*** См. [11].

«Письма о вероятности» и «Диалоги» роднит и то, что в обоих произведениях я стремился сохранить историческую правду, по возможности избежать анахронизмов и выдержать стиль, который соответствовал бы изображаемой эпохе. Желая приблизить письма к подлинникам, я включил в текст многие мысли и афоризмы из трудов Паскаля; некоторые строки даже полностью (или же с ничтожными изменениями) соответствуют подлинным словам ученого. На соответствующие выдержки из трудов Паскаля сделаны ссылки в примечаниях. В публикуемых письмах Паскаль часто цитирует других авторов; все эти цитаты заимствованы из трудов, о которых достоверно известно, что Паскаль их знал. Известно, что некоторые из них (например, «Очерки» Монтеня) были любимым его чтением.

Итак, дорогой читатель, я сделал все, что было в моих силах, чтобы Вы поверили в возможность написания этих писем. Разумеется, я был далек от мысли обмануть Вас и заставить думать, что Вы читаете подлинные письма. Что же касается их содержания, то я не смею утверждать, что оно в действительности было продумано Паскалем, но оно вполне возможно, и никакими историческими аргументами этого нельзя опровергнуть.

Вы вполне резонно можете спросить: почему же я не опубликовал и «ответы» Ферма? Конечно, я мог это сделать, но посчитал излишним, так как содержание ответов Ферма с большой точностью, за исключением некоторых деталей, нетрудно восстановить по письмам Паскаля. К тому же, как Вы помните, профессор Труверьян довольно убедительно разъяснил причины, в силу которых до нас не дошли письма Ферма.

Сердечно благодарю Вас за терпенье.
Искренне Ваш

Альфред Реньи

Краткая биография Паскаля

Блэз Паскаль родился в Клермон-Ферране 19 июня 1623 года. Его отец, председатель финансово-судебной палаты, был человеком обширных и глубоких знаний. Блэз очень рано, в трехлетнем возрасте, потерял мать — Антуанетту Бегон; с тех пор отец сам воспитывал его и двух дочерей — старшую Жильбер (впоследствии вышедшую замуж за Этьена Перье) и младшую Жаклин (которая затем ушла в монастырь). Паскаль не учился ни в школе, ни в университете, всему его обучал отец. Уже в отрочестве Паскаль обнаружил необыкновенный талант: когда ему было всего 16 лет, он написал трактат «Опыт теории конических сечений». В этой работе содержится знаменитая теорема, согласно которой три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, находятся на одной прямой. В 1642 году, когда Паскалю исполнилось 19 лет, он сконструировал счетную машину. В последующие годы он изготовил еще семь счетных машин, некоторые из них сохранились; на выставке, организованной в Клермон-Ферране в 1962 году по случаю трехсотлетней годовщины со дня смерти Паскаля, можно было видеть одну из этих машин. Мы вправе считать Паскаля пионером кибернетики, ибо он понимал принципиальное значение своего изобретения. Это подтверждают следующие его слова: «Счетная машина способна производить действия, которые ближе к мышлению, чем все, на что способны животные»[22].

В 1648 году Паскаль повторил во многих вариантах опыт Торричелли и дал полное объяснение полученных результатов. Он доказал, что давление воздуха зависит от высоты, отсчитываемой от уровня моря, открыл основной закон гидродинамики и принцип устройства гидравлического пресса.

Чтобы понять, почему эти исследования Паскаля вызвали столь большой отклик и послужили поводом к страстным дискуссиям, нужно знать, что своими опытами

Торричелли опровергал учение Аристотеля, согласно которому вакуум невозможен, так как природа боится пустоты. Тем самым опыты Торричелли означали тяжкое поражение схоластики. Паскаль полностью сознавал революционное значение эксперимента Торричелли и собственных экспериментов для научного мышления и потому проводил их с особой тщательностью и осмотрительностью. Он резко критиковал тех, кто в своем преклонении перед авторитетами оставался слепым к фактам. Сохранился набросок предисловия к запланированному, но не написанному трактату Паскаля о вакууме, который заканчивается следующими словами: «Как бы высоко мы ни ценили мнения древних, истина, сколь бы нова она ни была, всегда заслуживает еще более высокой оценки, ибо в действительности истина старше всех мнений. И если мы думаем, что истина родилась тогда, когда люди открыли ее, то это означает, что мы не знаем ее природы» [23].

В вопросах науки Паскаль твердо придерживался экспериментального метода и свободного от предрассудков логического мышления, но был убежден, что в вопросах религии невозможно достичь истины посредством только мышления; для этого необходима также вера [24].

В духовном мире Паскаля религия играет большую роль начиная с 1646 года — как отмечают биографы, времени его «первого обращения» к вере. Но все же в ту пору религия еще не стала главенствующей в его жизни. Годы 1652—1654 относятся к так называемому «светскому периоду» жизни Паскаля. В 1653 году со своими знатными друзьями — герцогом Роаннским, кавалером де Мере и Дамьеном Митоном — Паскаль ездил в Пуату. Во время этого путешествия де Мере задал Паскалю два вопроса об азартных играх, о которых в 1654 году Паскаль переписывался с Ферма. В ходе этой переписки и зародилась теория вероятностей [25].

