А.М. Балдин
В.И. Гольданский
В.М. Максименко
И.Л. Розенталь

КИНЕМАТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Дорогому доктору Мюллеру
с глубокой благодарностью за
перевод первого издания на шведский язык

А. М. БАЛДИН, В. И. ГОЛЬДАНСКИЙ
В. М. МАКСИМЕНКО, И. Л. РОЗЕНТАЛЬ

КИНЕМАТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Издание второе, переработанное и дополненное

АТОМИЗДАТ МОСКВА 1968

УДК 539. 172 + 531 1

Кинематика ядерных реакций. Балдин А. М.

За последние годы кинематические методы анализа взаимодействия элементарных частиц и ядер получили самое широкое распространение и развитие. Основанные на хорошо изученных законах сохранения, они служат руководящей нитью при анализе экспериментальных данных. Поэтому во втором издании книга при сохранении общего плана подвергалась коренной переработке, чтобы расширить круг читателей и учесть многочисленные новые результаты (кинематический анализ резонансов, кинематика файрболов, определение массы мишени реакции с поляризованными частицами, следствия несохранения четности и т. д.).

Книга состоит из двух частей (классическая и квантовая кинематика), содержит изложение общих методов кинематического анализа ядерных реакций и значительный справочный материал.

3-3-15
10 — 68

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание книги «Кинематика ядерных реакций» [1] давно разошлось. За это время книга неоднократно переводилась на многие языки (английский — дважды, немецкий, польский и японский). Такое внимание объясняется, конечно, не какими-то особыми достоинствами книги, а просто насущной потребностью экспериментаторов в концентрированном изложении кинематических методов анализа, получивших самое широкое распространение. По существу вследствие отсутствия теории сильного взаимодействия кинематические методы, основанные на хорошо изученных законах сохранения и релятивистских преобразованиях, являются обычно основой анализа экспериментальных данных об элементарных частицах.

Все это привело к необходимости при сохранении общего плана первого издания коренным образом переработать книгу для того, чтобы, с одной стороны, сделать ее более доступной широкому кругу физиков, а с другой — учесть некоторые кинематические методы, получившие широкое распространение в последние годы (кинематический анализ резонансов, кинематика файрболов, определение массы мишени, кинематика реакций с поляризованными частицами, матрица плотности, формализм спиральностей и т. д.).

Вместе с тем круг научных интересов авторов первого издания несколько сместился и поэтому в авторский коллектив был включен В. М. Максименко, который взял на себя основную тяжесть по переработке части I, посвященной классической кинематике. Часть II (квантовомеханическая) существенно дополнена и в значительной степени переработана А. М. Балдиным. Как и ранее, книга содержит изложение общих методов кинематического анализа ядерных реакций и большой справочный материал.

Авторы благодарны читателям, которые прислали свои замечания, пособствующие устранению недочетов первого издания.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию читателей книга носит название «Кинематика ядерных реакций». Мы понимаем под кинематикой совокупность соотношений, основанных на законах сохранения в их классической и квантовой форме и не связанных со спецификой взаимодействий.

Книга состоит из двух частей. В открывающих первую часть двух вводных главах читателю кратко напоминаются некоторые основные характеристики движения с релятивистскими скоростями, а также излагаются важнейшие для дальнейшего изложения релятивистские преобразования. Здесь же определяются две широко используемые далее системы координат — лабораторная система и система, связанная с центром тяжести,— и даются формулы для перехода от одной из этих систем к другой.

Последующие главы первой части посвящены классической кинематике взаимодействий (столкновений и распадов) с образованием двух, трех и многих частиц. При наличии в конечном состоянии лишь двух частиц существует вполне определенная связь между углами их вылета или углом вылета частицы и ее энергией. При образовании в конечном состоянии трех или многих частиц связь углов их вылета и энергий не является однозначной, и в этих случаях приходится ограничиться нахождением различных экстремальных соотношений. Рассмотрение угловых и энергетических распределений при множественном образовании частиц производится на основе статистической теории Ферми. Оправданием включения этого раздела в книгу по кинематике может служить то обстоятельство, что в соответствии с первоначальной концепцией Ферми угловые и энергетические распределения множественных процессов основываются на законах сохранения энергии и импульса.

Вторая часть книги посвящена квантовомеханическому рассмотрению кинематики ядерных реакций.

В этой части анализируется одно из фундаментальных понятий, роль которого в интерпретации ядерных взаимодействий все возрастает, именно матрица рассеяния (S-матрица), и рассматриваются основные свойства этой матрицы. На основании теории матрицы рассеяния и теории преобразований Дирака излагаются связанные с законами сохранения свойства поперечных сечений ядерных реакций. Используемая в книге теория преобразований Дирака дает возможность простого введения без использования теории групп — различных коэффициентов векторного сложения, применяемых в теории ядерных реакций (коэффициенты Клебша — Гордана, коэффициенты Рака, Z-коэффициенты, X-коэффициенты).

Отдельно рассматривается специальный важный случай ядерных реакций, происходящих с участием фотонов.

Отнюдь не преследуя цели создания справочника по кинематике ядерных реакций, мы тем не менее сочли целесообразным включить в книгу ряд таблиц, графиков, числовых данных и примеров.

Первая часть книги написана В. И. Гольданским и И. Л. Розенталем, вторая часть — А. М. Балдиным.

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Предмет ядерной физики и физики высоких энергий в значительной степени состоит в изучении реакций, происходящих с элементарными частицами и атомными ядрами,— упругого рассеяния, неупругих взаимодействий, спонтанных распадов. Все эти реакции представляют собой конкретные проявления основных типов взаимодействий — сильного, слабого, электромагнитного

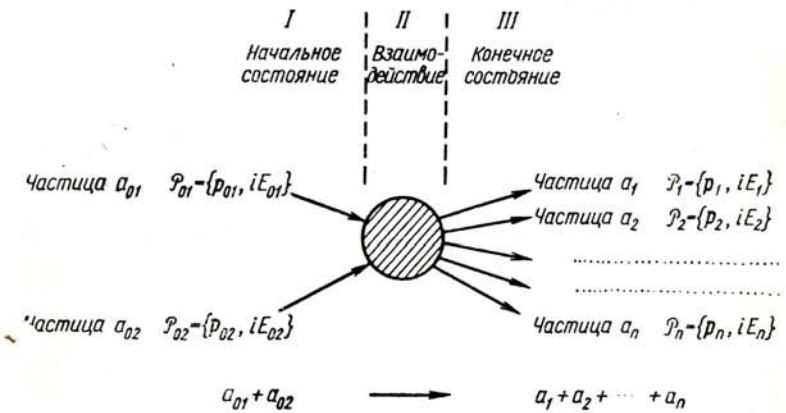


Рис. 1. Общая схема ядерной реакции.

и, возможно, гравитационного. Несмотря на чрезвычайное обилие и разнообразие таких реакций, их можно в самом общем виде представить единой схемой типа диаграммы Фейнмана (рис. 1), четко различая три стадии реакции.

I. Начальное состояние — две свободные, невзаимодействующие частицы a_{01} и a_{02} (спонтанный распад можно рассматривать как частный случай, когда масса и импульс одной из частиц, например a_{02}, равны нулю).

II. Соударение частиц a_{01} и a_{02}, в результате которого между ними возникает то или иное взаимодействие. В общем случае мы не будем конкретизировать характер этого взаимодействия, изобразив его на рис. 1 «черным ящиком» (заштрихованная область). Обычное представление об индивидуальных частицах на этой стадии реакции часто бывает неприменимо.

III. Конечное состояние — n свободных невзаимодействующих частиц $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые будем называть продуктами реакции или вторичными частицами.

Символически запишем общую реакцию такого типа в виде

$$a_{01}+a_{02}\to a_1+a_2+\ldots+a_n. \qquad \text{(B.1)}$$

В характеристиках реакции (B.1) проявляются закономерности двух типов: 1) кинематические, вытекающие из различных законов сохранения, согласно которым определенные физические величины должны иметь одно и то же значение в начальном и конечном состояниях независимо от того, что делается при взаимодействии в «черном ящике»*; 2) динамические, обусловленные динамикой взаимодействия, т. е. структурой «черного ящика».

Первая часть книги посвящена кинематическим соотношениям, обусловленным законами сохранения энергии и импульса, и в дальнейшем в этой части книги, говоря о кинематических соотношениях, будем подразумевать именно такие соотношения.

Роль закономерностей этих двух типов — кинематических и динамических — при анализе экспериментальных данных совершенно различна. Кинематические соотношения обладают такой же степенью строгости, как и законы сохранения энергии и импульса, на основании которых они получены. Поэтому кинематические соотношения можно с абсолютной уверенностью использовать при анализе результатов эксперимента: они позволяют идентифицировать тип реакции и природу отдельных ее продуктов, установить связь между углами вылета и энергиями различных вторичных частиц, или между углами вылета и энергией одной и той же вторичной частицы, определить разрешенные области энергий и углов, в которых следует ожидать появления той или иной вторичной частицы, найти энергетические пороги реакций и т. д.

Иное положение с динамическими характеристиками. Знание динамики имеет первостепенное значение для понимания явлений в микромире, для построения последовательной и строгой теории элементарных частиц и их взаимодействий. Но пока что динамика многих реакций еще далеко не изучена, теоретические представления зачастую носят характер модельных построений, нуждающихся в экспериментальной проверке, поэтому информацию о динамических закономерностях нужно в конечном счете извлекать из экспериментальных данных. Очень важно при анализе экспериментальных

* Характер взаимодействия определяет лишь соответствующий «набор» законов сохранения, поскольку наряду с универсальными законами сохранения (сохранение энергии и импульса, момента количества движения, электрического заряда, барионного числа и т. д.) существуют также и приближенные законы сохранения, справедливые для одних взаимодействий и нарушающиеся другими (сохранение изотопического спина, странности или гиперзаряда, пространственной четности и т. д.).

результатов отделить интересные для физической интерпретации динамические закономерности от сравнительно простых, в некотором смысле даже тривиальных, кинематических, т. е., образно говоря, «выделить динамику на кинематическом фоне». Примером может служить метод обнаружения резонансов элементарных частиц по распределению эффективных масс.

Часто бывает также необходимо пересчитывать характеристики частиц и реакций из одной системы координат в другую, движущуюся относительно первой с постоянной скоростью. Следовательно, планирование и анализ современных экспериментов в ядерной физике и физике высоких энергий практически немыслимы без самого широкого использования кинематических соотношений. В последние годы по релятивистской кинематике появилось несколько работ [2—9], содержание которых нашло отражение в настоящей книге.

В ядерной физике чаще всего приходится иметь дело с частицами, скорости которых сравнимы со скоростью света, поэтому в основу рассмотрения необходимо положить кинематику специальной теории относительности. Хотя предполагается, что читатель хорошо знаком с обычным курсом теории относительности (например, по книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [10]), тем не менее ради удобства и целостности материала первая глава посвящена краткому изложению основ релятивистской кинематики. Естественно, что мы будем широко использовать четырехмерный формализм. Однако окончательные соотношения, как правило, приводятся для энергий и трехмерных импульсов, т. е. тех величин, которые непосредственно измеряются в экспериментах. Все кинематические соотношения представлены в общем релятивистском виде, но обычно рассматриваются и два важных частных случая:

1) нерелятивистский, когда скорости частиц много меньше скорости света и можно пользоваться классической механикой. Нерелятивистские формулы дают достаточно хорошее приближение, например, для ядерных реакций при малых энергиях;

2) ультрарелятивистский, когда скорости частиц близки к скорости света или равны ей, в этом случае формулы часто значительно упрощаются. Ультрарелятивистские формулы широко применяются для описания частиц при очень больших энергиях (например, в космических лучах) или частиц с массой покоя, равной нулю (фотоны, нейтрино).

Часто одна и та же формула будет повторяться в нескольких вариантах, и читатель, использующий книгу в справочных целях, выберет для конкретного применения наиболее удобную запись.

В ядерной физике энергию принято измерять в электронвольтах ($1\ эв = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ дж = 1{,}602 \cdot 10^{-12}\ эрг$). Практически используются более крупные единицы энергии.

В кинематике релятивистских частиц обычно применяется весьма удобная рациональная система единиц для измерения кинематических величин (энергии E, импульса p, массы m, скорости v), которая основана на том, что скорость света

$$c = 1 \tag{B.2}$$

(в системе единиц СГСЕ $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}\ см/сек$). Условие $c = 1$ позволяет записывать кинематические формулы в более компактном виде, избавившись от различных степеней c (например,

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} \text{ вместо } E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}).$$

Поскольку

$$\left.\begin{aligned} [\text{p}] &= \text{энергия}/c; \\ [\text{т}] &= \text{энергия}/c^2, \end{aligned}\right\} \tag{B.3}$$

то при $c = 1$ энергия, импульс и масса имеют одинаковую размерность и измеряются в энергетических единицах, а скорость — в единицах скорости света. По традиции, однако, принято сохранять c при написании единиц измерения импульса и массы, т. е. писать для импульсов *Мэв/с*, *Гэв/с* и т. д., для масс — *Мэв/с²*, *Гэв/с²* и т. д.

Для того чтобы от рационализированной с помощью условия (B.2) записи кинематических формул перейти к обычной, необходимо произвести замену:

$$\left.\begin{aligned} E &\to E; \\ p &\to pc; \\ m &\to mc^2; \\ \beta &\to \frac{v}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

В заключение приведем основные обозначения.

Кинематические характеристики индивидуальной частицы

В *Л*-системе:

$\mathbf{p}_i$ — импульс;
p_i — абсолютная величина импульса;
E_i — полная энергия;
T_i — кинетическая энергия;

$$\mathcal{P}_i = \{\mathbf{p}_i, iE_i\} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_i^{(1)} \\ \mathcal{P}_i^{(2)} \\ \mathcal{P}_i^{(3)} \\ \mathcal{P}_i^{(4)} \end{pmatrix} \text{ — 4-импульс;}$$

m_i — масса;
$p_{i\parallel}$ — продольный импульс;
$p_{i\perp}$ — поперечный импульс;
β_i — скорость частицы;

$\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}$ — лоренц-фактор;

$r_i = \operatorname{Arth}\beta_i = \operatorname{Arch}\gamma_i$ — быстрота;

ϑ_i, φ_i — полярный и азимутальный углы вылета, отсчитываемые относительно направления движения первичных сталкивающихся частиц;

Ω_i = телесный угол;

$\lambda_i = \lg\operatorname{tg}\vartheta_i$ — переменная Ландау.

Индексы $i = 01$ и 02 относятся к сталкивающимся первичным частицам, причем первый индекс — к бомбардирующей, второй — к частице-мишени. Если в начальном состоянии только одна частица (распад), то ей присваивается индекс $i=0$. Индексы $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ относятся к вторичным частицам. Для частиц определенного сорта индекс i иногда заменяется символом этой частицы (π — для π-мезонов, N — для нуклонов и т. д.). В первых параграфах книги, где речь идет об общих свойствах кинематики релятивистских частиц, индекс i опускается.

В *Ц*-системе:

Используются такие же обозначения, как в *Л*-системе, снабженные «звездочкой», — $\mathbf{p}_i^*$, E_i^*, ϑ_i^*, β_i^*, γ_i^* и т. д. Исключение составляют масса частицы, для которой, как для инвариантной величины, сохраняется обозначение m_i, и переменная λ_i, вместо которой определяется переменная

$$\tau_{i} = \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_i^*}{2};$$

$$\varkappa_i = \beta_c/\beta_i^*.$$

Кинематические характеристики, относящиеся к группе частиц или к элементарному акту взаимодействия в целом

β_c — скорость *Ц*-системы относительно *Л*-системы;

$\gamma_c = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_c^2}}$ — лоренц-фактор *Ц*-системы относительно *Л*-системы;

E_c — полная энергия в *Ц*-системе;

s — квадрат полной энергии в *Ц*-системе; $t = -\Delta^2$, где Δ^2 — квадрат передаваемого 4-импульса } инвариантные переменные Мандельстама

$\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,n}$ — инвариантная эффективная масса n частиц;

$E_{01}^{(\text{порог})}$ или $T_{01}^{(\text{порог})}$ — пороговая полная или кинетическая энергия первичной частицы:

Q — энергия реакции;

σ — полное эффективное сечение [1];

$\dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{d^2N}{dpd\Omega}$ — дифференциальное распределение вторичных частиц по импульсам и углам (другие дифференциальные распределения обозначаются аналогично).