Первое письмо Паскаля к Ферма датируется 29 июля 1654 года, второе — 24 августа и третье (всего несколько строк) — 27 октября 1654 года. Как уже говорилось выше, письма посвящены двум вопросам, заданным кавалером де Мере. Первый вопрос состоит в следующем: сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы вероятность хотя бы однажды выбросить две шестерки была больше половины? Эту задачу решил сам де Мере.

Второй вопрос потруднее, и ответить на него де Мере не смог. Вопрос заключается в следующем. Два игрока играют в азартную игру; в каждой партии шансы на выигрыш у них одинаковы; в начале игры ставки одинаковы; ставку выигрывает тот, кто первым наберет n выигранных партий. Как следует разделить ставку, если по какой-то причине игра прервана в тот момент, когда один игрок выиграл a партий, а другой b партий?

Мы приведем здесь несколько начальных строк первого письма, из которых читатель сможет сам составить представление о содержании и стиле этих писем.

«Дорогой г-н Ферма! Мной овладело нетерпение, и хотя я еще нахожусь в постели, мне трудно удержаться от того, чтобы взять перо и сообщить Вам, что вчера вечером г-н Каркави передал мне Ваше письмо о справедливом разделе ставки, которое привело меня в неописуемый восторг. Не стану растягивать вступления и скажу сразу: Вы вполне правильно решили задачу о костях и задачу о справедливом разделе ставки. Для меня это большая радость, поскольку теперь, когда мы получили столь изумительно совпадающий результат, я больше не сомневаюсь в собственной правоте.

Метод, которым Вы решили проблему разделения, восхитил меня еще больше, чем решение задачи об игре в кости. Многие, и среди них сам кавалер де Мере и г-н Роберваль, удачно ответили на последний заданный вопрос. Но де Мере не смог правильно решить задачу о разделе ставки, он даже не смог подступиться к этому вопросу, так что до сих пор я был единственным, кто знал правильное соотношение раздела.

Ваш метод вполне надежен; в свое время, когда я сам начал размышлять над указанным вопросом, я тоже шел подобным путем. Однако подсчет различных встречающихся комбинаций утомителен, и поэтому позднее мне удалось найти другой, более простой и изящный метод, о котором мне и хотелось бы Вам рассказать. Я и впредь хотел бы по мере возможности делиться с Вами своими мыслями. Я более не сомневаюсь в правильности полученного мной результата, так как он удивительным образом совпадает с найденным Вами. Как я вижу, истина одна: и в Тулузе, и в Париже» [26].

Эти письма посвящены только двум задачам де Мере, общие же проблемы теории вероятностей в них не затрагиваются, не упоминается даже само слово «вероятность».

На тот же 1654 год приходятся работы Паскаля о так называемом «треугольнике Паскаля» и связанных с ним вопросах комбинаторики. Интерес к комбинаторике был вызван теоретико-вероятностными исследованиями ученого.

Вскоре после написания этих трех писем, а именно 23 ноября 1654 года, произошел решительный поворот в жизни Паскаля, который биографы называют «вторым обращением» к вере. Записки, написанные им той знаменательной ночью в порыве религиозного экстаза, с тех пор он носил с собой в качестве памятки, зашив их в подкладку камзола [27].

Вслед за этим Паскаль вступил в теологическую борьбу против иезуитов, встав со всей энергией на сторону янсенитов *. Он написал 19 полных блеска и остроумия писем, известных под названием «Письма провинциала» и являющихся шедевром французской художественной прозы. Не вызывает сомнения тот факт, что эта борьба была в центре внимания Паскаля с 1645 по 1658 год. Но утверждение, что после своего второго обращения к вере он полностью отошел от математики и науки вообще, ошибочно. Именно к 1658—1659 годам относятся его исследования циклоиды, имеющие исключительно большое значение: Паскаль определил площадь циклоиды, центр тяжести сегмента циклоиды, объем и центр тяжести тела, полученного от вращения сегмента циклоиды. Этим он сделал решительный шаг к созданию дифференциального и интегрального исчислений. И хотя он удовлетворился тем, что применил свое открытие к вычислению определенных интегралов, связанных с циклоидой, но и в этом уже содержались черты общего метода, позднее развитого Лейбницем. Сам Лейбниц подчеркивал, что на понятие производной его натолкнул трактат Паскаля «О си-

---

* Янсенизм — религиозное течение в Голландии и общественно-религиозное движение во Франции, возникшее в XVII веке на базе учения Корнеллия Янсения (1585—1638). Он отрицал свободу воли человека, учил о предопределении избранных к спасению и грешников — к вечной гибели. Во Франции янсенизм отразил разочарование населения в католицизме и ненависть к иезуитам и явился своеобразной формой оппозиции абсолютизму. Паскаль своими «Письмами провинциала» нанес сильнейший удар авторитету ордена иезуитов во Франции.— *Прим. ред.*

нусе четверти круга» («Traité de sinus du quart de cercle»).

В 1658 году Паскаль трудился над работой «Разум геометра и искусство убеждения» («De l'esprit géométrique et de l'art de persuader»). Этой работой он опередил свой век в отношении оценки значения аксиоматического метода для математики. Проиллюстрируем это выдержкой из названной работы: «Все должно быть доказано, и при доказательстве нельзя использовать ничего, кроме аксиом и ранее доказанных теорем. Никогда нельзя злоупотреблять тем обстоятельством, что разные вещи нередко обозначаются одним и тем же словом, поэтому определяемое слово должно быть мысленно заменено определением» [28].

Самым известным произведением Паскаля, правда незаконченным, является его сборник афоризмов, появившийся уже после смерти автора под названием «Мысли» («Pensée»). Из помещенных там афоризмов я процитирую только один, который со всей определенностью показывает, что Паскаль-моралист неотделим от Паскаля-ученого: «Наше достоинство заключается в наших мыслях... Отсюда следует, что правильно мыслить должно быть принципом морали» [29].

Я не стану даже пытаться нарисовать в этой книге полный портрет интереснейшей и противоречивой личности Паскаля; к тому же через 300 лет нелегко проанализировать сложные повороты на его жизненном пути. Я не чувствую себя подготовленным к выполнению столь ответственной задачи, да это и не является целью моей книги. Мне бы хотелось только в заключение процитировать следующие строки (см. [12]), принадлежащие поэту Эндре Ади *:

> Я, как и каждый человек, Величие,
> Северный полюс, Тайна, Необычность,
> Далекий блуждающий огонек,
> Далекий блуждающий огонек.

Творчество Паскаля, несмотря на его незавершенность и противоречивость, и теперь, спустя три столетия, можно уподобить ярко горящему факелу.

---

* Эндре Ади (1877—1919) — один из крупнейших венгерских поэтов XX века; его перу принадлежат двенадцать сборников поэтических произведений. Небольшой сборник стихов в русском переводе был издан Изд-вом художественной лит-ры в 1958 году.— *Прим. ред.*

II. О датах писем

Как я уже отмечал в биографическом очерке, последнее письмо Паскаля к Ферма, в котором обсуждаются вопросы де Мере, датируется 27 октября 1654 года. Упоминалось также, что ночь на 23 ноября 1654 года была поворотным пунктом в жизни Паскаля. Если предположить, что помимо сохранившихся писем Паскаль послал Ферма еще письма, посвященные понятию вероятности, то эти письма относились к периоду с 28 октября по 23 ноября 1654 года. Они не могли быть написаны до 27 октября — в этом случае в дошедших до нас письмах были бы на них ссылки. Не могли быть они написаны и после 23 ноября — после этой даты Паскаль был занят совсем иными мыслями. Все известные нам биографические данные почти полностью исключают предположение о том, что после 23 ноября 1654 года Паскаль возвращался к проблеме «Математика случайного».

Но вполне возможно, что между 27 октября и 23 ноября Паскаль продолжал заниматься этими вопросами. Таким образом, для датировки наших писем оставался очень короткий промежуток времени — приблизительно четыре недели. Так как в те времена передвижение осуществлялось медленно, мы имеем возможность заключить, что если бы Паскаль написал письмо в конце октября, то ответ на него он не смог бы получить раньше 5 ноября. И даже если бы он в свою очередь ответил немедленно, все равно ответа Ферма до 15 ноября не мог бы получить. Естественно предположить, что тема так волновала Паскаля, что, не дожидаясь ответа, он написал еще письмо, которое дополняло второе послание. Когда же он получил от Ферма ответ на свое второе письмо (по нашим предположениям, в период 15—20 ноября), он написал свое четвертое письмо. Вряд ли возможно, чтобы сверх этих четырех * могли быть написаны еще какие-нибудь письма.

Итак, основываясь на предположении, что в течение этих четырех недель Паскаль написал четыре письма, можно рассчитать даты их написания с точностью до одного-двух дней.

---

* Стремясь ускорить обмен письмами, я предположил, что с середины ноября Ферма находился в Орлеане, т. е. ближе к Парижу. Кстати, Паскаль и Ферма лично никогда не встречались.

Как отмечают биографы, последние недели перед 23 ноября Паскаль находился в крайне возбужденном состоянии. Это обстоятельство обыграно в части писем (особенно во второй половине третьего письма, где Паскаль сообщает о своем кошмарном сне).

III. Об истории теории вероятностей

Теория вероятностей — сравнительно молодая ветвь математики. Ее развитие как самостоятельной науки началось с переписки Паскаля и Ферма в 1654 году, хотя значительно раньше этих ученых многие математики занимались задачами, относящимися к азартным играм. Так, например, Лука Пачиоли (1445—1514) в своей книге «Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita» рассматривал одну задачу о вероятностях, но пришел к ошибочному решению. Однако уже Кардано (1501—1576) и Галилей (1564—1642) правильно решали специальные теоретико-вероятностные задачи. Понятие вероятности восходит к древним временам; оно было известно уже античным философам (вспомним, что во втором письме приведена цитата из Платона). Мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий, впервые возникла у древнегреческих материалистов. Ее подробное изложение дано в поэме Лукреция Кара «О природе вещей», важнейшие отрывки из которой цитируются в беседе Паскаля и Митона (и в примечаниях), приводимой в четвертом письме. В развитии теории вероятностей весьма большую роль играли задачи, связанные с азартными играми, в первую очередь с игрой в кости. Уже в древности игра в кости была популярна и любима. Сведения о таксиллусе, который упоминался во втором письме, я заимствовал из превосходной работы Хагстрёма [5]. История теории вероятностей от Паскаля до Лапласа была подробно изучена Тодхентером [13]; много интересных задач содержится в книге К. Йордана [14] и в недавно вышедшей работе Ф. Дэвида [28].