[1] Эти традиционные обозначения используются в разных местах книги, и их совпадение не должно вызывать недоразумения.

Для некоторых дифференциальных распределений используются специальные обозначения

$f(\cos\vartheta^*)$ — дифференциальное угловое распределение в *Ц*-системе;

$\omega_n(E_c, p^*)$ — импульсное распределение в *Ц*-системе в реакции с образованием n частиц.

$F(\leqslant\vartheta)$ — интегральное угловое распределение (доля частиц, вылетающих под углом $\leqslant\vartheta$);

$$y = \lg\frac{F(\leqslant\vartheta)}{1-F(\leqslant\vartheta)};$$

$R_n(\mathbf{p}, E; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — инвариантный фазовый объем n частиц;

$\rho_n(\mathbf{p}, E; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — неинвариантный фазовый объем n частиц;

n — полное число вторичных частиц;

n_π — полное число вторичных π-мезонов;

n_s — число вторичных заряженных частиц;

σ — дисперсия распределения в координатах λ (см. сноску на стр. 10);

ψ — угол разлета двух частиц;

γ_r — относительный лоренц-фактор двух частиц;

$K^{(Л)}$ — коэффициент неупругости в *Л*-системе;

$K^{(3)}$ — коэффициент неупругости в зеркальной системе координат.

Глава 1

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

§ 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Для описания любого физического явления необходимо иметь систему отсчета, т. е. систему пространственных координат и связанную с ней систему отсчета времени. Первый постулат теории относительности — принцип относительности — гласит, что все законы природы (а следовательно, и результаты всех физических экспериментов) не зависят от равномерного прямолинейного движения системы отсчета, в которой производится наблюдение. Таким образом, существует бесконечное множество эквивалентных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями; такие системы называют инерциальными, или лоренцевыми системами отсчета, и любая из них в принципе может быть использована для описания физического явления. Практически же в ядерной физике используется несколько определенных систем отсчета, выбор которых диктуется экспериментальной практикой или теоретическими соображениями.

Система отсчета, которая связана с приборами исследователя, с его лабораторией, носит название лабораторной системы (сокращенно будем называть ее *Л*-системой). Как правило, в подавляющем большинстве опытов всю экспериментальную информацию о физическом явлении получают непосредственно в *Л*-системе. В наиболее обычной постановке эксперимента по изучению реакции с элементар-

ными частицами самого общего типа [см. формулу (В.1)] пучок быстрых частиц a_{01} направляется на неподвижную мишень, которая содержит частицы a_{02}. Частицы a_{02}, вообще говоря, могут двигаться внутри блока из вещества мишени (например, движение нуклонов внутри ядра), но кинетическая энергия этого движения обычно много меньше кинетической энергии налетающей частицы a_{01}:

$$T_{02} \ll T_{01}. \qquad (1.1)$$

Поэтому с хорошей степенью точности можно считать, что $Л$-система совпадает с системой покоя частицы a_{02} (рис. 2). В подавляющем большинстве случаев обычно это и предполагается. При более точном анализе, особенно в области сравнительно небольших энергий, необходим учет внутриядерного движения, например при вычислении энергетических порогов различных реакций (см. § 10).

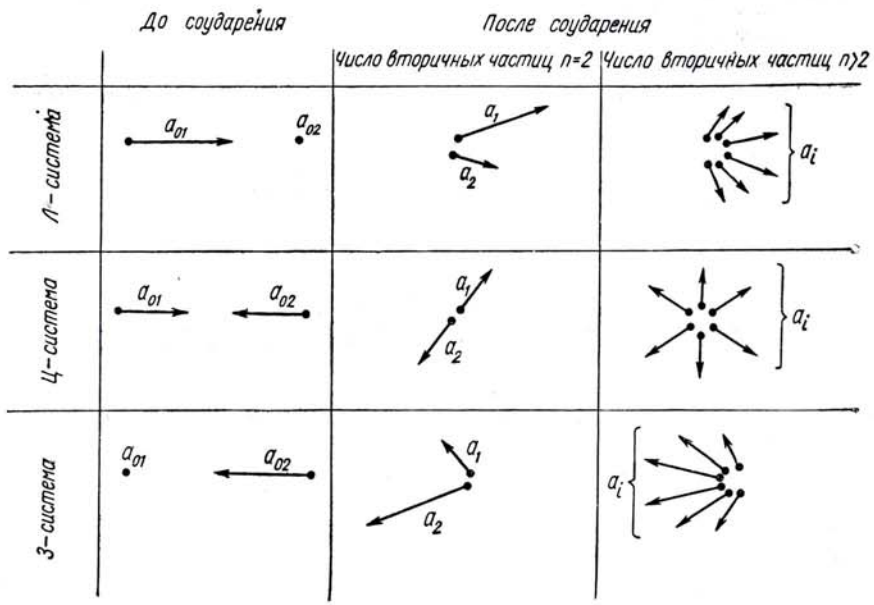


Рис. 2. Схематическая картина столкновения частиц a_{01} и a_{02} и разлета вторичных частиц a_1, a_2, ..., a_n в $Л$-системе, $Ц$-системе и $З$-системе (стрелками изображены трехмерные импульсы частиц).

Другая, обычно используемая, важная система координат — система центра инерции, или центра масс, которую в дальнейшем будем сокращенно называть $Ц$-системой, а величины в ней отмечать звездочкой (E^*, $\mathbf{p}^*$ и т. д.). По определению $Ц$-системы (см. рис. 2) сумма трехмерных импульсов всех частиц в ней равна нулю:

$$\mathbf{p}^*_{01} + \mathbf{p}^*_{02} = \mathbf{p}^*_1 + \mathbf{p}^*_2 + \ldots + \mathbf{p}^*_n = 0. \qquad (1.2)$$

Эта система характеризуется тем, что в ней ядерные реакции обладают максимальной степенью симметрии, что приводит к значительному упрощению многих формул. Например, если в начальном или конечном состоянии только две частицы, то они должны всегда двигаться в $Ц$-системе под углом 180° друг к другу, и, следовательно, их угловые распределения не изменяются при замене угла вылета одной частицы на угол, дополнительный к углу вылета второй частицы, и т. д. Кроме того, взаимодействие сталкивающихся частиц и энергия, которая может быть выделена в том или ином ядерном превращении, определяются кинетической энергией их относительного движения, т. е. кинетической энергией в $Ц$-системе, независимо от того, какова энергия движения каждой из частиц относительно наблюдателя. В частности, и энергетические пороги реакций определяются именно кинетической энергией в $Ц$-системе (см. § 10).

Использование $Ц$-системы оказывается особенно удобным и для теоретических построений, поэтому чаще всего для сопоставления теоретических и экспериментальных характеристик приходится или результаты эксперимента пересчитывать из $Л$-системы в $Ц$-систему, или, наоборот, результаты теоретического расчета переводить из $Ц$-системы в $Л$-систему. Заметим кстати, что формулы для таких пересчетов в $Ц$-систему и обратно нередко имеют более простой вид, чем для переходов из $Л$-системы в какую-либо произвольную систему координат. Соотношения в $Ц$-системе приобретают особое значение также в связи с быстрым развитием техники встречных пучков.

Иногда приходится использовать не только общую $Ц$-систему, т. е. $Ц$-систему сталкивающихся частиц или всех продуктов реакции, но и $Ц$-систему лишь некоторой части определенным образом выбранных вторичных частиц.

Для анализа и интерпретации экспериментальных данных иногда удобно ввести зеркальную, или антилабораторную, систему координат ($З$-систему), относительно которой налетающая частица a_{01} покоится (см. рис. 2). Если $m_{01} = m_{02}$, то в некотором смысле $З$-система представляет собой действительно зеркальное отображение $Л$-системы (частицы a_{01} и a_{02} меняются местами и т. д.).

Некоторые авторы (в основном теоретических работ) используют также систему равных скоростей, т. е. систему координат, в которой налетающая частица и частица-мишень движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Естественно, что при $m_{01} = m_{02}$ система равных скоростей совпадает с $Ц$-системой.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДВИЖЕНИЯ. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Движение релятивистской частицы * в некоторой системе координат ** полностью характеризуется заданием ее массы покоя m

* Термин «частица» в данном случае означает любой движущийся объект.

** Для различных величин в этой системе координат будем употреблять те же обозначения, что и в $Л$-системе, т. е. в качестве произвольной системы отсчета выбрана $Л$-система. Естественно, что все формулы этого параграфа справедливы в любой инерциальной системе отсчета.

и скорости $\boldsymbol{\beta}$. Полная энергия E и импульс $\mathbf{p}$ частицы в этой системе координат определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{p} &= \frac{m\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Кинетическая энергия T релятивистской частицы определяется как разность между полной энергией частицы и ее массой покоя.

$$T = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{2.1'}$$

Величины E, T и p очевидным образом выражаются друг через друга:

$$\left.\begin{aligned} E &= T + m = \sqrt{p^2 + m^2}; \\ T &= E - m = \sqrt{p^2 + m^2} - m; \\ p &= \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{T(T+2m)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Укажем еще полезные выражения для абсолютной величины скорости β через E, T и p:

$$\beta = \frac{p}{E} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{\sqrt{T(T+2m)}}{T+m}. \tag{2.3}$$

При рассмотрении релятивистского движения очень удобно использовать безразмерную величину γ, которая определяется как полная энергия частицы, измеренная в единицах ее массы покоя, т. е.

$$E = \gamma m, \tag{2.4}$$

и которую мы будем в дальнейшем называть лоренц-фактором частицы относительно данной системы отсчета. В этих обозначениях импульс

$$\mathbf{p} = \gamma\boldsymbol{\beta}m, \tag{2.4'}$$

а кинетическая энергия

$$T = (\gamma - 1)\, m. \tag{2.4''}$$

Иногда применяется также величина

$$\eta = \gamma\beta, \tag{2.5}$$

которая, как видно из выражения (2.4'), представляет собой абсолютную величину импульса частицы, измеренную в единицах ее массы покоя.

Все три безразмерные величины — β, γ и η — связаны между собой простыми соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+1}}; \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\eta^2+1}; \\ \eta &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\gamma^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Существует очень удобное параметрическое представление β, γ и η, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \operatorname{th} r; \\ \gamma &= \operatorname{ch} r; \\ \eta &= \operatorname{sh} r, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где r — параметр, который иногда называют «быстротой». Равенства (2.7) позволяют быстро переходить от одной величины к другой с помощью любых математических таблиц, содержащих гиперболические функции. Можно указать также и другое, хотя и менее удобное, параметрическое представление β, γ и η, выраженное с помощью обычных тригонометрических функций:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \sin\xi; \\ \gamma &= \sec\xi = \frac{1}{\cos\xi}; \\ \eta &= \operatorname{tg}\xi, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

где ξ — параметр.

Зависимость γ и η от β приведена на рис. 3, а в приложении I даны значения β, γ и η для различных частиц в широком интервале энергий. В нерелятивистском пределе формулы (2.1) и (2.1') сводятся к обычным классическим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} E &= m + \frac{m\beta^2}{2}; \\ T &= \frac{m\beta^2}{2}; \\ \mathbf{p} &= m\boldsymbol{\beta}; \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta \ll 1; \\ &\gamma \approx 1; \\ &\eta \approx 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Заметим, что при этом быстрота $r \ll 1$ и

$$r \approx \beta, \tag{2.11}$$

т. е. быстрота в нерелятивистском случае численно равна абсолютной величине скорости. В ультрарелятивистском случае

$$E \approx p \approx T \tag{2.12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \beta &\approx 1; \\ \gamma &\gg 1; \\ \eta &\approx \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Переменные, характеризующие состояние движения релятивистских частиц, чрезвычайно удобно представлять в виде компонент

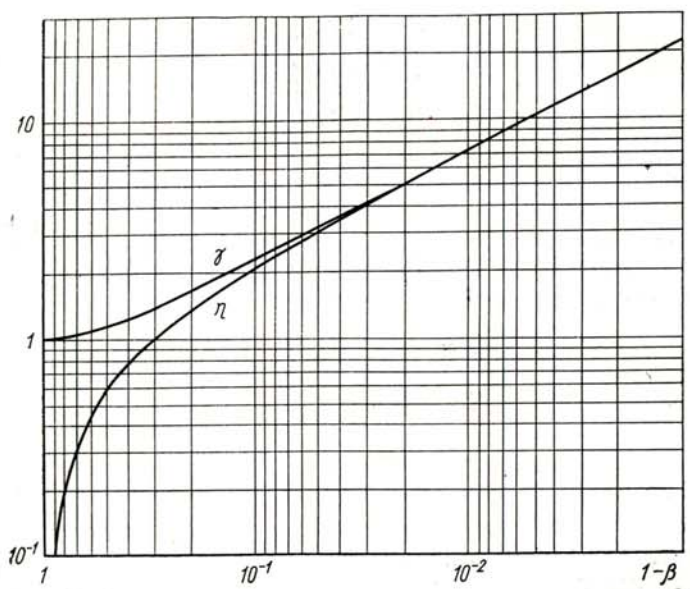


Рис. 3. Зависимость γ и η от скорости β.

четырехмерного вектора. Четырехмерная геометрическая интерпретация релятивистских соотношений отражает глубокую взаимосвязь пространства и времени, установленную теорией относительности. Пространственные координаты некоторого события $\mathbf{r}$ и его время t изображают точкой (мировая точка) в фиктивном четырехмерном пространстве Минковского, по трем осям которого откладываются компоненты трехмерного радиуса-вектора $\mathbf{r}$

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z \tag{2.14}$$

и по четвертой — мнимая величина

$$x_4 = \mathrm{i}t. \tag{2.14'}$$

Четырехмерный радиус-вектор с компонентами (2.14) и (2.14′) обозначим

$$s = \{\mathbf{r},\ \mathrm{i}t\}, \tag{2.15}$$

или в матричной записи

$$s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{i}t \end{pmatrix}. \tag{2.15'}$$

Для удовлетворения первого постулата теории относительности (об инвариантности законов природы относительно преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой) все физические величины должны представлять собой скаляры, спиноры, векторы или тензоры в пространстве Минковского. В дальнейшем при рассмотрении кинематики потребуется лишь понятие скаляра и четырехмерного вектора. Напомним, что в общем случае четырехмерным вектором (сокращенно 4-вектором) называется четырехкомпонентная величина

$$a = \{\mathbf{A},\ \mathrm{i}A_0\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

компоненты которой a_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) преобразуются так же, как компоненты 4-радиус-вектора s; следовательно, все 4-векторы трансформируются одинаковым образом. По аналогии с 4-радиус-вектором s первые три компоненты ($\mu = 1, 2, 3$) называются пространственными, а $a_4 = \mathrm{i}a_0$ — временно́й.

Скалярное произведение двух 4-векторов a и b определяется как

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \mathbf{AB} - A_0 B_0. \tag{2.17}$$

Квадрат 4-вектора — скалярное произведение 4-вектора на самого себя:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \mathbf{A}^2 - A_0^2. \tag{2.18}$$

Квадрат 4-вектора может быть положительным ($a^2 > 0$, пространственноподобные 4-векторы) и отрицательным ($a^2 < 0$, времениподобные 4-векторы). Скалярное произведение двух 4-векторов и квадрат 4-вектора инварианты относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Вернемся к кинематическим характеристикам частицы в некоторой произвольной системе координат.

Трехмерный импульс частицы $\mathbf{p}$ и ее полная энергия E образуют 4-вектор энергии-импульса (4-импульс) *:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P} = \{\mathbf{p}, iE\} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^{(1)} \\ \mathcal{P}^{(2)} \\ \mathcal{P}^{(3)} \\ \mathcal{P}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE \end{pmatrix} \\ p^2 = p^2 - E^2 = -m^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Определим также четырехмерную скорость (4-скорость) частицы

$$\left.\begin{aligned} u = \{\gamma\boldsymbol{\beta}, i\gamma\} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta_x \\ \gamma\beta_y \\ \gamma\beta_z \\ i\gamma \end{pmatrix} \\ u^2 = \gamma^2\beta^2 - \gamma^2 = -1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

Четырехмерный импульс и 4-скорость связаны простым соотношением, совпадающим с обычным классическим выражением

$$\mathcal{P}^{(\mu)} = mu^{(\mu)}. \qquad (2.21)$$

Четырехмерный импульс можно построить не только для отдельной частицы, но и для любой совокупности невзаимодействующих частиц.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА I (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА)

Рассмотрим теперь явные выражения для преобразований Лоренца, связывающих кинематические характеристики частицы в двух инерциальных системах отсчета, одна из которых движется относительно другой с постоянной скоростью. В качестве конкретного примера двух таких систем отсчета выберем *Л*- и *Ц*-системы — практически наиболее важный частный случай двух инерциальных систем. Однако такой выбор не снижает общности приведенных формул, поскольку при рассмотрении релятивистских преобразований различных величин никакие специфические свойства *Ц*-системы не используются, кроме того, что она движется относительно *Л*-системы с постоянной скоростью $\boldsymbol{\beta}_c$ (γ_c — соответствующий лоренц-фактор) и поэтому все приведенные формулы справедливы для любых инерциальных систем отсчета.