Я не намерен на страницах этой книги подробно излагать историю теории вероятностей; мне хотелось бы только отметить влияние переписки Паскаля и Ферма на дальнейшее развитие этой новой области науки. В 1658 году появилась книга Христиана Гюйгенса (1629—1695) «О расчетах в азартных играх» («De ratiociniis in ludo aleae»), в которой давалось подробное изложение вопросов, рассмотренных Ферма и Паскалем (автор явно опирался на переписку этих двух ученых), но, кроме того, им было выдвинуто и много аналогичных вопросов. С работой Гюйгенса непосредственно связана основная работа Якоба Бернулли (1654—1705) «Искусство догадок» («Ars conjectandi»), которая была опубликована лишь после его смерти в 1713 году. В первой части своего труда Бернулли воспроизводит и комментирует книгу Гюйгенса, приводит полные решения тех вопросов, которые Гюйгенс поставил, но не решил. Однако важнейшей частью книги является четвертая, в которой изложен закон больших чисел. Произведение Монморта (1678—1719) «Опыт анализа азартных игр» («Essai d'analyse sur les jeux de hazard»), написанное несколько позже, чем «Искусство догадок» Бернулли, появилось раньше (в 1708 году). Оно также опирается на книгу Гюйгенса и тем самым косвенно связано с перепиской Паскаля и Ферма. То же можно сказать и относительно важнейшей работы Абрахама де Муавра (1667—1754) «Об измерении случайности, или о вероятностях результатов в азартных играх» («De Mensura sortis seu de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus»), которая была опубликована в журнале *Philosophical Transactions* в 1711 году.

Наряду с задачами азартных игр уже в самом начале возникновения теории вероятностей появились задачи, связанные с составлением таблиц смертности и вопросами страхования. В Лондоне уже с 1592 года велись точные записи о смертности. На основе этих записей Джон Граунт (1620—1674) в 1662 году впервые составил таблицы вероятности смерти как функции возраста. Несколькими годами позднее Ван Худде и Ван де Витт в Голландии, проделав аналогичные расчеты, использовали их для вычисления пожизненной ренты. Подробнее эти вопросы в 1693 году были изложены Галлеем. Не доказано, но вполне естественно предположить, что уже Паскаль обратил внимание на связь теории вероятностей с закономерностями смертности и страхованием; именно поэтому я счел возможным в четвертом письме говорить о связи теории вероятностей со страхованием судов.

IV. О математических основах вероятности

Как и любые понятия, математическое понятие вероятности возникло не сразу. В переписке Паскаля и Ферма оно еще явно не определяется. Любопытно, что у Гюйгенса основным понятием является математическое ожидание, а не вероятность. Гюйгенс так определяет математическое ожидание: «Если число случаев, в которых я выигрываю сумму a, равно p, а число случаев, в которых я выигрываю сумму b, равно q, причем все случаи одинаково возможны, то значение моего ожидания равно $(pa+qb)/(p+q)$» (см. [30], стр. 8). Определение вероятности встречается впервые в «Ars conjectandi» Якоба Бернулли. Согласно Бернулли, вероятность есть «степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому». Хотя это определение имеет скорее философский, чем математический характер, Бернулли дает в основных чертах и так называемое классическое определение вероятности: «...вероятность события есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев, причем все случаи предполагаются равновозможными». Правда, Бернулли говорит об этом несколько по-иному; приведенная же формулировка принадлежит Лапласу (1749—1827). Она дается в его основополагающем труде «Аналитическая теория вероятностей» («Théorie analytique de la probabilités»), который не только подытожил успехи классической теории вероятностей, но и дал значительный толчок ее дальнейшему развитию. Такое же определение содержится и в другом труде Лапласа «Опыт философии вероятности» («Essai philosophique sur la probabilités» [31], стр. 4, 7), в котором можно найти подробное, ясное, увлекательное и волнующее изложение принципиальных вопросов, связанных с понятием вероятности. И хотя приведенное определение в подлинных письмах Паскаля явно не фигурирует, я отнюдь не считаю анахронизмом помещение классического определения в вымышленные письма, ибо в действительности он пользовался им при решении задач кавалера де Мере. Это определение было удовлетворительно и с точки зрения практики — до тех пор, пока теория вероятностей занималась элементарными задачами, связанными преимущественно с азартными играми. С принципиальных же позиций оно неудовлетворительно, несмотря на то что аргументы, приведенные Паскалем в его защиту во втором письме, верны и теперь и, следовательно, в нем нет ничего порочного.

В действительности же недостаток этого определения состоит не в том, что ему свойствен порочный круг (как утверждают иногда и теперь*), а в том, что оно не является определением. На вопрос, что такое вероятность, оно не отвечает, дает лишь метод ее вычисления в простейших случаях (по современной терминологии, в случае «классических вероятностных полей»).

Создатели теории вероятностей и не вкладывали иного смысла в понятие вероятности; собственно определением вероятности они считали упомянутое выше определение Бернулли, согласно которому вероятность есть не что иное, как степень нашей уверенности. В значительной мере они не ощущали потребности в формальном определении вероятности, поскольку считали вероятность основным понятием, значение которого очевидно и не требует определения. Настоящую задачу они усматривали в том, чтобы в конкретных вопросах вычислить вероятности событий, которые представляют для них интерес. Принимая во внимание уровень развития математики того времени, этому не приходится удивляться: ведь и понятия числа, функции, предела равным образом не были выяснены в современном смысле этого слова, но тогда в этом и не ощущали потребности.

Положение дел существенно изменилось в XIX веке, когда сама математика и понятие математической строгости значительно преобразились; возникли современные концепции математики и ее отношения к реальности. Согласно этим представлениям, каждая ветвь математики должна быть построена аксиоматически, абстрагирована от ее реального происхождения; она должна развиваться как замкнутая в себе и логически непротиворечивая теория, в которой основные понятия нельзя (да и не нужно) определять и вносить в них какого-либо содержания извне, кроме того, который неявно уже содержится в аксиомах.

Математическая теория, построенная таким аксиоматическим путем, может быть использована в качестве

---

* См. хотя бы [31] (речь идет о примечании редакции немецкого издания. — *Прим. ред.*).

абстрактной модели окружающей нас действительности. Последовательное проведение этой концепции в жизнь преобразовало математику и послужило исходным пунктом ее современного стремительного расцвета. Развитие теории множеств, теории функций действительного и комплексного переменного, топологии, современной алгебры и функционального анализа, появление математической логики коренным образом изменили лицо современной математики. Выяснение принципиальных вопросов математики дало мощный толчок ее применению в различных областях естественных и общественных наук.

Теория вероятностей удивительно долго стояла в стороне от указанной грандиозной перестройки, вплоть до первых десятилетий XX века. И несмотря на то что в XIX столетии Гаусс, Лаплас, Пуассон, Чебышев, Марков, Бертран, Пуанкаре и многие другие обогатили теорию вероятностей новыми направлениями исследований, а ее практические применения в естествознании, общественных науках и в экономике приобрели фундаментальное значение, в области оснований теории вероятностей серьезного прогресса не наблюдалось.

Это привело к тому, что еще в начале текущего столетия большинство математиков не признавало теорию вероятностей равноправной и органической частью математики; они считали ее наукой сомнительной ценности, находящейся где-то между математикой и физикой или математикой и философией. На вредность подобного отставания еще в 1900 году указал Давид Гильберт. Он включил проблему аксиоматического обоснования теории вероятностей — и тем самым способствовал ее подъему на уровень математики XX века — в составленный им список важнейших нерешенных проблем математики.

Первая серьезная попытка * решить эту задачу, сделанная Рихардом фон Мизесом (1883—1953), относится к 1919 году. И хотя предложенная им система не привела к цели и теперь имеет скорее лишь историческое значение, вызванные ею дискуссии привлекли внимание многих математиков к этой проблеме. Построение теории

---

* Первая такая попытка принадлежит С. Н. Бернштейну (1880—1968) и относится к 1917 году; см. его «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей», *Сообщения Харьковского математического общества*, 15, 209—274 (1917).— *Прим. ред.*

вероятностей в духе современной математики, основанное на точном аксиоматическом фундаменте, впервые вполне удовлетворительным образом было осуществлено в 1933 году А. Н. Колмогоровым * (род. в 1903 году [16]).

В аксиоматическом построении теории вероятностей по Колмогорову случайные события рассматриваются как некоторые множества, а соответствующие им вероятности являются определенной на них нормированной мерой; математическое ожидание в этой теории является попросту лебеговским интегралом (абстрактным). Поставив теорию вероятностей на теоретико-множественную основу, точнее на фундамент теории множеств и теории меры, Колмогоров одним махом дал не только логически удовлетворительное обоснование теории вероятностей, но и включил ее в кровеносную систему современной математики, позволив тем самым использовать развитые ее ветви для нужд теории вероятностей. По простоте и естественности, а также упомянутым преимуществам теория Колмогорова быстро стала общепринятой и служит твердой основой для построения теории вероятностей на протяжении последних 30 лет **.

Выяснение основ не только способствовало развитию теории вероятностей как математической науки, но и позволило сделать огромный скачок в отношении применения ее в других науках. С этого времени теория вероятностей бурно развивается и находит все более широкий круг применений.

---

* Как и всякое научное открытие, теория Колмогорова опиралась на попытки предшественников [17].

** Некоторые проблемы, связанные с физикой (в частности, с квантовой механикой), статистикой и другими науками, требовали развития теории Колмогорова и введения понятия условных вероятностей [18]. На возможность этого логического развития своей теории указывал и сам Колмогоров, но не разрабатывал эту идею.

Еще одно письмо к читателю

Дорогой читатель!

Перечитав обращенное к Вам письмо, я увидел, что оно нуждается в дополнении. В этом письме я попытался объяснить, почему именно выбрал форму вымышленных писем Паскаля для изложения, но не объяснил, что привело меня к мысли написать об этих вопросах. Я хочу исправить этот просчет в настоящем письме.