Из второго постулата теории относительности (о постоянстве скорости света в любой инерциальной системе отсчета) следует

* Индекс компоненты ($\mu = 1, 2, 3, 4$) для 4-импульса и для 4-скорости будем помещать вверху в скобках с тем, чтобы сохранить нижние индексы для обозначения «номера» частицы.

инвариантность интервала — расстояния между двумя точками в четырехмерном пространстве, и, следовательно, длины любого 4-вектора. Преобразования четырехмерных координат, оставляющие неизменной длину 4-вектора, сводятся к поворотам и параллельным переносам в четырехмерном пространстве. Любой поворот в таком пространстве разложим на повороты в шести взаимно перпендикулярных плоскостях x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4. С геометрической точки зрения собственно преобразования Лоренца —

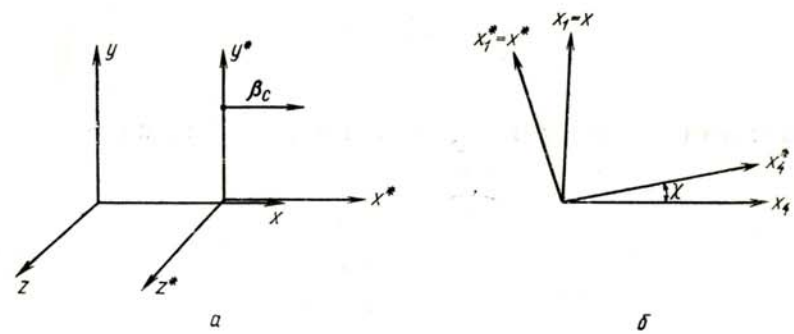


Рис. 4. Иллюстрация к специальному преобразованию Лоренца: *а* — трехмерная картина; *б* — четырехмерная картина.

повороты в плоскостях, определяемых временно́й осью x_4 и одной из пространственных осей. Остальные преобразования — повороты в обычном трехмерном пространстве и параллельные переносы начала координат или начала отсчета времени — представляют собой преобразования в пределах одной и той же инерциальной системы отсчета, и они нас здесь интересовать не будут *. В соответствии с этим направим одноименные пространственные оси в *Л*- и *Ц*-системах параллельно друг другу, считая, что в некоторый начальный момент времени координатные системы совпадали. Сначала для упрощения выкладок положим, что вектор $\boldsymbol{\beta}_c$ направлен вдоль оси x ** (рис. 4, *а*). В этом случае преобразования Лоренца означают поворот в плоскости x_1x_4 на мнимый угол χ (см. рис. 4, *б*), удовлетворяющий равенству ***

$$\operatorname{tg}\chi = i\beta_c, \qquad (3.1)$$

* Общее преобразование Лоренца, включающее пространственные повороты и трансляции, можно найти, например, в книгах [11] и [12]. См. также § 6.

** Преобразование Лоренца при таком выборе координатных осей принято называть специальным преобразованием Лоренца.

*** Заметим, что угол χ непосредственно связан с быстротой r_c в параметрической записи (2.7): поскольку $\operatorname{th} r_c = \beta_c$, то $\chi = ir_c$.

и для 4-импульсов

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p},\ iE\} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

и

$$\mathcal{P}^* = \{\mathbf{p}^*,\ iE^*\} = \begin{pmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ iE^* \end{pmatrix} \tag{3.2'}$$

описывающих частицу в двух системах координат, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ iE^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_c & 0 & 0 & i\gamma_c\beta_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_c\beta_c & 0 & 0 & \gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

или сокращенно

$$\mathcal{P}^* = L(\boldsymbol{\beta}_c)\,\mathcal{P}. \tag{3.3'}$$

Матрицу $L(\boldsymbol{\beta}_c)$ преобразования Лоренца иногда бывает удобно записать через быстроту r_c [см. формулу (2.7)]:

$$L(\boldsymbol{\beta}_c) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} r_c & 0 & 0 & i \operatorname{sh} r_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \operatorname{sh} r_c & 0 & 0 & \operatorname{ch} r_c \end{pmatrix}. \tag{3.3''}$$

Поскольку $Л$-система движется относительно $Ц$-системы со скоростью

$$\boldsymbol{\beta}_c^* = -\boldsymbol{\beta}_c \tag{3.4}$$

то матрица обратного преобразования

$$\mathcal{P} = L^{-1}(\boldsymbol{\beta}_c)\,\mathcal{P}^* \tag{3.5'}$$

получается из $L(\boldsymbol{\beta}_c)$ заменой

$$\boldsymbol{\beta}_c \to -\boldsymbol{\beta}_c, \tag{3.4'}$$

т. е.

$$L^{-1}(\boldsymbol{\beta}_c) = L(-\boldsymbol{\beta}_c), \tag{3.4''}$$

или

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_c & 0 & 0 & -i\gamma_c\beta_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_c\beta_c & 0 & 0 & \gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ iE^* \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Естественно, что формулы (3.3) и (3.5) справедливы и для любого произвольного 4-вектора.

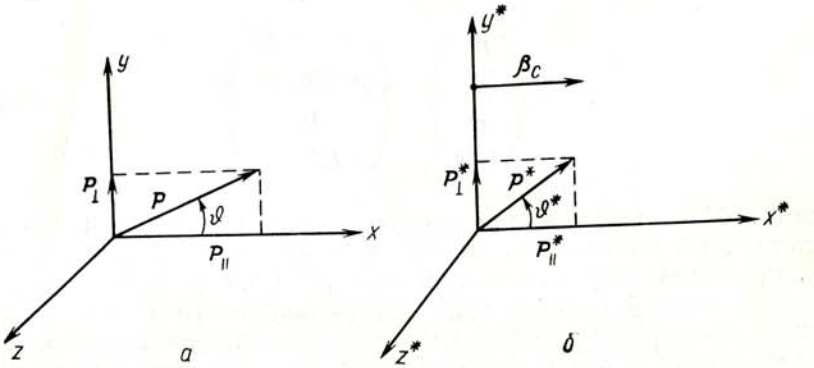


Рис. 5. Разложение импульса частицы на продольную и поперечную составляющие: *а* — *Л*-система; *б* — *Ц*-система.

Преобразования (3.3) и (3.5) для отдельных компонент дают:

$$\left.\begin{aligned} p_x^* &= \gamma_c (p_x - \beta_c E); \\ p_y^* &= p_y; \\ p_z^* &= p_z; \\ E^* &= \gamma_c (E - \beta_c p_x) \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

и обратное преобразование

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \gamma_c (p_x^* + \beta_c E^*); \\ p_x &= p_x^*; \\ p_y &= p_y^*; \\ E &= \gamma_c (E^* + \beta_c p_x^*). \end{aligned}\right\} \tag{3.6'}$$

Практически при расчетах удобно повернуть обе системы координат вокруг оси x — x^* так, чтобы рассматриваемая частица двигалась в плоскости xy — x^*y^* (рис. 5), и разложить импульс частицы на две составляющие — параллельную вектору $\boldsymbol{\beta}_c$ (продольный импульс $\mathbf{p}_\parallel$ и $\mathbf{p}_\parallel^*$) и перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\beta}_c$ (поперечный импульс $\mathbf{p}_\perp$ и $\mathbf{p}_\perp^*$):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}_\parallel + \mathbf{p}_\perp; \\ \mathbf{p}^* &= \mathbf{p}_\parallel^* + \mathbf{p}_\perp^*. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Четырехмерные импульсы (3.2) и (3.2′) в этих обозначениях записываются в виде:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_\parallel \\ p_\perp \\ 0 \\ iE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\vartheta \\ p\sin\vartheta \\ 0 \\ i\,E \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathcal{P}^* = \begin{pmatrix} p^*_\parallel \\ p^*_\perp \\ 0 \\ iE^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^*\cos\vartheta^* \\ p^*\sin\vartheta^* \\ 0 \\ i\,E^* \end{pmatrix} \tag{3.8′}$$

где ϑ и ϑ^* — углы между импульсом частицы и вектором $\boldsymbol{\beta}_c$ в соответствующей системе координат. Другими словами, мы перешли к сферическим координатам (p, ϑ, φ) и $(p^*, \vartheta^*, \varphi^*)$, выбрав направление скорости $\boldsymbol{\beta}_c$ (ось x — x^*) в качестве полярной оси и отсчитывая азимутальные углы φ и φ^* от плоскости, в которой движется частица (плоскость xy — x^*y^*). Азимутальный угол при преобразованиях Лоренца не меняется:

$$\varphi = \varphi^* = 0. \tag{3.9}$$

Подставляя 4-импульсы (3.8) и (3.8′) в общие формулы (3.3) и (3.4), получаем для отдельных компонент:

$$\left.\begin{aligned} p^*_\parallel &= \gamma_c\,(p_\parallel - \beta_c E) = \gamma_c\, p\left(\cos\vartheta - \frac{\beta_c}{\beta}\right); \\ p^*_\perp &= p_\perp; \\ E^* &= \gamma_c\,(E - \beta_c p_\parallel) = \gamma_c\, E\,(1 - \beta_c\beta\cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

и обратное преобразование

$$\left.\begin{aligned} p_\parallel &= \gamma_c\,(p^*_\parallel + \beta_c E^*) = \gamma_c\, p^*\left(\cos\vartheta^* + \frac{\beta_c}{\beta^*}\right); \\ p_\perp &= p^*_\perp; \\ E &= \gamma_c\,(E^* + \beta_c p^*_\parallel) = \gamma_c\, E^*\,(1 + \beta_c\beta^*\cos\vartheta^*). \end{aligned}\right\} \tag{3.10′}$$

Для квадратов импульсов

$$p^2 = p_\parallel^2 + p_\perp^2 \quad \text{и} \quad p^{*2} = p_\parallel^{*2} + p_\perp^{*2} \tag{3.11}$$

получаем

$$p^{*2} = p^2\left[\gamma_c^2\left(\cos\vartheta - \frac{\beta_c}{\beta}\right)^2 + \sin^2\vartheta\right]. \tag{3.12′}$$

$$p^2 = p^{*2}\left[\gamma_c^2\left(\cos\vartheta^* + \frac{\beta_c}{\beta^*}\right)^2 + \sin^2\vartheta^*\right] \tag{3.12}$$

Обобщение формул (3.6) и (3.6′) в случае, когда вектор скорости $\boldsymbol{\beta}_c$ не параллелен оси x — x^*, в трехмерной векторной записи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} + \gamma_c\boldsymbol{\beta}_c\left(\frac{\gamma_c}{\gamma_c+1}\boldsymbol{\beta}_c\,\mathbf{p} - E\right); \\ E^* &= \gamma_c\,(E - \boldsymbol{\beta}_c\,\mathbf{p}) \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}^* + \gamma_c\boldsymbol{\beta}_c\left(\frac{\gamma_c}{\gamma_c+1}\boldsymbol{\beta}_c\,\mathbf{p}^* + E^*\right); \\ E &= \gamma_c\,(E^* + \boldsymbol{\beta}_c\,\mathbf{p}^*). \end{aligned}\right\} \tag{3.13′}$$

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА II (РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦ-ФАКТОРОВ)

Рассмотрим связь между 4-скоростями в двух системах: $u = \{\gamma\boldsymbol{\beta}, i\gamma\}$ и $u^* = \{\gamma^*\boldsymbol{\beta}^*, i\gamma^*\}$. Разложив скорость частицы в $Л$- и $Ц$- системах на продольную и поперечную составляющие

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_\parallel + \boldsymbol{\beta}_\perp; \\ \boldsymbol{\beta}^* &= \boldsymbol{\beta}^*_\parallel + \boldsymbol{\beta}^*_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

применим к соответствующим 4-скоростям преобразования Лоренца (3.3) и (3.4):

$$\begin{pmatrix} \gamma^*\boldsymbol{\beta}^*_\parallel \\ \gamma^*\boldsymbol{\beta}^*_\perp \\ 0 \\ i\gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_c & 0 & 0 & i\gamma_c\beta_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_c\beta_c & 0 & 0 & \gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\boldsymbol{\beta}_\parallel \\ \gamma\boldsymbol{\beta}_\perp \\ 0 \\ i\gamma \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma\boldsymbol{\beta}_\parallel \\ \gamma\boldsymbol{\beta}_\perp \\ 0 \\ i\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_c & 0 & 0 & -i\gamma_c\beta_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_c\beta_c & 0 & 0 & \gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\boldsymbol{\beta}^*_\parallel \\ \gamma\boldsymbol{\beta}^*_\perp \\ 0 \\ i\gamma^* \end{pmatrix} \tag{4.2′}$$

Временны́е компоненты дают закон преобразования лоренц-факторов

$$\gamma^* = \gamma_c\,\gamma\,(1 - \beta_c\,\beta_\parallel) = \gamma_c\,\gamma\,(1 - \beta_c\beta\cos\vartheta) =$$

$$= \gamma_c \gamma - \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\,\sqrt{\gamma^2 - 1}\cos\vartheta; \qquad (4.3)$$

$$\gamma = \gamma_c \gamma^* (1 + \beta_c \beta_\parallel^*) = \gamma_c \gamma^* (1 + \beta_c \beta^* \cos\vartheta^*) =$$

$$= \gamma_c \gamma^* + \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\,\sqrt{\gamma^{*2} - 1}\cos\vartheta^*, \qquad (4.3')$$

а пространственные компоненты [с учетом соотношений (4.3) и (4.3′)] — релятивистский закон сложения скоростей:

$$\left.\begin{aligned} \beta_\parallel^* &= \frac{\beta_\parallel - \beta_c}{1 - \beta_c \beta_\parallel}; \\ \beta_\perp^* &= \frac{\beta_\perp}{1 - \beta_c \beta_\parallel}; \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_\parallel &= \frac{\beta_\parallel^* + \beta_c}{1 + \beta_c \beta_\parallel^*}; \\ \beta_\perp &= \frac{\beta_\perp^*}{1 + \beta_c \beta_\parallel^*}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4')$$

Обобщение формул (4.3), (4.3′) и (4.4), (4.4′) для релятивистского сложения скоростей в случае произвольного направления вектора скорости $\boldsymbol{\beta}_c$ относительно оси $x - x^*$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\beta}^* = \frac{\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_c \gamma_c \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_c + 1}(\boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}) - 1\right]}{\gamma_t (1 - \boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta})}; \qquad (4.5)$$

$$\gamma^* = \gamma_c \gamma (1 - \boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}); \qquad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\beta}_c \gamma_c \left[\frac{\gamma_c}{\gamma_c + 1}\boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}^* + 1\right]}{\gamma_c (1 + \boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}^*)}; \qquad (4.5')$$

$$\gamma = \gamma_c \gamma^* (1 + \boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}^*). \qquad (4.6')$$

В отличие от нерелятивистского закона сложения скоростей

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\beta}_c \qquad (4.7)$$

в (4.5′) складываемые скорости $\boldsymbol{\beta}^*$ и $\boldsymbol{\beta}_c$ в общем случае входят несимметрично, и результат сложения зависит от порядка, в котором складываются скорости таким образом, что при перестановке

$$\boldsymbol{\beta}^* \rightleftarrows \boldsymbol{\beta}_c \qquad (4.8)$$

результирующая скорость $\boldsymbol{\beta}$ меняет свое направление, оставаясь неизменной по абсолютной величине [поскольку формула (4.6′) для γ симметрична относительно перестановки (4.8)]. Эта особенность релятивистского сложения скоростей тесно связана с коммутационными свойствами преобразования Лоренца, о чем будет идти речь

в § 6. Лишь в частном случае, когда скорости $\boldsymbol{\beta}^*$ и $\boldsymbol{\beta}_c$ взаимно параллельны или антипараллельны, результирующая скорость $\boldsymbol{\beta}$ не зависит от порядка сложения. При этом реализуются экстремальные значения скорости $\boldsymbol{\beta}$ и соответствующего лоренц-фактора:
если $\boldsymbol{\beta}^*$ и $\boldsymbol{\beta}_c$ параллельны,

$$\left.\begin{aligned} \beta_+ &= \frac{\beta^* + \beta_c}{1 + \beta_c \beta^*}; \\ \gamma_+ &= \gamma_c \gamma^* (1 + \beta_c \beta^*) = \gamma_c \gamma^* + \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\,\sqrt{\gamma^{*2} - 1}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

если $\boldsymbol{\beta}^*$ и $\boldsymbol{\beta}_c$ антипараллельны,

$$\left.\begin{aligned} \beta_- &= \frac{|\beta^* - \beta_c|}{1 - \beta_c \beta^*}; \\ \gamma_- &= \gamma_c \gamma^* (1 - \beta_c \beta^*) = \gamma_c \gamma^* - \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\,\sqrt{\gamma^{*2} - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.9')$$

Аналогичные выражения можно написать и для β_+^*, γ_+^*, β_-^*, γ_-^*.

Если скорости β_c и β^* — ультрарелятивистские (практически достаточно, чтобы было $\gamma_c, \gamma^* \gtrsim 2 \div 3$), то приближенно

$$\beta_c \approx 1 - \frac{1}{2\gamma_c^2}, \qquad \beta^* \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^{*2}} \qquad (4.10)$$

и

$$\gamma_+ \approx 2\gamma_c \gamma^*; \qquad (4.11)$$

$$\gamma_- \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_c}{\gamma^*} + \frac{\gamma^*}{\gamma_c}\right), \qquad (4.12)$$

причем

$$\gamma_+ \gg \gamma_-. \qquad (4.13)$$

Воспользовавшись параметрическим представлением (2.7), запишем (4.9) и (4.9′) в виде (обозначения очевидны):

$$\left.\begin{aligned} \gamma_+ &= \operatorname{ch} r_+ = \operatorname{ch} r_c \cdot \operatorname{ch} r^* + \operatorname{sh} r_c \cdot \operatorname{sh} r^* = \operatorname{ch}(r_c + r^*); \\ \beta_+ &= \operatorname{th} r_+ = \frac{\operatorname{th} r_c + \operatorname{th} r^*}{1 + \operatorname{th} r_c \cdot \operatorname{th} r^*} = \operatorname{th}(r_c + r^*) \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \gamma_- &= \operatorname{ch} r_- = \operatorname{ch} r_c \cdot \operatorname{ch} r^* - \operatorname{sh} r_c \cdot \operatorname{sh} r^* = \operatorname{ch}(r_c - r^*); \\ \beta_- &= \operatorname{th} r_- = \frac{\operatorname{th} r_c - \operatorname{th} r^*}{1 - \operatorname{th} r_c \cdot \operatorname{th} r^*} = \operatorname{th}(r_c - r^*). \end{aligned}\right\} \qquad (4.14')$$

Таким образом, для быстрот r при сложении параллельных или антипараллельных скоростей действует правило простого алгебраического сложения, совпадающее с нерелятивистским правилом сложения скоростей. Формулы (4.14) и (4.14′) позволяют легко складывать

параллельные и антипараллельные скорости с помощью таблиц гиперболических функций.

Формулы преобразования лоренц-факторов (4.3) и (4.3′) можно выразить через экстремальные значения γ_+, γ_-, γ^*_+, γ^*_-:

$$\gamma = [\gamma_c \gamma^* (1 + \beta_c \beta^*)] \cos^2 \frac{\vartheta^*}{2} + [\gamma_c \gamma^* (1 - \beta_c \beta^*)] \sin^2 \frac{\vartheta^*}{2} =$$

$$= \gamma_+ \cos^2 \frac{\vartheta^*}{2} + \gamma_- \sin^2 \frac{\vartheta^*}{2}; \qquad (4.15)$$

$$\gamma^* = [\gamma_c \gamma (1 + \beta_c \beta)] \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + [\gamma_c \gamma (1 - \beta_c \beta)] \cos^2 \frac{\vartheta}{2} =$$

$$= \gamma^*_+ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \gamma^*_- \cos^2 \frac{\vartheta}{2}. \qquad (4.15')$$

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА III (ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УГЛОВ)

Соотношение между углами и импульсами в двух системах координат, связанных преобразованиями Лоренца, можно наглядно представить с помощью простого графического построения. Рассмотрим переход из *Ц*-системы в *Л*-систему при некотором фиксированном значении модуля импульса p^*; такая задача часто возникает в практике. При изменении угла ϑ^* конец вектора $\mathbf{p}^*$ описывает вокруг начала координат в плоскости x^*y^* (выбор координатных осей см. на рис. 5) окружность радиусом p^*, уравнение которой (в переменных $p^*_\parallel$ и $p^*_\perp$)

$$\frac{p^{*2}_\parallel}{p^{*2}} + \frac{p^{*2}_\perp}{p^{*2}} = 1. \qquad (5.1)$$

Переходя к переменным $p_\parallel$ и $p_\perp$ с помощью преобразований (3.10), получаем, что в *Л*-системе эта окружность трансформируется в эллипс

$$\frac{(p_\parallel - \gamma_c \beta_c E^*)^2}{(\gamma_c p^*)^2} + \frac{p^2_\perp}{p^{*2}} = 1 \qquad (5.2)$$

с полуосями $a = \gamma_c p^*$ и $b = p^*$. Центр эллипса смещен относительно начала отсчета импульсов $\mathbf{p}$ на расстояние $c = \gamma_c \beta_c E^*$. Фокусы эллипса F отстоят от его центра на расстояние $f = \sqrt{a^2 - b^2} = \gamma_c \beta_c p^*$. Эксцентриситет эллипса $e = f/a = \beta_c$. Существует простой способ построения такого эллипса (рис. 6). Выберем точку O^* в качестве начала координат в *Ц*-системе и опишем из этой точки окружность радиусом p^*, т. е. окружность (5.1). Радиус окружности O^*A, проведенный из O^* под углом ϑ^* к оси x^*, будет изображать в выбранном масштабе импульс $\mathbf{p}^*$. Затем из того же центра O^* опишем вспомогательную окружность радиуса $\gamma_c p^*$ и продолжим O^*A до пересечения с этой окружностью в точке B. Из точек A и B проведем параллельно осям координат прямые, точка пересечения которых C, как нетрудно доказать, лежит на искомом эллипсе. Повторив эту процедуру несколько раз для различных значений ϑ^*, можно восстановить весь эллипс импульсов. Отложив затем влево от точки O^* отрезок $c = \gamma_c \beta_c E^*$, найдем точку O — начало координат в *Л*-системе, так что отрезок OC изображает импульс $\mathbf{p}$ в том же масштабе, в котором отложена величина p^*. Точка O для частиц с массой $m \neq 0$ всегда лежит дальше от центра эллипса, чем фокус F, при этом она может находиться как внутри эллипса, так и вне его (рис. 7). Для ультрарелятивистской частицы, у которой $m = 0$, начало координат O совпадает с фокусом F.

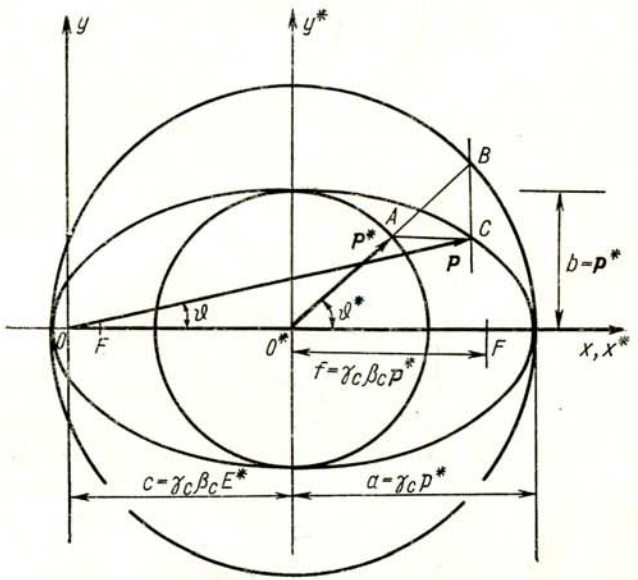


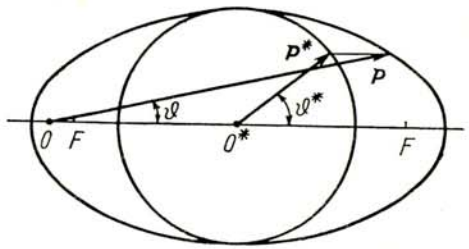
Рис. 6. Построение эллипса импульсов.

Установим теперь связь между углами вылета частиц в *Л*- и *Ц*-системах. Подставляя выражения (3.10) и (3.10′) в очевидные равенства $\operatorname{tg}\vartheta = p_\perp/p_\parallel$, $\operatorname{tg}\vartheta^* = p^*_\perp/p^*_\parallel$, получаем

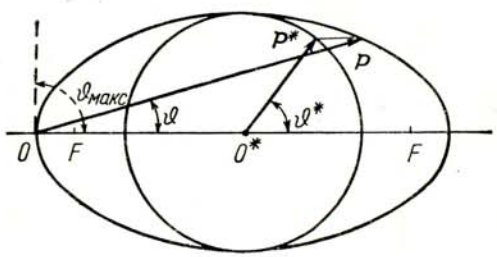
$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p^* \sin\vartheta^*}{\gamma_c (p^* \cos\vartheta^* + \beta_c E^*)} = \frac{1}{\gamma_c} \cdot \frac{\sin\vartheta^*}{\left(\cos\vartheta^* + \dfrac{\beta_c}{\beta^*}\right)}; \qquad (5.3)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta^* = \frac{p \sin\vartheta}{\gamma_c (p \cos\vartheta - \beta_c E)} = \frac{1}{\gamma_c} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\left(\cos\vartheta - \dfrac{\beta_c}{\beta}\right)}. \qquad (5.3')$$

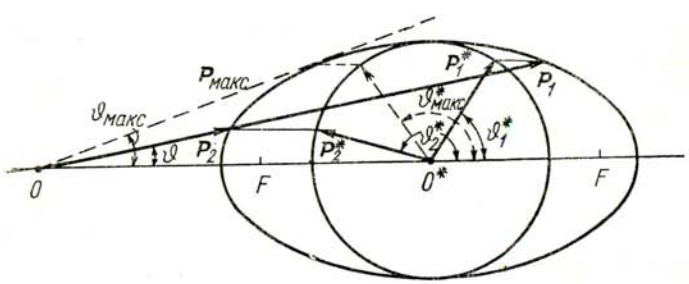
Графики формулы (5.3′) для некоторых, часто встречающихся на практике, значений γ_c приведены в Приложении II.



$\varkappa < 1$



$\varkappa = 1$



$\varkappa > 1$

Рис. 7. Вид эллипса импульсов при различных значениях параметра $\varkappa = \beta_c/\beta^*$.

Найдем выражение для угла ϑ^* как функции угла ϑ при фиксированном p^*. Очевидно, что для этого удобнее пользоваться не формулой (5.3′), а решить уравнение (5.3) относительно $\cos\vartheta^*$:

$$\cos\vartheta^* = \frac{-\beta_c\gamma_c^2 E^*\sin^2\vartheta \pm |\cos\vartheta|\sqrt{p^{*2} - m^2\gamma_c^2\beta_c^2\sin^2\vartheta}}{p^*\gamma_c^2(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta)} =$$

$$= \frac{-\varkappa\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta \pm \sqrt{1+(1-\varkappa^2)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}}{1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}, \qquad (5.4)$$

где

$$\varkappa = \frac{\beta_c}{\beta^*}.$$

Для дальнейшего полезно иметь также зависимость абсолютной величины импульса частицы в $Л$-системе от угла вылета в той же системе при фиксированном p^*, которую можно получить, подставив выражение (5.4) в формулу (3.10):

$$p = \frac{\beta_c E^*\cos\vartheta \pm \dfrac{\cos\vartheta}{|\cos\vartheta|}\sqrt{p^{*2} - m^2\gamma_c^2\beta_c^2\sin^2\vartheta}}{\gamma_c(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta)} =$$

$$= p^*\frac{\gamma_c\left(\varkappa \pm \sqrt{1+(1-\varkappa^2)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)}{\left(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta\right)\cos\vartheta}. \qquad (5.5)$$

Происхождение двух знаков в формулах (5.4) и (5.5) и правило их употребления легко понять с помощью рис. 7. Из рисунка видно, что характер связи между углами ϑ и ϑ^* различен и зависит от того, лежит ли начало координат O внутри или вне эллипса, что определяется отношением расстояния c к большой полуоси эллипса a:

$$\frac{c}{a} = \frac{\gamma_c\beta_c E^*}{\gamma_c p^*} = \frac{\beta_c}{\beta^*} = \varkappa, \qquad (5.6)$$

т. е. в конечном счете отношением скоростей $\varkappa$. Рассмотрим все возможные случаи (см. рис. 7).

1) $\varkappa < 1$. Точка O лежит внутри эллипса. Угол ϑ может принимать любые значения, при этом подкоренное выражение в формулах (5.4) и (5.5) всегда положительно. Между ϑ

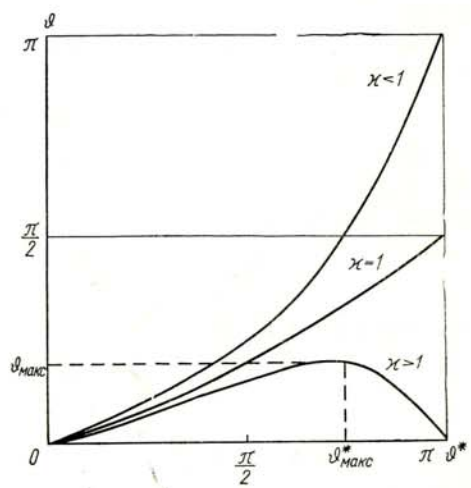


Рис. 8. Характер зависимости угла ϑ вылета частицы в $Л$-системе от угла ϑ^* в $Ц$-системе при различных значениях параметра $\varkappa = \beta_c/\beta^*$.

и ϑ^* (и соответственно между ϑ и p) существует монотонная взаимно однозначная связь (рис. 8 и 9). Правило употребления знаков в формулах (5.4) и (5.5): знак «+» при $0 < \vartheta < \pi/2$; знак «—» при $\pi/2 < \vartheta < \pi$.

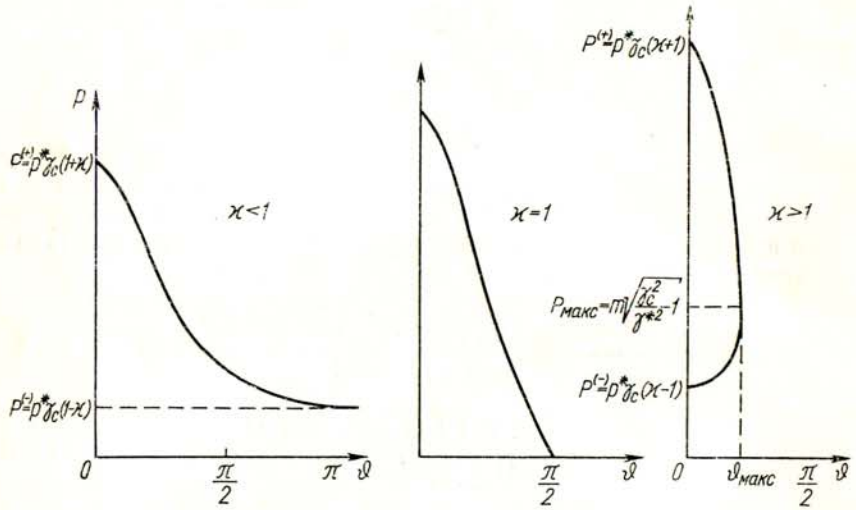


Рис. 9. Характер зависимости абсолютной величины импульса p от угла ϑ в $Л$-системе при различных значениях параметра $\varkappa = \beta_c/\beta^*$.

Заметим, что первое равенство в формуле (5.4) можно было бы записать без знака модуля у $\cos\vartheta$ и соответственно опустить множитель $\cos\vartheta/|\cos\vartheta|$ в первом равенстве (5.5), но тогда правило употребления знаков в первых и вторых равенствах формул (5.4) и (5.5) было бы различным, что могло бы в дальнейшем привести к путанице.