В дополнении IV я стремился показать, что в отношении самой математической теории вероятностей среди компетентных математиков разногласий нет. Этого, однако, нельзя сказать в отношении ее принципиальных вопросов, которые касаются взаимосвязи теории вероятностей с окружающим нас миром, применимости и интерпретации положений теории вероятностей. В действительности же эти вопросы являются скорее философскими, гносеологическими, чем математическими, и не удивительно, что до сих пор они служат предметом острых дискуссий. Каждый, кто хочет глубже изучить теорию вероятностей, а также с успехом применять ее результаты в какой-либо практической области, кто стремится понять, чем полезна эта теория и что она может дать естествоиспытателю или практику, неизбежно сталкивается с этими вопросами.

Мой личный опыт преподавания теории вероятностей (а я читал этот курс студентам различных научных интересов и различной первоначальной подготовки) и мои попытки применить ее на практике позволили мне сделать следующий вывод. Для углубления в математическую теорию вероятностей и для успешного ее применения недостаточно (но, безусловно, необходимо) просто постичь ее суть; необходимо разобраться и самостоятельно продумать принципиальные вопросы, связанные с самим понятием вероятности. А для этого следует ближе познакомиться с некоторыми конкретными применениями теории вероятностей. Именно этой цели и служит настоящая книга.

Элементы теории вероятностей, без которых немыслимо понимание затронутых принципиальных вопросов, содержатся в самих письмах. Я надеюсь, что Вам, дорогой читатель, они были понятны, и я был бы счастлив, если бы Вы, не занимаясь ранее теорией вероятностей, после прочтения их изъявили бы желание глубже познакомиться с ней. И хотя вопросы, изложенные в книге, понятны и без предварительных знаний, это отнюдь не свидетельствует об их простоте: напротив, их трудность скорее логического, чем математического характера; они могут возникать в связи с рассмотрением самых элементарных задач теории вероятностей. Именно поэтому естественно предположить, что уже Паскаль и Ферма поставили их и пытались на них ответить хотя бы только для себя. Вот почему никак нельзя считать анахронизмом, что в этой книге Паскаль высказывается по всем затронутым в ней вопросам.

Как я уже отмечал, упомянутые вопросы носят гносеологический характер и тесно связаны с основными проблемами научного познания. Разумеется, дорогой читатель, я не льщу себя надеждой, что этими письмами мне удалось завершить длившиеся столетиями споры. Моя цель была намного скромнее: я хотел только изложить общепринятое представление об этих вопросах. В ходе изложения, как нетрудно догадаться, я выражал и свое личное мнение. Особенно это относится к четвертому письму.

Точка зрения, которую выражал Митон, впервые была сформулирована в 1847 году де Морганом. По мнению Моргана, любое утверждение о вероятности какого-то события по необходимости субъективно; оно зависит от лица, которое его устанавливает, и отражает, в какой мере это лицо рассчитывает на наступление этого события. Таким образом, вероятность является числовой мерой убежденности данного лица. Хотя в настоящее время подавляющее большинство математиков, занимающихся теорией вероятностей, придает вероятности объективное значение, все же и сейчас встречаются сторонники субъективного подхода (см. хотя бы [19—21]). Вряд ли нужно подчеркивать, что в этих вопросах я разделяю точку зрения Паскаля.

Если у Вас, дорогой читатель, возникнет желание глубже заняться рассматриваемыми вопросами и подробнее ознакомиться с различными подходами к понятию вероятности, то мне хотелось бы обратить Ваше внимание на работы, помимо упомянутых ранее, которые в списке литературы значатся под номерами [22—27].

В заключение я хочу заметить, что принципиальные вопросы, относящиеся к понятию вероятности, тесно связаны с некоторыми основными вопросами математической статистики и теории информации. (Так, например, в споре об объективности или субъективности вероятности главную роль играет так называемый бейесовский метод.) Однако все это уже выходит за рамки настоящей книги. Возможно, когда-нибудь я напишу и о них. Пока же желаю Вам всего наилучшего.

Ваш Альфред Реньи

1. Ссылка на письмо Ферма от 27 октября 1654 года, см. [1], стр. 90.

2. Ср. с письмом Паскаля к Ферма от 10 августа 1660 года, см. [1], стр. 522.

3. Celeberrimae Matheseos Academiae Parisiensi, см. [1], стр. 73—74.

4. Первоначальный латинский текст гласит следующее:

«И таким образом, сочетая математические доказательства с неопределенностью случая и применяя то, что кажется противоположным, и беря наименования от того и другого, по праву присваиваем такое ошеломляющее название — математика случая».

5. См. [1], стр. 1156; [1а], стр. 9—10.

6. См. [1], стр. 1105—1107; [1а], стр. 46—47.

7. См. [1], стр. 1147; [1а], стр. 16—17.

8. См. письмо Паскаля к Ферма от 29 июля 1654 года; ср. [1], стр. 77.

9. См. письмо Паскаля к Ферма от 29 июля 1654 года; ср. также примечание 26.

10. См. [1], стр. 710; [1б], стр. 63.

11. См. [8], III Правило, стр. 12.

12. См. [4], стр. 268.

13. См. [9], V, 38, стр. 220—221; [9а], стр. 224.

14. См. [8], стр. 21. Декарт в IV Правиле своих «Правил...» так характеризует математику:

«...к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно не существенно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чем отыскивается эта мера; таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая все, относящаяся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов...».