При $\cos\vartheta = \pm 1$ величина p достигает наибольшего и наименьшего значения

$$p^{(\pm)} = p^*\gamma_c(1 \pm \varkappa). \tag{5.7}$$

2) $\varkappa = 1$. Точка O лежит на эллипсе. Угол ϑ не может превышать $\pi/2$. Все формулы существенно упрощаются; так, из формулы (5.3) следует

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta^*}{1+\cos\vartheta^*} = \frac{1}{\gamma_c}\operatorname{tg}\frac{\vartheta^*}{2}, \tag{5.8}$$

а из формулы (5.5)

$$p = \frac{2p^*\cos\vartheta}{\gamma_c\left(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta\right)}. \tag{5.9}$$

Связь между ϑ и ϑ^* (и между ϑ и p) также монотонная, взаимно однозначная (см. рис. 8 и 9). Этот частный случай очень важен для практики: во-первых, он реализуется при упругом рассеянии; во-вторых, он является ультрарелятивистским пределом, когда $\beta_c \to 1$ и $\beta^* \to 1$. Максимальное значение p (при $\vartheta = 0$):

$$p^{(+)} = 2p^*\gamma_c; \tag{5.10}$$

минимальное значение p (при $\vartheta = \pi/2$):

$$p^{(-)} = 0. \tag{5.10'}$$

3) $\varkappa > 1$. Начало координат O в $Л$-системе находится вне эллипса. Угол ϑ^* (и соответственно импульс p) — двузначная функция от ϑ (см. рис. 8 и 9). Обратная функция — зависимость угла ϑ от ϑ^* — однозначна, но не монотонна: угол ϑ не может превышать некоторого значения $\vartheta_{макс} < \pi/2$, при котором вектор $\mathbf{p}$ направлен по касательной к эллипсу импульсов, а подкоренное выражение в формулах (5.4) и (5.5) обращается в нуль. Отсюда найдем для $\vartheta_{макс}$

$$\operatorname{tg}\vartheta_{макс} = \frac{1}{\gamma_c\sqrt{\varkappa^2-1}} \tag{5.11}$$

или

$$\sin\vartheta_{макс} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_c^2(\varkappa^2-1)}} = \frac{\gamma^*\beta^*}{\gamma_c\beta_c} = \frac{\sqrt{\gamma^{*2}-1}}{\sqrt{\gamma_c^2-1}}. \tag{5.12}$$

Углу $\vartheta_{макс}$ в $Ц$-системе соответствует угол $\vartheta^*_{макс} > \pi/2$, причем, подставляя формулу (5.11) в выражение (5.4), имеем

$$\cos\vartheta^*_{макс} = -\frac{1}{\varkappa}. \tag{5.13}$$

Соответствующий импульс в $Л$-системе

$$p_{макс} = p^*\frac{\sqrt{(\varkappa^2-1)\left[1+\gamma_c^2(\varkappa^2-1)\right]}}{\varkappa} =$$

$$= p^*\frac{\gamma_c\beta_c}{\gamma^*\beta^*}\sqrt{1-\frac{\beta^{*2}}{\beta_c^2}} = m\sqrt{\frac{\gamma_c^2}{\gamma^{*2}}-1}. \tag{5.14}$$

В формулах (5.4) и (5.5) используются оба знака, причем решение со знаком «+» относится к $\vartheta^* > \vartheta^*_{макс}$, а решение со знаком «—» к $\vartheta^* < \vartheta^*_{макс}$.

Максимальное значение p получается при $\vartheta = 0$, $\vartheta^* = 0$, а минимальное — при $\vartheta = 0$, $\vartheta^* = \pi$:

$$p^{(\pm)} = p^*\gamma_c(\varkappa \pm 1). \tag{5.15}$$

Все полученные соотношения, относящиеся к фиксированному p^*, могут быть легко применены и в случае фиксированного им-

пульса p в $Л$-системе (или β_c/β). Для этого нужно произвести обычную замену:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa \to -\frac{\beta_c}{\beta};\\ &p \rightleftarrows p^*;\\ &\vartheta \rightleftarrows \vartheta^*. \end{aligned}\right\} \qquad (5.16)$$

В заключение рассмотрим предельные выражения для формул преобразования углов (5.3) и (5.3′). Уже говорилось, что ультрарелятивистским пределом для выражения (5.3) служит формула (5.8), которая часто применяется в качестве приближенной. Действительно, параметр $\varkappa$ уже при лоренц-факторах γ_c и $\gamma^* \gtrsim 2 \div 3$ мало отличается от единицы:

$$\varkappa \approx 1 - \frac{1}{2\gamma_c^2} + \frac{1}{2\gamma^{*2}}. \qquad (5.17)$$

Поэтому во многих задачах относительно более простые формулы при $\varkappa = 1$ служат очень хорошим приближением для большей части углов (исключение составляют углы $\vartheta^* \approx \pi$, когда $\cos\vartheta^* \approx -1$). Особенно широко такое приближение используется в физике космических лучей.

Ультрарелятивистский предел обратной формулы (4.1′) при $\beta_c \to 1$, $\beta \to 1$ есть

$$\operatorname{tg}\vartheta^* = \frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - 1} = -\frac{1}{\gamma_c}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}. \qquad (5.8')$$

Хотя для реальных частиц отношение β_c/β часто бывает действительно близко к единице даже с большей точностью, чем $\beta_c/\beta^* = \varkappa$ (поскольку в среднем энергия частиц в $Л$-системе больше, чем их энергия в $Ц$-системе), углы вылета ϑ большинства частиц в $Л$-системе при этом обычно невелики. Так что $\cos\theta \approx 1$ и знаменатель $\cos\vartheta - \beta_c/\beta$ в формуле (5.3′) представляет собой малую разность двух близких чисел. Это обстоятельство может оказаться источником больших вычислительных ошибок, поэтому пользоваться ультрарелятивистской формулой (5.8′) в качестве приближенной для (5.3′) нужно с известной осторожностью.

В нерелятивистском случае ($\beta_c \ll 1$, $\beta^* \ll 1$) эллипс импульсов (см. рис. 6) в $Л$-системе превращается в окружность ($a = b = p^*$), которая совпадает с соответствующей окружностью в $Ц$-системе (точки A, B и C на рис. 6 сливаются в одну). Масштаб графического построения удобнее изменить, поделив все линейные размеры на массу частицы m, т. е. откладывать скорости, а не импульсы (рис. 10). Формулы (5.3) и (5.3′) переходят в формулы

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\cos\vartheta^* + \frac{\beta_c}{\beta^*}} = \frac{\beta^*\sin\vartheta^*}{\beta^*\cos\vartheta^* + \beta_c}; \qquad (5.18)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta^* = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \frac{\beta_c}{\beta}} =$$

$$= \frac{\beta\sin\vartheta}{\beta\cos\vartheta - \beta_c}. \qquad (5.18')$$

Общий характер связи между углами ϑ^* и ϑ (см. рис. 8) остается неизменным.

При $\varkappa > 1$ формула (5.12) принимает вид

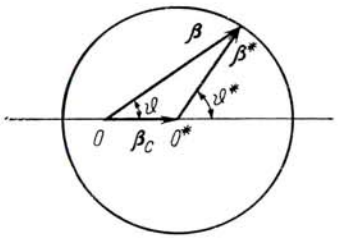
$$\sin\vartheta_{макс} = \frac{\beta^*}{\beta_c} = \frac{1}{\varkappa}, \qquad (5.19)$$

а формула (5.13) остается неизменной. Между углами $\vartheta^*_{макс}$ и $\vartheta_{макс}$ существует очевидная связь

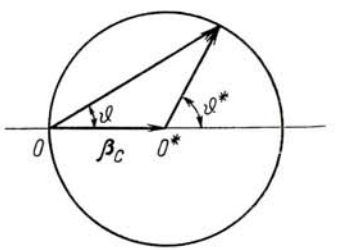
$$\vartheta^*_{макс} = \vartheta_{макс} + \frac{\pi}{2}. \qquad (5.20)$$

Формула (5.14) переходит в

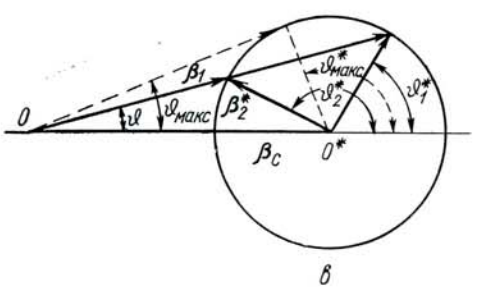
$$p_{макс} = p^*\sqrt{\varkappa^2 - 1} = m\sqrt{\beta_c^2 - \beta^{*2}}. \qquad (5.21)$$



а



б



в

Рис. 10. Вид эллипса импульсов в нерелятивистском случае (в отличие от рис. 7 изменен масштаб — вместо импульсов отложены скорости: *а* — $\varkappa < 1$; *б* — $\varkappa = 1$; *в* — $\varkappa > 1$.

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим два последовательных преобразования Лоренца. Такая задача представляет не только принципиальный интерес, но встречается в практике кинематических расчетов.

Пусть в общем случае есть три системы координат K, K^* и K^{**}, у которых одноименные пространственные оси параллельны друг другу. Система K^* движется относительно K со скоростью $\boldsymbol{\beta}_1$, а система K^{**} движется относительно K^* со скоростью $\boldsymbol{\beta}_2$, причем векторы $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ не параллельны между собой. Последовательность двух преобразований Лоренца

$$\left.\begin{aligned} K \to K^*, \quad \mathcal{P}^* &= L(\boldsymbol{\beta}_1)\,\mathcal{P}; \\ K^* \to K^{**}, \quad \mathcal{P}^{**} &= L(\boldsymbol{\beta}_2)\,\mathcal{P}^* \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

($\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}^{**}$ — 4-импульсы частицы в рассматриваемых системах координат) связывает в конечном счете 4-векторы в системах K и K^{**}:

$$K \to K^{**}, \ \mathcal{P}^{**} = L(\boldsymbol{\beta}_2)\,L(\boldsymbol{\beta}_1)\,\mathcal{P}. \tag{6.2}$$

Обратимся к геометрическому истолкованию преобразований Лоренца как поворотов в четырехмерном пространстве. Преобразования (6.1) означают два поворота в различных плоскостях, и результат двух поворотов ортогональной системы координат зависит от порядка их выполнения. Следовательно, преобразования Лоренца некоммутативны: результат двух последовательных преобразований зависит от того, в каком порядке они производятся. Кроме того, повороты во взаимно перпендикулярных плоскостях, включающих временну́ю ось, скажем, в плоскостях x_1x_4 и x_2x_4, означают и некоторый поворот в плоскости x_1x_2. Таким образом, оказывается, что результат последовательных преобразований (6.2) эквивалентен преобразованию Лоренца со скоростью $\boldsymbol{\beta}_{21}$, равной сумме скоростей $\boldsymbol{\beta}_2$ и $\boldsymbol{\beta}_1$ (т. е. скорости системы K^{**} относительно K) плюс трехмерный пространственный поворот с матрицей D, действующей только на пространственные составляющие 4-вектора:

$$\mathcal{P}^{**} = D \cdot L(\boldsymbol{\beta}_{21})\,\mathcal{P} \tag{6.3}$$

или

$$L(\boldsymbol{\beta}_2)\,L(\boldsymbol{\beta}_1) = D \cdot L(\boldsymbol{\beta}_{21}), \tag{6.4}$$

где [см. формулу (4.5′)]

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{21} &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \gamma_1 \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}\,\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2 + 1\right]}{\gamma_1 (1 + \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2)}; \\ \gamma_{21} &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2). \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Матрицу пространственного поворота D можно получить (как это сделано в работе [13]) из матричного равенства (6.4). Поступим несколько иначе. Применим преобразование (6.3) к вектору скорости в K-системе, равному нулю. Тогда в трехмерной записи [см. формулу (4.5)] справа получим вектор $D(-\boldsymbol{\beta}_{21})$, а слева — скорость системы K относительно K^{**}, которая равна сумме скоростей $-\boldsymbol{\beta}_1$ и $-\boldsymbol{\beta}_2$:

$$D(-\boldsymbol{\beta}_{21}) = -\boldsymbol{\beta}_{12} \tag{6.6}$$

или*

$$D\boldsymbol{\beta}_{21} = \boldsymbol{\beta}_{12}. \tag{6.6′}$$

* Заметим, что формула (6.6) представляет собой обобщение соотношения (3.4).

Скорость $\boldsymbol{\beta}_{12}$ равна сумме скоростей $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ и получается из $\boldsymbol{\beta}_{21}$ перестановкой

$$\boldsymbol{\beta}_1 \rightleftarrows \boldsymbol{\beta}_2, \tag{6.7}$$

т. е.

$$\boldsymbol{\beta}_{12} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \gamma_2 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}\,\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2 + 1\right]}{\gamma_2 (1 + \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2)}. \tag{6.8}$$

В § 4 отмечалось, что в релятивистский закон сложения скоростей слагаемые входят несимметрично, и результирующий вектор меняет свое направление при их перестановке. Преобразование D как раз и описывает такой поворот результирующей скорости от сложения $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$. Следовательно, D — поворот относительно направления $\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2$ на угол ω, который можно определить из равенств

$$\sin\omega = \frac{|\boldsymbol{\beta}_{12} \times \boldsymbol{\beta}_{21}|}{\beta_{21}^2} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{12})}{(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_{12})} |\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2| \tag{6.9}$$

или

$$\cos\omega = \frac{\boldsymbol{\beta}_{12}\,\boldsymbol{\beta}_{21}}{\beta_{21}^2} = \frac{(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{12})^2}{(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_{12})} - 1. \tag{6.10}$$

Практически удобно направления координатных осей выбрать так, чтобы скорость $\boldsymbol{\beta}_1$ была направлена по оси x, а скорости $\boldsymbol{\beta}_2$ и $\boldsymbol{\beta}_{21}$ лежали в плоскости xy, тогда

$$L(\boldsymbol{\beta}_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\gamma_1\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

$$L(\boldsymbol{\beta}_2) = \begin{pmatrix} 1 + (\gamma_2 - 1)\cos^2\alpha & (\gamma_2 - 1)\sin\alpha\cos\alpha & 0 & i\beta_2\gamma_2\cos\alpha \\ (\gamma_2 - 1)\sin\alpha\cos\alpha & 1 + (\gamma_2 - 1)\sin^2\alpha & 0 & i\beta_2\gamma_2\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2\gamma_2\cos\alpha & -i\beta_2\gamma_2\sin\alpha & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

где α — угол между $\boldsymbol{\beta}_2$ и осью x; $L(\boldsymbol{\beta}_{21})$ имеет такой же вид, как и выражение (6.12), но вместо α стоит α_{21} — угол между $\boldsymbol{\beta}_{21}$ и осью x [α_{21} легко выразить с помощью формулы (6.5) через β_1, β_2 и α]

$$D = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

$$\sin\omega = \frac{\gamma_1\gamma_2(1+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{21})}{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(1+\gamma_{21})}\beta_1\beta_2\sin\alpha. \qquad (6.9')$$

В частном случае, когда $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ направлены по одной прямой, преобразования $L(\boldsymbol{\beta}_1)$ и $L(\boldsymbol{\beta}_2)$ коммутируют и

$$\left.\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}_2)\,L(\boldsymbol{\beta}_1) &= L(\boldsymbol{\beta}_{21});\\ D &= 1;\\ \boldsymbol{\beta}_{21} &= \boldsymbol{\beta}_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

В нерелятивистской механике, когда преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, соотношения (6.14) всегда выполняются.

§ 7. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Существуют определенные комбинации из компонент 4-векторов, которые остаются неизменными в любой инерциальной системе отсчета,— релятивистские инварианты.

Перечислим наиболее существенные релятивистские инварианты, построенные из 4-импульсов:

1) скалярное произведение двух 4-импульсов:

$$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 - E_1E_2 = \mathcal{P}_1^*\mathcal{P}_2^* = \mathbf{p}_1^*\mathbf{p}_2^* - E_1^*E_2^*; \qquad (7.1)$$

2) квадрат 4-импульса

$$\mathcal{P}^2 = \mathbf{p}^2 - E^2 = \mathcal{P}^{*2} = \mathbf{p}^{*2} - E^{*2} = -m^2. \qquad (7.2)$$

Для одной частицы квадрат 4-импульса равен взятому со знаком минус квадрату ее массы. Для квадрата суммарного 4-импульса совокупности n невзаимодействующих частиц

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}E_i\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^*\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i^*\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}E_i^*\right)^2 \qquad (7.3)$$

принято несколько различных обозначений, а именно

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^*\right)^2 = -E_c^2 = -\mathfrak{M}^2 = -s, \qquad (7.3')$$

где E_c — суммарная полная энергия в системе центра инерции данной совокупности частиц. Эта величина называется также эффективной инвариантной массой (см. § 8) и в этом случае обозначается буквой $\mathfrak{M}$. Кроме того, для E_c^2 часто используется обозначение s, так называемая инвариантная переменная Мандельстама*;

* Об инвариантных переменных подробнее см. § 14.

3) элемент объема в пространстве 4-импульсов

$$\left.\begin{aligned} &\delta(\mathcal{P}^2+m^2)\,d^4\mathcal{P} = \delta(\mathcal{P}^{*2}+m^2)\,d^4\mathcal{P}^*;\\ &d^4\mathcal{P} = d\mathcal{P}^{(1)}\,d\mathcal{P}^{(2)}\,d\mathcal{P}^{(3)}\,d\mathcal{P}^{(4)};\\ &d^4\mathcal{P}^* = d\mathcal{P}^{*(1)}\,d\mathcal{P}^{*(2)}\,d\mathcal{P}^{*(3)}\,d\mathcal{P}^{*(4)}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

Наличие δ-функций в уравнении (7.4) обусловлено тем, что компоненты 4-импульса частицы не независимы (в противном случае было бы просто равенство элементов объема в четырехмерном пространстве $d^4\mathcal{P} = d^4\mathcal{P}^*$), а связаны соотношением (3.1), которое и учитывается δ-функциями. Проинтегрируем обе части уравнения (7.4) по четвертым компонентам 4-импульсов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$, воспользовавшись для этого обычной формулой для δ-функции от сложного аргумента

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{df}{dx_i}\right|_{x=x_i}}, \qquad (7.5)$$

где x_i — корни уравнения $f(x)=0$.

В данном случае

$$\delta(\mathcal{P}^2+m^2) = \frac{\delta(\mathcal{P}^{(4)}+iE)+\delta(\mathcal{P}^{(4)}-iE)}{2E} \qquad (7.5')$$

и аналогично для $\delta(\mathcal{P}^{*2}+m^2)$, и в результате интегрирования приходим к выражению

$$\frac{d^3\mathcal{P}}{E} = \frac{d^3\mathcal{P}^*}{E^*}, \qquad (7.4')$$

где

$$d^3p = dp_x\,dp_y\,dp_z, \quad d^3p^* = dp_x^*\,dp_y^*\,dp_z^*.$$

Таким образом, в тех выражениях, где в качестве дифференциала фигурируют элементы (7.4), интегрирование по 4-импульсу частицы сводится на самом деле к трехкратному интегрированию по дифференциальным элементам (7.4'). Инвариантность (7.4') легко показать и непосредственно с помощью преобразований Лоренца;

4) поперечный импульс

$$p_\perp = p\sin\vartheta = p_\perp^* = p^*\sin\vartheta^*. \qquad (7.6)$$

Заметим, что в отличие от первых трех инвариантов поперечный импульс — не истинный релятивистский инвариант, поскольку его величина, вообще говоря, зависит от направления относительного движения двух систем координат. Однако обычно это направление фиксировано, и инвариантность поперечного импульса широко используется в кинематическом анализе.

Использование релятивистских инвариантов нередко существенно облегчает расчеты. Приравняв выражения релятивистских ин-

вариантов в двух различных системах координат, можно получить соотношения между кинематическими характеристиками в этих двух системах, не прибегая к более громоздким вычислениям с явным использованием преобразований Лоренца.

Если какую-либо величину можно записать в виде комбинации релятивистских инвариантов, то такая запись — наиболее общее выражение для этой величины, справедливое в любой системе координат. Выбор конкретной системы координат для вычисления входящих в это выражение инвариантов диктуется соображениями простоты и удобства, причем иногда отдельные инварианты вычисляются в различных системах координат.

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК *Ц*-СИСТЕМЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В *Л*-СИСТЕМЕ

При кинематических расчетах часто возникает необходимость по измерениям в *Л*-системе энергий и импульсов E_i, $\mathbf{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ некоторой совокупности частиц найти скорость $\boldsymbol{\beta}_c$ (или лоренц-фактор γ_c) системы центра инерции этой совокупности относительно *Л*-системы. Движение центра инерции описывает движение системы частиц как целого, и в этом смысле оно эквивалентно движению некоторой фиктивной частицы с энергией

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i, \tag{8.1}$$

импульсом

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \tag{8.2}$$

и массой, равной полной энергии в *Ц*-системе [см. выражение (7.2)]:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i\right)^2}. \tag{8.3}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_c &= \frac{\mathbf{P}}{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i}; \\ \gamma_c &= \frac{E}{\mathfrak{M}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

В нерелятивистском пределе эти формулы сводятся к следующим:

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i; \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{\beta}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\beta}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{8.6}$$

Чаще всего приходится определять характеристики *Ц*-системы двух сталкивающихся частиц a_{01} и a_{02} [см. равенство (В.1)]. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} E &= E_{01} + E_{02}; \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02}; \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

$$E_c = \sqrt{(E_{01} + E_{02})^2 - (\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02})^2} =$$

$$= \sqrt{2(E_{01} E_{02} - \mathbf{p}_{01}\mathbf{p}_{02}) + m_{01}^2 + m_{02}^2}; \tag{8.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_c &= \frac{\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02}}{E_{01} + E_{02}}; \\ \gamma_c &= \frac{E_{01} + E_{02}}{\sqrt{(E_{01} + E_{02})^2 - (\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02})^2}} = \\ &= \frac{E_{01} + E_{02}}{\sqrt{2(E_{01} E_{02} - \mathbf{p}_{01}\mathbf{p}_{02}) + m_{01}^2 + m_{02}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Формулы (8.8) и (8.9) для наиболее употребительного частного случая, когда одна из двух сталкивающихся частиц (например, частица a_{02}) в *Л*-системе покоится, имеют следующий вид:

1) массы сталкивающихся частиц различны $(m_{01} \neq m_{02})$

$$E_c = \sqrt{2E_{01} m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2}; \tag{8.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_c &= \frac{\mathbf{p}_{01}}{E_{01} + m_{02}}; \quad \beta_c = \frac{\sqrt{\gamma_{01}^2 - 1}}{\gamma_{01} + \frac{m_{02}}{m_{01}}}; \\ \gamma_c &= \frac{E_{01} + m_{02}}{\sqrt{2E_{01} m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2}} = \frac{\gamma_{01} + \frac{m_{02}}{m_{01}}}{\sqrt{2\gamma_{01}\frac{m_{02}}{m_{01}} + \left(\frac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2 + 1}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Полезно иметь и обратную формулу — выражение γ_{01} через γ_c:

$$\gamma_{01} = (\gamma_c^2 - 1)\frac{m_{02}}{m_{01}} + \gamma_c \sqrt{(\gamma_c^2 - 1)\frac{m_{02}^2}{m_{01}^2} + 1}\,. \qquad (8.12)$$

Если энергия налетающей частицы велика

$$E_{01} \gg m_{01},\ m_{02};\ m_{02} \neq 0, \qquad (8.13)$$

формулы (8.10) — (8.12) упрощаются:

$$E_c \approx \sqrt{2E_{01}\, m_{02}}; \qquad (8.10')$$

$$\gamma_c \approx \sqrt{\frac{E_{01}}{2m_{02}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{2}\frac{m_{01}}{m_{02}}}; \qquad (8.11')$$

$$\gamma_{01} \approx 2\gamma_c^2 \frac{m_{02}}{m_{01}}; \qquad (8.12')$$

2) массы сталкивающихся частиц одинаковы ($m_{02} = m_{01}$)

$$E_c = \sqrt{2m_{01}(E_{01} + m_{01})}; \qquad (8.14)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_c &= \sqrt{\frac{\gamma_{01} - 1}{\gamma_{01} + 1}}; \\ \gamma_c &= \sqrt{\frac{E_{01} + m_{01}}{2m_{01}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{01} + 1}{2}}\,; \end{aligned}\right\} \qquad (8.15)$$

$$\gamma_{01} = 2\gamma_c^2 - 1. \qquad (8.16)$$

Если энергия налетающей частицы велика [см. выражение (8.13)], то

$$E_c \approx \sqrt{2m_{01}E_{01}}; \qquad (8.14')$$

$$\gamma_c \approx \sqrt{\frac{E_{01}}{2m_{01}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{2}}; \qquad (8.15')$$

$$\gamma_{01} \approx 2\gamma_c^2. \qquad (8.16')$$

§ 9. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В СИСТЕМЕ ПОКОЯ ДРУГОЙ ЧАСТИЦЫ

При кинематических расчетах полезно иметь формулы для энергии одной частицы (с 4-импульсом $\mathcal{P}_1$) относительно системы покоя другой частицы (с 4-импульсом $\mathcal{P}_2$). В системе покоя второй частицы 4-импульсы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имеют вид

$$\mathcal{P}_1^{(2)} = \{\mathbf{p}_1^{(2)},\ iE_1^{(2)}\},\ \mathcal{P}_2^{(2)} = \{0,\ im_2\}, \qquad (9.1)$$

где $E_1^{(2)}$ — искомая энергия.

Воспользуемся инвариантностью скалярного произведения

$$\mathcal{P}_1^{(2)}\,\mathcal{P}_2^{(2)} = \mathcal{P}_1\,\mathcal{P}_2, \qquad (9.2)$$

отсюда

$$E_1^{(2)} = -\frac{\mathcal{P}_1\,\mathcal{P}_2}{m_2} = \frac{E_1 E_2 - \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2}{m_2}. \qquad (9.3)$$

Лоренц-фактор относительного движения этих двух частиц

$$\gamma_r = \gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)} = -\frac{\mathcal{P}_1\,\mathcal{P}_2}{m_1 m_2} = \frac{E_1 E_2 - \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2}{m_1 m_2}. \qquad (9.4)$$

Очевидно, что в случае столкновения двух движущихся частиц a_{01} и a_{02} относительная энергия $E_{01}^{(02)}$ — это та эквивалентная энергия, которую должна иметь налетающая частица a_{01} в обычной постановке эксперимента с неподвижной мишенью a_{02}, чтобы дать ту же энергию в $Ц$-системе:

$$E_{01}^{(\text{экв})} \equiv E_{01}^{(02)} = \frac{E_{01}E_{02} - \mathbf{p}_{01}\,\mathbf{p}_{02}}{m_{02}}, \qquad (9.3')$$

или, если переписать то же самое для кинетических энергий:

$$T_{01}^{(\text{экв})} = \frac{T_{01}T_{02} + m_{01}T_{02} + m_{02}T_{01} - \mathbf{p}_{01}\,\mathbf{p}_{02}}{m_{02}}. \qquad (9.3'')$$

Рассмотрим два примера использования формулы (9.3′) или (9.3″):

1) изменение энергии взаимодействия за счет внутриядерного движения нуклонов мишени. Обычно в экспериментах пучок частиц высокой энергии направляется на неподвижный блок вещества-мишени. Ввиду наличия внутриядерного движения реальная энергия взаимодействия в каждом индивидуальном акте даже при моноэнергетическом падающем пучке будет несколько различна. Например, если энергия налетающего нуклона $T_{01} = 70$ *Гэв*, а кинетическая энергия нуклона в ядре $T_{02} = 25$ *Мэв*, то в двух крайних случаях, когда нуклон в ядре движется либо параллельно, либо антипараллельно налетающему нуклону, значения эквивалентной энергии по формуле (9.3″) равны соответственно: $T_{01}^{\text{экв}} = 54$ *Гэв* и $T_{01}^{\text{экв}} = 86$ *Гэв*. Так как при этом налетающая частица — ультрарелятивистская, а частица-мишень в ядре — нерелятивистская, формулу (9.3′) можно записать в более простом виде

$$E_{01}^{(\text{экв})} \approx E_{01}\left(1 \pm \frac{p_{02}}{m_{02}}\right); \qquad (9.5)$$

2) встречные пучки. Два одинаковых пучка частиц высокой энергии направлены навстречу друг другу ($E_{02} = E_{01}$, $m_{02} = m_{01}$, $p_{02} = p_{01}$, $\mathbf{p}_{01}\,\mathbf{p}_{02} = -p_{01}^2$)

$$E_{01}^{(\text{экв})} = \frac{2E_{01}^2 - m_{01}^2}{m_{01}}. \qquad (9.6)$$

Например, для протонных встречных пучков при $E_{01} = 30$ *Гэв* $E_{01}^{(\text{экв})} = 1900$ *Гэв*. При кинематических расчетах часто бывают необходимы значения энергий E_{01}^*, E_{02}^* и импульсов p_{01}^* и p_{02}^* сталкивающихся частиц в $Ц$-системе. Как уже отмечалось в § 8, $Ц$-систему можно считать совпадающей с системой покоя некоторой фиктивной частицы с массой $\mathfrak{M} = E_c$ и 4-импульсом $\mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02}$, поэтому, заменяя в выражении (9.3) $m_2 \to \mathfrak{M}$ и $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02}$, получаем нужные формулы:

$$\left.\begin{aligned} E_{01}^* &= \frac{m_{01}^2 - \mathcal{P}_{01}\mathcal{P}_{02}}{E_c} = \frac{E_{01}E_{02} - \mathbf{p}_{01}\mathbf{p}_{02} + m_{01}^2}{E_c} = \frac{E_c^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2E_c}; \\ E_{02}^* &= \frac{m_{02}^2 - \mathcal{P}_{01}\mathcal{P}_{02}}{E_c} = \frac{E_{01}E_{02} - \mathbf{p}_{01}\mathbf{p}_{02} + m_{02}^2}{E_c} = \frac{E_c^2 + m_{02}^2 - m_{01}^2}{2E_c}; \end{aligned}\right\} \quad (9.7)$$

$$p_{01}^* = p_{02}^* = \frac{\sqrt{\left[E_c^2 - (m_{01} + m_{02})^2\right]\left[E_c^2 - (m_{01} - m_{02})^2\right]}}{2E_c} = \frac{\sqrt{(E_c^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2)^2 - 4m_{01}^2 m_{02}^2}}{2E_c}. \quad (9.8)$$

В частном случае, когда одна из сталкивающихся частиц в $Л$-системе (a_{02}) покоится, формулы (9.7) и (9.8) имеют следующий вид:

1) массы сталкивающихся частиц различны ($m_{01} \neq m_{02}$):

$$\left.\begin{aligned} E_{01}^* &= \frac{E_{01}m_{02} + m_{01}^2}{\sqrt{2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2}}; \\ \gamma_{01}^* &= \frac{\gamma_{01}\dfrac{m_{02}}{m_{01}} + 1}{\sqrt{2\gamma_{01}\dfrac{m_{02}}{m_{01}} + \left(\dfrac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2 + 1}}; \\ E_{02}^* &= \frac{E_{01}m_{02} + m_{02}^2}{\sqrt{2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2}}; \\ \gamma_{02}^* &= \gamma_c = \frac{\gamma_{01} + \dfrac{m_{02}}{m_{01}}}{\sqrt{2\gamma_{01}\dfrac{m_{02}}{m_{01}} + \left(\dfrac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2 + 1}}; \end{aligned}\right\} \quad (9.9)$$

$$p_{01}^* = p_{02}^* = \frac{p_{01}m_{02}}{\sqrt{2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2}} = m_{02}\sqrt{\frac{\gamma_{01}^2 - 1}{2\gamma_{01}\dfrac{m_{02}}{m_{01}} + \left(\dfrac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2 + 1}}. \quad (9.10)$$

Если энергия налетающей частицы велика [см. выражение (8.13)], то формулы (9.9) и (9.10) упрощаются:

$$\left.\begin{aligned} E_{01}^* = E_{02}^* = \frac{E_c}{2} &= \sqrt{\frac{E_{01}m_{02}}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma_{01}m_{01}m_{02}}{2}}; \\ \gamma_{01}^* = \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{2}\frac{m_{02}}{m_{01}}}; &\quad \gamma_{02}^* = \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{2}\frac{m_{01}}{m_{02}}}; \end{aligned}\right\} \quad (9.9')$$

$$p_{01}^* = p_{02}^* = E_{01}^* = E_{02}^*; \quad (9.10')$$

2) массы сталкивающихся частиц одинаковы ($m_{02} = m_{01}$):

$$\left.\begin{aligned} E_{01}^* = E_{02}^* = \frac{E_c}{2} &= \sqrt{\frac{m_{01}(E_{01} + m_{01})}{2}} = m_{01}\gamma_c; \\ \gamma_{01}^* = \gamma_{02}^* &= \gamma_c; \end{aligned}\right\} \quad (9.11)$$

$$p_{01}^* = p_{02}^* = \sqrt{\frac{m_{01}(E_{01} - m_{01})}{2}} = \sqrt{\frac{m_{01}T_{01}}{2}} = m_{01}\sqrt{\frac{\gamma_{01} - 1}{2}}. \quad (9.12)$$