15. См. [4]:

«Следствие, которое мы извлекаем из совместного осуществления событий, ненадежно, поскольку явления постоянно изменяются. Вообще ничто при сравнении вещей не преходяще так, как различие и перемена».

16. См. [7], стр. 33.

17. См. [6], книга четвертая, стр. 263, строки 963—966.

18. Здесь я допустил анахронизм; скачки зародились во Франции лишь после смерти Паскаля; в Англии же бега устраивались намного раньше.

19. См. [6], книга первая, стр. 23, строки 268—278.

20. См. [6], книга пятая, стр. 307, строки 418—431.

Паскаль здесь имеет в виду также следующий стих Лукреция (см. [6], книга пятая, стр. 293—294, строки 185—194):

Как же узнали они и о силе частиц изначальных
И о возможностях их в сочетаниях между собою,
Если природа сама не давала примера творенья?
Ибо начала вещей во множестве многоразлично
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и все испытуя,
Что только могут они породить из своих столкновений.
И удивляться нельзя, что они в положенья такие
Между собою пришли и в такое движенье, которым
Держится нынешний мир в постоянном своем обновленьи.

Он мог также цитировать строки 1022—1032 первой книги ([6], стр. 65), которые почти дословно совпадают с приведенным в тексте утверждением:

Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движеньях своих не условились раньше, конечно,
Но многократно свои положения в мире меняя,
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
В расположенья они, наконец, попадают, из коих
Вся совокупность вещей получилась в теперешнем виде
И, приведенная раз в состояние нужных движений,
Много бесчисленных лет сохраняется так и при этом
Делает то, что всегда обновляется жадное море...

21. Митон намекает здесь на следующий стих Лукреция (см. [6], вторая книга, стр. 79—81, строки 113—124):

> Вот посмотри: всякий раз, когда солнечный свет проникает
> В наши жилища и мрак прорезает своими лучами,
> Множество маленьких тел в пустоте ты увидишь, мелькая,
> Мечутся взад и вперед в лучистом сиянии света;
> Будто бы в вечной борьбе они бьются в сраженьях и битвах,
> В схватке бросаются вдруг по отрядам, не зная покоя,
> Или сходясь, или врозь беспрерывно опять разлетаясь.
> Можешь из этого ты уяснить себе, как неустанно
> Первоначала вещей в пустоте необъятной мятутся.
>
> Так о великих вещах помогают составить понятье
> Малые вещи, пути намечая для их достиженья.
> Кроме того, потому обратить тебе надо вниманье
> На суматоху в телах, мелькающих в солнечном свете,
> Что из нее познаешь ты материи также движенье.

Мне не известно какое-либо иное более поэтическое описание броуновского движения.

22. См. [1], стр. 1146; [1а], стр. 74.

23. См. [1], стр. 535; [1в], стр. 29.

24. См. [1], стр. 1222; [1в], стр. 279 или [1г], т. II, стр. 139.

25. Корреспонденция Паскаля и Ферма была опубликована в собрании сочинений Ферма (см. [29]), далее в переводе на английский появилась в качестве добавления к интересной книге Ф. Н. Дэвида [28] по истории теории вероятностей. Первое письмо Паскаля к Ферма потеряно; Ферма ответил (даты нет) на потерянное письмо; этот ответ сохранился. Существуют и второе письмо Паскаля от 29 июля 1654 года и ответ на него Ферма (адресованный Каркави) от 9 августа 1654 года; третье письмо Паскаля от 24 августа 1654 года, письмо Ферма от 29 августа, перекрещивающееся с этим, его же ответ от 25 сентября на третье письмо Паскаля и, наконец, четвертое (собственное) письмо Паскаля от 27 октября 1654 года. По мнению Дэвида, решение проблемы де Мере (и вместе с этим основание теории вероятностей) является преимущественно заслугой Ферма. Аргументы, которыми подкрепляет это мнение Дэвид, не вполне убедительны. Остроумное решение проблемы безобидного

раздела, состоящее в том, что не все случаи перечислялись, но использовалось рекурсивное соотношение, настраивает (ошибочно) против Паскаля, но если рассмотреть все остальное, то можно увидеть, что Паскаль одними этими идеями внес существенный вклад в развитие теории вероятностей.

26. См. [1], стр. 77. Заключительная теорема по [30], стр. 137.

27. Текст находится, например, в [1д], стр. 119—120.

28. См. [1], стр. 597; [1 в], стр. 57.

29. См. [1], стр. 1156—1157; [1в], стр. 69, 203.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. P a s c a l, Œvres complêtes, Bibliothèque de la Pléiade (с примечаниями J. Chevalier), Gallimard, Paris, 1954.

[1а] B. P a s c a l, Gedanken über Gott und den Menschen. Ausgewählt und übersetzt von Wilhelm Willige, Insel-Verlag, Leipzig, 1948.

[1б] Б. П а с к а л ь, Письма к провинциалу, СПб, 1898.

[1в] Б. П а с к а л ь, Мысли. 3-е изд., М., 1905.

[1г] Pascal's Gedanken. Fragmente und Briefe. Deutsch von C. F. Schwartz, Otto Wigand Verlag, Leipzig, 1850.