§ 10. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОРОГИ РЕАКЦИЙ

В ядерной реакции общего типа (см. Введение)

$$a_{01} + a_{02} \to a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (10.1)$$

обычно с большой степенью точности сталкивающиеся частицы можно считать изолированной системой, и, следовательно, для нее выполняются законы сохранения полной энергии и полного импульса

$$E_{01} + E_{02} = E_1 + E_2 + \ldots + E_n; \quad (10.2)$$

$$\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots \mathbf{p}_n \quad (10.3)$$

или в четырехмерной записи

$$\mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_n. \quad (10.4)$$

Представим в выражении (10.2) полные энергии частиц как суммы кинетических энергий и масс частиц [см. формулу (2.2)]:

$$(T_{01} + T_{02}) + (m_{01} + m_{02}) = (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) + (m_1 + m_2 + \ldots + m_n). \quad (10.2')$$

Релятивистский закон сохранения энергии (10.2) обобщает два классических закона сохранения — закон сохранения кинетической энергии [первые скобки в обеих частях соотношения (10.2′)] и закон сохранения массы (вторые скобки), поскольку в релятивистской механике возможны взаимопревращения кинетической энергии и энергии покоя. Величина

$$Q = (m_{01} + m_{02}) - (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) - (T_{01} + T_{02}) \quad (10.5)$$

называется энергией реакции. Величина Q — релятивистский инвариант и поэтому служит однозначной характеристикой реакции безотносительно к системе координат, в которой наблюдается реакция. Знак Q определяет характер энергетического баланса реакции:

1) $Q > 0$, в реакции происходит выделение кинетической энергии за счет уменьшения энергии покоя; такие реакции называются экзоэнергетическими. Экзоэнергетическая реакция может идти в принципе при любой энергии сталкивающихся частиц;

2) $Q < 0$, в реакции энергия покоя возрастает за счет уменьшения кинетической энергии; такие реакции называются эндоэнергетическими. Очевидно, что эндоэнергетическая реакция может идти лишь начиная с некоторого порогового значения кинетической энергии сталкивающихся частиц;

3) $Q = 0$, этот случай практически возможен лишь при $n = 2$, т. е. в реакции упругого рассеяния частиц, при которой в общем случае происходит перераспределение кинетической энергии между двумя сталкивающимися частицами.

Примером экзоэнергетических реакций могут служить реакции деления тяжелых ядер или реакции термоядерного синтеза, например $d + d \rightarrow \mathrm{He}^3 + n$ ($Q = 3{,}25$ *Мэв*) или $d + t \rightarrow \mathrm{He}^4 + n$ ($Q = 17{,}6$ *Мэв*).

Экзоэнергетической реакцией является также распад частицы по схеме

$$a_0 \rightarrow a_1 + a_2 + \ldots a_n. \qquad (10.1')$$

В этом случае величина Q равна суммарной кинетической энергии продуктов распада в $Ц$-системе, которая совпадает с системой покоя распадающейся частицы ($E_c = m_0$). Величину Q удобно выразить через измеряемые экспериментально энергии E_i и импульсы $\mathbf{p}_i$ продуктов распада [см. выражение (8.3)]:

$$Q = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i\right)^2} - \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (10.6)$$

Типичным примером эндоэнергетической реакции является процесс множественного образования частиц. Пороговое значение энергии налетающей частицы $E_{01}^{\text{порог}}$ в эндоэнергетической реакции осуществляется тогда, когда все вторичные частицы в $Ц$-системе покоятся, т. е.

$$E_c^{(\text{порог})} = \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (10.7)$$

Отметим, что при этом кинетическая энергия сталкивающихся частиц

$$T_c^{(\text{порог})} = E_c^{(\text{порог})} - (m_{01} + m_{02}) = -Q. \qquad (10.8)$$

Возведя обе части равенства (10.4) в квадрат, имеем

$$(\mathcal{P}_{01}^{(\text{порог})} + \mathcal{P}_{02})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i\right)^2 = -\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2. \qquad (10.9)$$

Решая уравнение (10.9) относительно $E_{01}^{(\text{порог})}$, получаем

$$E_{01}^{(\text{порог})} = \frac{1}{2\left(E_{02}^2 - \mathcal{P}_{02}^2 \cos^2 \vartheta_{12}\right)} \left\{ E_{02} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \mathcal{P}_{02} \cos \vartheta_{12} \sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2 \right]^2 - 4m_{01}^2 \left(E_{02}^2 - \mathcal{P}_{02}^2 \cos^2 \vartheta_{12}\right)} \right\}, \qquad (10.10)$$

где ϑ_{12} — угол между импульсами $\mathbf{p}_{01}$ и $\mathbf{p}_{02}$.

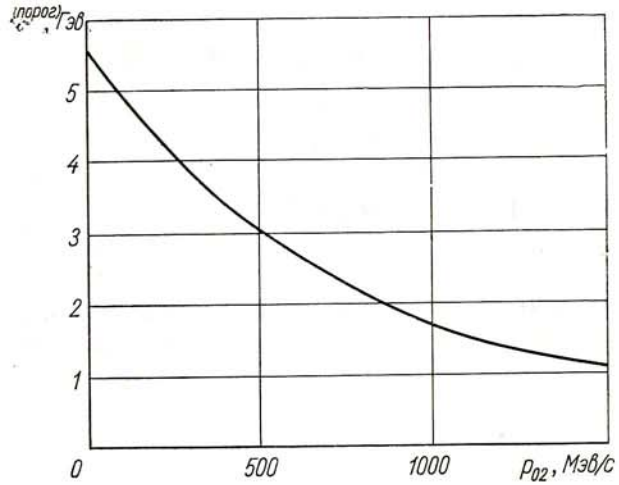


Рис. 11. Зависимость пороговой кинетической энергии налетающей частицы $T_{01}^{(\text{порог})}$ для образования пары нуклон — антинуклон в реакции $N + N \rightarrow N + N + N + \bar{N}$ от величины импульса p_{02} нуклона-мишени в ядре, направленного навстречу движению налетающей частицы.

Приведем частные случаи формулы (10.10):

1) частица-мишень a_{02} движется в том же направлении, что и налетающая частица a_{01} [$\cos \vartheta_{12} = +1$, знак «+» в формуле (10.11)] или навстречу ей [$\cos \vartheta_{12} = -1$, знак «—» в формуле (10.11)]:

$$E_{01}^{(\text{порог})} = \frac{E_{02}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2\right]}{2m_{02}^2} \pm$$

$$\pm \frac{p_{02}\sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2\right]^2 - 4m_{01}^2 m_{02}^2}}{2m_{02}^2}. \quad (10.11)$$

Пороговая энергия уменьшается, если частица-мишень движется навстречу налетающей частице. В экспериментальной практике нередко используется такое уменьшение пороговой энергии за счет внутриядерного движения нуклонов. В качестве иллюстрации на рис. 11 показана вычисленная по формуле (10.11) зависимость пороговой энергии для образования нуклон-антинуклонной пары в реакции $N + N \to N + N + N + \widetilde{N}$ от величины импульса p_{02} нуклона-мишени в ядре [считая, что $\mathbf{p}_{02}$ направлен точно навстречу импульсу $\mathbf{p}_{01}$ налетающей частицы — знак «—» в формуле (10.11)];

2) частица-мишень a_{02} покоится ($\mathbf{p}_{02} = 0$)

$$E_{01}^{(\text{порог})} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2}{2m_{02}}. \quad (10.12)$$

Кинетическая пороговая энергия

$$T_{01}^{(\text{порог})} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - (m_{01} + m_{02})^2}{2m_{02}} = -\frac{Q[Q + 2(m_{01} + m_{02})]}{2m_{02}}. \quad (10.12')$$

В Приложении III приведены пороговые энергии некоторых реакций как для покоящегося нуклона-мишени, так и для движущегося в ядре с $T_{02} = 25$ *Мэв*.

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ (РАСПРЕДЕЛЕНИЙ)

§ 11. ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Важнейшая характеристика любой ядерной реакции — вероятность ее осуществления. Рассмотрим определенную ядерную реакцию типа

$$a_{01} + a_{02} \to a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

сначала в $Л$-системе, т. е. в обычной постановке эксперимента, когда пучок частиц a_{01} направляется на неподвижную мишень, содержащую частицы a_{02}. Очевидно, что число взаимодействий $\Delta\mathcal{N}$ рассматриваемого типа, происшедших в элементе объема мишени ΔV за время Δt, пропорционально потоку бомбардирующих частиц j_{01} (число частиц a_{01} через единицу площади в единицу времени), плотности частиц мишени n_{02} (число частиц a_{02} в единице объема), а также величине элемента объема ΔV и времени Δt:

$$\Delta\mathcal{N} = \sigma j_{01} n_{02} \Delta V \Delta t. \quad (11.1)$$

Коэффициент пропорциональности σ, имеющий, как нетрудно убедиться, размерность площади, характеризует вероятность данной ядерной реакции и называется эффективным поперечным сечением (или сокращенно просто сечением). В качестве единицы измерения сечения в ядерной физике принят барн, равный 10^{-24} *см*^{2}, наиболее употребительна в физике высоких энергий производная величина — миллибарн (10^{-27} *см*^{2}).

Обычно ядерные реакции наблюдаются в некотором конечном объеме V (например, в стопке фотоэмульсий, рабочем объеме пузырьковой камеры и т. д.), при этом полное число взаимодействий

$$\mathcal{N} = \sigma n_{02} \Delta t \sum j_{01} \Delta V, \quad (11.2)$$

(поток j_{01} зависит от пространственной координаты — от глубины в мишени). Заметим, что величина

$$L = \Delta t \sum j_{01} \Delta V \quad (11.3)$$

равна суммарной длине следов всех налетающих частиц a_{01} в объеме V за все время наблюдения. Отсюда следует практически используемая формула для измерения сечения

$$\sigma = \frac{\mathcal{N}}{L n_{02}}. \quad (11.4)$$

Определение сечения с помощью выражения (11.1) относится к $Л$-системе. Теперь необходимо обобщить это определение для произвольной системы координат. Поскольку величина σ характеризует вероятность осуществления данной реакции, а эта вероятность должна быть одной и той же в любой системе координат, то и сечение σ следует определить так, чтобы оно было релятивистским инвариантом

$$\sigma = \sigma^*. \quad (11.5)$$

Очевидно, что левая часть равенства (11.1), т. е. число взаимодействий $\Delta\mathcal{N}$ — релятивистский инвариант. Произведение $\Delta t \Delta V$ в правой части — четырехмерный объем, т. е. также релятивистский инвариант. Следовательно, для того чтобы σ было инвариантом, необходимо инвариантным образом определить и произведение $j_{01} n_{02}$. Обозначим через n_{01} плотность числа частиц a_{01} в их собственной системе покоя, тогда в $Л$-системе их плотность будет $n_{01}\gamma_{01}$ (поскольку трехмерный объем релятивистски сокращается) и ток $j_{01} = n_{01}\gamma_{01}\beta_{01}$, отсюда

$$j_{01}\, n_{02} = n_{01}\, n_{02}\, \gamma_{01}\, \beta_{01} = n_{01}\, n_{02} \sqrt{\gamma_{01}^2 - 1}. \qquad (11.6)$$

Теперь нужно найти релятивистски инвариантное выражение, которое в $Л$-системе равно выражению (11.6). Очевидно, что для этого следует γ_{01} в равенстве (11.6) заменить лоренц-фактором γ_r относительного движения двух сталкивающихся частиц [см. формулу (9.4)]:

$$n_{01}\, n_{02} \sqrt{\gamma_r^2 - 1} = \frac{n_{01}\, n_{02}}{m_{01}\, m_{02}} \sqrt{(\mathcal{P}_{01}\, \mathcal{P}_{02})^2 - m_{01}^2\, m_{02}^2}, \qquad (11.6')$$

где $\mathcal{P}_{01}$ и $\mathcal{P}_{02}$ — 4-импульсы сталкивающихся частиц в произвольной системе координат; n_{02} — теперь плотность числа частиц a_{02} в их собственной системе покоя, которая раньше совпадала с $Л$-системой. Следовательно, в произвольной системе координат

$$\Delta \mathcal{N} = \sigma n_{01}\, n_{02}\, \frac{\sqrt{(\mathcal{P}_{01}\, \mathcal{P}_{02})^2 - m_{01}^2\, m_{02}^2}}{m_{01}\, m_{02}}\, \Delta t\, \Delta V. \qquad (11.1')$$

Выяснив принципиальную сторону дела, для дальнейших рассуждений воспользуемся выражением (11.4). Сечение (11.4) определяется числом $\mathcal{N}$ всех случаев данной реакции и поэтому называется полным (или интегральным) сечением. Для более детальной информации о рассматриваемой реакции необходимо отобрать среди случаев взаимодействия те, в которых характеристики вторичных частиц удовлетворяют определенным критериям. Число $d\mathcal{N}$ таких случаев взаимодействия характеризует дифференциальное сечение

$$d\sigma = \frac{d\mathcal{N}}{L n_{02}}. \qquad (11.7)$$

Аналогично можно ввести и $d^2\sigma$, $d^3\sigma$ и т. д. в зависимости от числа независимых параметров, по которым производится отбор случаев. Часто выделяются такие взаимодействия, в которых вторичная частица определенного сорта обладает импульсом в заданном интервале $(p, p + dp)$ и испускается в заданном направлении (ϑ, φ) в элемент телесного угла $d\Omega$, а по импульсам и углам остальных вторичных частиц производится усреднение. Число таких взаимодействий $d^2\mathcal{N}$ зависит от p, ϑ, φ и пропорционально dp и $d\Omega$:

$$d^2 \mathcal{N} = f(p, \vartheta, \varphi)\, dp\, d\Omega, \qquad (11.8)$$

отсюда

$$d^2\sigma = \frac{d^2 \mathcal{N}}{L n_{02}} = \frac{f(p, \vartheta, \varphi)}{L n_{02}}\, dp\, d\Omega. \qquad (11.9)$$

Дифференциальные сечения $d\sigma$, $d^2\sigma$ и т. д., как и полное сечение σ — релятивистские инварианты, однако обычно используются дифференциальные сечения, отнесенные к выбранным интервалам независимых параметров, т. е. величины типа $d^2\sigma/dpd\Omega$, $d\sigma/dp$, $d\sigma/d\Omega$ и т. д. Эти величины пропорциональны распределениям числа N

вторичных частиц выделенного типа в данной реакции по выбранным независимым параметрам, в частности, в приведенном случае — по импульсам и углам. Поскольку в качестве первичного экспериментального материала получают именно распределения вторичных частиц, то мы в дальнейшем чаще будем придерживаться термина распределение и использовать обозначения $\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2N}{dpd\Omega}$, $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dp}$, $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega}$ и т. д. Множитель $1/N$ введен для нормировки распределения на единицу, т. е.

$$\int_p \int_\Omega \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N}{dp\, d\Omega}\right) dp\, d\Omega = 1 \qquad (11.10)$$

и т. д. Преобразование распределений из одной системы координат в другую (в частности, из $Ц$-системы в $Л$-систему) представляет важную практическую задачу, к решению которой и перейдем.

§ 12. ЯКОБИАНЫ

Рассмотрим вначале преобразование дважды дифференциального сечения

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N}{dp\, d\Omega} = F(p, \vartheta, \varphi), \qquad (12.1)$$

причем для конкретности обратимся к преобразованию из $Ц$-системы в $Л$-систему, помня о том, что все полученные формулы в равной мере справедливы и для двух произвольных инерциальных систем отсчета. Для этих расчетов естественно использовать сферические координаты, направив, как обычно, полярную ось вдоль вектора β_c (см. § 3).