[1д] B. P a s c a l, Geist und Herz. Eine Auswahl aus dem Gesamtwerk. Herausgegeben von Hans Giesecke, Union Verlag, Berlin, 1964.

[1е] B. P a s c a l, Eine Auswahl aus seinen Schriften von Walter Warnach. Verlag L. Schwann, Düsseldorf, 1947.

[2] J. M e s n a r d, Pascal. Hatier, Paris, 1951.

[3] A. B é g u i n. Blaise Pascal in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten. Rowohlt, Hamburg, 1959.

[4] М о н т е н ь, Опыты. Пер. В. П. Глебовой, СПб, 1891.

[5] K. G. H a g s t r o e m, Les préludes antiques de la théorie des probabilités. C. E. Fritzes K. Hovbokhandel, Stockholm, 1942.

[6] Л у к р е ц и й, О природе вещей. Пер. с латинского Ф. А. Петровского. Изд. АН СССР, 1946.

[7] П л а т о н, Тимей, см. Сочинения, переведенные с греческого и объясненные Карповым, 2-е изд., СПб., 1863—1879.

[8] Р. Д е к а р т, Правила для руководства ума. В книге «Избранные произведения», Госполитиздат, 1950.

[9] M. T. C i c e r o, Gespräche in Tusculum, eingeleitet und übertragen von Karl Büchner. Artemis-Verlag, Zürich, 1952.

[9а] C i c e r o n i s, Tusculanarum Disputationum. B. G. Teubner, Leipzig, 1873. Русские издания: Письма..., тт. 1—3, М. 1949—1951; Речи, тт. 1—2, Изд. АН СССР, 1962.

[10] А. Р е н ь и, Диалоги о математике. Пер. с англ. Д. Б. Гнеденко и Е. А. Масловой. Изд-во «Мир», 1969.

[11] Th. W i l d e r, Die Iden des März. Übersetz von Herberth E. Herlitschka. Fischer-Bücherei. Frankfurt/M., 1961.

[12] A. R é n y i, Blaise Pascal, 1623—1662, *Magyar Tudomány*, 8, 102—108 (1964).

[13] I. T o d h u n t e r, A. History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace. MacMillan. Cambridge and London, 1865; Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

[14] K. Jordan, Избранные вопросы классической теории вероятностей. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956 (на венгерском яз.).

[15] Р. Мизес, Вероятность и статистика. Перевод с немецкого А. Я. Хинчина, ГИЗ, 1930.

[16] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М., ОНТИ, 1936.

[17] A. Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie. 2. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

[18] A. Rényi, On a new axiomatic theory of probability, *Asta Math. Acad. Sci. Hung.,* **6**, 285—335 (1955).

[19] B. de Finetti, La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Ann. Inst. Henrie Poincaré,* 7, (1937).

[20] J. L. Savage, The Foundations of Statistics. Wiley, New York, 1954.

[21] Studies in Subjective Probability (ed. by H. E. Kyburg and H. E. Smokler), Wiley, New York, 1964.

[22] R. Carnap, Logical Foundations of Probability. University of Chicago Press. Chicago, 1950.

[23] Э. Борель, Вероятность и достоверность, Перевод со 2-го французского издания И. Б. Погребысского. М., Изд-во «Наука», изд. 3-е, 1969.

[24] I. J. Good, Probability and the Weighing of Evidence. Griffin, London, 1950.

[25] А. Н. Колмогоров, Вероятность математическая, БСЭ, т. 7, 508—510, 1951.

[26] Théorie des probabilités, Exposé sur ses fondements et ses applications. Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[27] Г. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, т. 2, Индукция и аналогия в математике; М., ИЛ, 1957.

[28] F. N. David, Games, Gods and Gambling. (The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era). Griffin, London, 1962.

[29] P. Fermat, Œvres, vol. 2 (publiées par les soins de P. Tannery et C. Henry). Gauthier-Villars, Paris, 1894.

[30] Jakob Bernoulli, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107. Wilh. Engelmann, Leipzig, 1899.

[31] П. Лаплас, Опыт философии теории вероятностей, перевод А. И. В. под редакцией А. К. Власова, М. 1908.

СОДЕРЖАНИЕ

А. Реньи

ПИСЬМА О ВЕРОЯТНОСТИ

Редактор *И. Я. Хидекель*
Художественный редактор Ю. Л. Максимов
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 4/VIII 1970 г.
Подписано к печати 5/X 1970 г.
Бумага № 2 $84\times108^1/_{32}$=1,50 бум. л.
Усл. печ. л. 5,04
Уч.-изд. л. 4,41 Изд. № 12/5671
Цена 21 коп. Зак. 1243

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ярославский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Ярославль, ул. Свободы, 97.

В 1971 году

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»

(серия «Зарубежная фантастика»)

ВЫЙДУТ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:

Вейсс Я.

ДОМ В 1000 ЭТАЖЕЙ

Сборник научно-фантастических произведений
Перев. с чешск.

Крайтон М.

ШТАММ «АНДРОМЕДА»

Перев. с англ.

Лем Ст.

НАВИГАТОР ПИРКС. ГОЛОС НЕБА

Перев. с польск.

«СТАЛЬНОЙ ПРЫЖОК»

Сборник научно-фантастических произведений
Перев. со шведск. и норвежск.