Число частиц в заданных интервалах импульса и телесного угла в одной системе координат равно числу частиц в соответствующих интервалах импульса и телесного угла в другой системе координат

$$\left(\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N}{dp\, d\Omega}\right) dp\, d\Omega = \left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right) dp^*\, d\Omega^*. \qquad (12.2)$$

С математической точки зрения по существу производится просто замена переменных

$$p^*, \cos\vartheta^*, \varphi^* \to p, \cos\vartheta, \varphi. \qquad (12.3)$$

Заметим лишь, что поскольку азимутальный угол инвариантен относительно преобразований Лоренца ($\varphi^* = \varphi$), то фактически всегда дело сводится к замене только двух переменных, закон преобразования которых не зависит от азимутального угла, поэтому в дальнейшем в символе якобиана будем опускать азимутальные углы. Таким образом,

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N}{dp\, d\Omega} = \frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\, J(p^*, \cos\vartheta^*/p, \cos\vartheta), \qquad (12.4)$$

где $J(\ldots)$ — соответствующий якобиан,

$$dp^*\,d\Omega^* = J(p^*, \cos\vartheta^*/p, \cos\vartheta)\,dp\,d\Omega. \qquad (12.5)$$

Вместо того чтобы вычислять обычные выражения для якобиана через частные производные, проще воспользоваться релятивистской инвариантностью величины d^3p/E [см. формулу (7.4′)]. В сферических координатах

$$\left.\begin{aligned} d^3p &= p^2\,dp\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = p^2\,dp\,d\Omega; \\ d^3p^* &= p^{*2}\,dp^*\sin\vartheta^*\,d\vartheta^*\,d\varphi^* = p^{*2}\,dp^*\,d\Omega \end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

и выражение (7.4′) можно переписать в виде

$$\frac{p^{*2}}{E^*}\,dp^*\,d\Omega^* = \frac{p^2}{E}\,dp\,d\Omega. \qquad (12.7)$$

Из соотношений (12.1) и (12.7) следует, что величина

$$\frac{E}{p^2}\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dp\,d\Omega}\right) = \frac{E^*}{p^{*2}}\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right) \qquad (12.8)$$

релятивистский инвариант. Таким образом,

$$J(p^*, \cos\vartheta^*/p, \cos\vartheta) = \frac{E^*}{E}\cdot\frac{p^2}{p^{*2}} = \frac{E^*}{E}\cdot\frac{\sin^2\vartheta^*}{\sin^2\vartheta}, \qquad (12.9)$$

[последнее равенство (12.9) вытекает из инвариантности поперечного импульса, см. формулу (7.5)].

Используя соотношения (3.10), (3.10′), (3.12) и (3.12′), приходим к следующей связи между распределениями в двух системах:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dp\,d\Omega} = \left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)\frac{\gamma_c(E-p\beta_c\cos\vartheta)\,p^2}{\left[\gamma_c^2(E-p\beta_c\cos\vartheta)^2-m^2\right]E} =$$

$$= \left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)\frac{\gamma_c(1-\beta_c\beta\cos\vartheta)}{\gamma_c^2(\cos\vartheta-\beta_c/\beta)^2+\sin^2\vartheta}, \qquad (12.10)$$

причем в $Ц$-системе распределение в правой части равенства (12.10) должно быть выражено с помощью преобразований Лоренца [см. соотношения (3.10)] через величины в $Л$-системе:

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*} = F^*(p^*, \vartheta^*, \varphi^*) = F^*[p^*(p, \vartheta), \vartheta^*(p, \vartheta), \varphi]. \qquad (12.11)$$

Следует отметить, что равенство (12.4), строго говоря, справедливо при взаимно однозначном соответствии между точками $(p, \cos\vartheta)$ и $(p^*, \cos\vartheta^*)$. В противном случае, если бы точке $(p, \cos\vartheta)$ соответствовало несколько точек $(p_k^*, \cos\vartheta_k^*)$, то вместо равенства (12.4) следовало бы написать сумму по этим точкам

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dp\,d\Omega} = \sum_k\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)_k J(p_k^*, \cos\vartheta_k^*/p, \cos\vartheta). \qquad (12.12)$$

Как легко сообразить, связь между точками $(p, \cos\vartheta)$ и $(p, \cos\vartheta^*)$, осуществляемая преобразованиями Лоренца, однозначна везде,

кроме точки $(p=\gamma_c\beta_c\,m,\ \vartheta=0)$, которой в $Ц$-системе соответствует множество точек $(p^*=0,\ \vartheta^*$ — любое значение). Это означает, что равенством (12.4) практически всегда можно пользоваться.

Наряду с распределением по импульсам применяется и распределение по энергиям $\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dE\,d\Omega}$, связь между этими распределениями устанавливается элементарно с помощью соотношения

$$p\,dp = E\,dE. \qquad (12.13)$$

Релятивистский инвариант для энергетического распределения, аналогичный соотношению (12.8), имеет вид

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dE\,d\Omega}\right) = \frac{1}{p^*}\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE^*\,d\Omega^*}\right) \qquad (12.14)$$

и соответствующий якобиан

$$J(E^*, \cos\vartheta^*/E, \cos\vartheta) = \frac{p}{p^*} = \frac{\sin\vartheta^*}{\sin\vartheta}. \qquad (12.15)$$

Отсюда получаем связь между распределениями в двух системах координат

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dE\,d\Omega} = \left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE^*\,d\Omega^*}\right)\frac{p}{\sqrt{\gamma_c^2(E-p\beta_c\cos\vartheta)^2-m^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE^*\,d\Omega^*}\right)\frac{1}{\sqrt{\gamma_c^2(\cos\vartheta-\beta_c\beta)^2+\sin^2\vartheta}}. \qquad (12.16)$$

В исследованиях по физике высоких энергий нередко фигурируют дифференциальные распределения в $Л$-системе по одной какой-либо переменной — угловое распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}$ или импульсное распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp}$ (или энергетическое $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE}$). Очевидно, что для получения таких распределений дважды дифференциальное распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dp\,d\Omega}$ должно быть проинтегрировано по второй переменной.

Рассмотрим сначала угловое распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}$. Практически всегда значительно проще проинтегрировать по импульсам в $Ц$-системе, поэтому для получения углового распределения в $Л$-системе вместо замены (12.2) делается замена переменных

$$p^*, \cos\vartheta^*, \varphi^* \to p^*, \cos\vartheta, \varphi, \qquad (12.17)$$

которая осуществляется с помощью формулы (5.4). Якобиан преобразования (12.17) имеет вид:

$$J(p^*, \cos\vartheta^*/p^*, \cos\vartheta) = \left|\frac{\partial\cos\vartheta^*}{\partial\cos\vartheta}\right|_{p^*=\text{const}} =$$

$$= \frac{\gamma_c^2 \left[\varkappa \pm \sqrt{1 + (1-\varkappa^2)\,\gamma_c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}\,\right]^2}{|\cos^3 \vartheta|\,(1 + \gamma_c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta)^2 \sqrt{1 + (1-\varkappa^2)\,\gamma_c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}} =$$

$$= \frac{\gamma_c^2 \left[\beta_c E^* |\cos \vartheta| \pm \sqrt{E^{*2} - m^2 a^2}\,\right]^2}{a^4 p^* \sqrt{E^{*2} - m^2 a^2}}, \qquad (12.18)$$

где

$$a = |\cos \vartheta| \sqrt{1 + \gamma_c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \sqrt{\gamma_c^2 (1 - \beta_c^2 \cos^2 \vartheta)}. \qquad (12.19)$$

Характер зависимости якобиана $J(p^*, \cos \vartheta^*/p, \cos \vartheta)$ от угла ϑ в $Л$-системе, очевидно, таков же, как и характер зависимости угла ϑ^* (см. рис. 8). Напомним правило употребления знаков в выражении (12.18) и определим пределы интегрирования по p^* при разных значениях параметра $\varkappa = \beta_c/\beta^* = \beta_c E^*/p^*$. 1) $\varkappa \leqslant 1$ или $p^* \geqslant \gamma_c \beta_c m$. Якобиан — однозначная функция угла ϑ, знак «+» при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ и знак «—» при $\pi/2 < \vartheta \leqslant \pi$. Нижний предел интегрирования $p^* = \gamma_c \beta_c m$, верхний предел определяется границей импульсного спектра в $Ц$-системе $p^* = p^*_{\text{гр}}$; 2) $\varkappa > 1$ или $p^* < \gamma_c \beta_c m$. Якобиан — двузначная функция угла ϑ, употребляются оба знака в выражении (12.18), и угловое распределение должно представлять собой сумму двух членов. При $\varkappa > 1$ под заданным углом ϑ в $Л$-системе пойдут лишь те частицы, для которых предельный угол, определяемый равенством (5.12), превышает ϑ. Отсюда нижний предел интегрирования $p^* = \gamma_c \beta_c m \sin \vartheta$, а верхний $p^* = \gamma_c \beta_c m$.

Подводя итог, приведем окончательные формулы для углового распределения в $Л$-системе в следующем виде:

а) при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega} = \int\limits_{\gamma_c \beta_c m \sin \vartheta}^{\gamma_c \beta_c m} \left[\left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right)_+ J_+(\ldots) + \left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right)_- J_-(\ldots)\right] dp^* +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_c \beta_c m}^{p^*_{\text{гр}}} \left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right)_+ J_+(\ldots)\, dp^*; \qquad (12.20)$$

б) при $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leqslant \pi$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega} = \int\limits_{\gamma_c \beta_c m}^{p^*_{\text{гр}}} \left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right)_- J_-(\ldots)\, dp^*, \qquad (12.20')$$

где индексы «+» и «—» означают знаки, которые следует брать в выражении (12.18) для якобиана и в формуле (5.4) для $\cos \vartheta^*$; с помощью последней формулы распределение в $Ц$-системе выражено через p^* и ϑ:

$$\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*} = F^*(p^*, \vartheta^*, \varphi^*) = F^*[p^*, \vartheta^*(p^*, \vartheta)\, \varphi]. \qquad (12.21)$$

Как уже отмечалось в § 5, для многих задач хорошим приближением служат формулы при $\varkappa = 1$. В этом случае якобиан

$$J(p^*, \cos \vartheta^*/p^*, \cos \vartheta) = \frac{4 \gamma_c^2 \cos \vartheta}{a^4} = \frac{4 \cos \vartheta}{\gamma_c^2 (1 - \beta_c^2 \cos^2 \vartheta)^2} \qquad (12.18')$$

и не зависит от p^*, поэтому его можно вынести из-под знака интеграла в выражениях (12.20) и (12.20′).

Обратимся теперь к вычислению импульсного распределения в $Л$-системе $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dp}$. В этом случае также удобней свести задачу к интегрированию по импульсам в $Ц$-системе, сделав вместо замены (12.2) замену переменных

$$p^*, \cos \vartheta^*, \varphi^* \to p^*, p, \varphi \qquad (12.22)$$

с помощью соотношения

$$\cos \vartheta = \frac{E - \gamma_c E^*}{\gamma_c \beta_c p^*} \qquad (12.23)$$

[см. соотношение (3.10′)]. Якобиан этого преобразования

$$J(p^*, \cos \vartheta^*/p^*, p) = \left|\frac{\partial \cos \vartheta^*}{\partial p}\right|_{p^* = \text{const}} = \frac{1}{\gamma_c \beta_c p^*} \cdot \frac{p}{E} \qquad (12.24)$$

и

$$dp^*\, d\Omega^* = \frac{1}{\gamma_c \beta_c} \cdot \frac{p\, dp}{E} \cdot \frac{dp^*}{p^*}\, d\varphi^*. \qquad (12.25)$$

Искомое импульсное распределение

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dp} = \frac{1}{\gamma_c \beta_c} \cdot \frac{p}{E} \int\limits_{p^*_-}^{p^*_+} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*}\right) \frac{dp^*}{p^*}\, d\varphi^*, \qquad (12.26)$$

где пределы интегрирования по p^* определяются (при фиксированном значении p) условием $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, т. е.

$$p^*_\pm = \sqrt{\gamma_c^2 (E \pm \beta_c p)^2 - m^2}, \qquad (12.27)$$

а распределение в $Ц$-системе с помощью формулы (12.23) представлено в виде функции p^* и p:

$$\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^*\, d\Omega^*} = F^*(p^*, \vartheta^*, \varphi^*) = F^*[p^*, \vartheta^*(p^*, p), \varphi]. \qquad (12.28)$$

Часто предполагается, что имеет место азимутальная изотропия, т. е. $\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}$ не зависит от φ^*, тогда

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp}=\frac{2\pi}{\gamma_c\beta_c}\cdot\frac{p}{E}\int\limits_{p_-^*}^{p_+^*}\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)\frac{dp^*}{p^*}. \qquad (12.26')$$

Нередко возникает также необходимость вычислить распределение по поперечным импульсам; это распределение — релятивистский инвариант и его вычисление проще всего произвести в $Ц$-системе, сделав замену переменных

$$p^*,\ \cos\vartheta^*,\ \varphi^*\to p_\perp,\ \vartheta^*,\ \varphi \qquad (12.29)$$

по формуле

$$p^*=\frac{p_\perp}{\sin\vartheta^*} \qquad (12.30)$$

и затем проинтегрировав по ϑ^* и по φ.

Якобиан преобразования (12.29) равен

$$J\left(p^*,\cos\vartheta^*/p_\perp,\vartheta^*\right)=\left|\frac{\partial p^*}{\partial p_\perp}\cdot\frac{\partial\cos\vartheta^*}{\partial\vartheta^*}\right|=1 \qquad (12.31)$$

и

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=\int\limits_{\vartheta^*_{\text{гр}}}^{\pi-\vartheta^*_{\text{гр}}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)d\vartheta^*\,d\varphi, \qquad (12.32)$$

где

$$\vartheta^*_{\text{гр}}=\arcsin\left(\frac{p_\perp}{p^*_{\text{гр}}}\right);$$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N^*}{dv^*\,d\Omega^*}=F^*\left(p^*,\vartheta^*,\varphi^*\right)=F^*\left[p^*\left(p_\perp,\vartheta^*\right),\vartheta^*,\varphi\right]. \qquad (12.33)$$

Чаще всего приходится иметь дело с распределениями в $Ц$-системе, обладающими азимутальной изотропией и симметричными относительно направления «вперед — назад»:

$$F^*\left(p^*,\vartheta^*,\varphi^*\right)=F^*\left(p^*,\vartheta^*\right)=F^*\left(p^*,\pi-\vartheta^*\right), \qquad (12.34)$$

в этом случае

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=4\pi\int\limits_{\vartheta^*_{\text{гр}}}^{\pi/2}\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}\right)d\vartheta^*. \qquad (12.32')$$

§ 13. НЕСКОЛЬКО ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим преобразование нескольких определенных видов распределений, часто встречающихся в практике кинематического анализа.

1. Импульс частицы в $Ц$-системе постоянен ($=p_0^*$), а угловое распределение изотропно:

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*d\Omega^*}=\frac{1}{4\pi}\,\delta\left(p^*-p_0^*\right). \qquad (13.1)$$

Подставляя выражение (13.1) в формулы (12.20) и (12.20′), получаем следующие выражения для углового распределения в $Л$-системе (рис. 12):

а) при $p_0^*<m\gamma_c\beta_c\left(\varkappa_0=\frac{\beta_c E_0^*}{p_0^*}>1\right)$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\left[J_+\left(p_0^*,\cos\vartheta^*/p_0^*,\cos\vartheta\right)+J_-\left(p_0^*,\cos\vartheta^*/p_0^*,\cos\vartheta\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2\left[1+\varkappa_0^2+\left(1-\varkappa_0^2\right)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta\right]}{\cos^3\vartheta\left(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta\right)^2\sqrt{1+\left(1-\varkappa_0^2\right)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2\left[E_0^{*2}\left(1+\beta_c^2\cos^2\vartheta\right)-m^2a^2\right]}{a^4p_0^*\sqrt{E_0^{*2}-m^2a^2}}; \qquad (13.2)$$

$$0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_{\text{макс}},$$

где $\vartheta_{\text{макс}}$ определяется соотношением (5.11) или (5.12):

$$\sin\vartheta_{\text{макс}}=\frac{p_0^*}{m\gamma_c\beta_c}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varkappa_0^2-1\right)\gamma_c^2}}. \qquad (13.3)$$

Напомним, что величина a была введена формулой (12.19). Можно показать [14], что в $Л$-системе в конусе с углом раствора $\vartheta=\operatorname{arctg}\frac{3}{\gamma_c}\approx\frac{3}{\gamma_c}$ содержится не менее 90% всех частиц;

б) при $p_0>m\gamma_c\beta_c$ $(\varkappa_0<1)$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi}J\left(p_0^*,\cos\vartheta^*/p_0^*,\cos\vartheta\right)=\\&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2\left[\varkappa_0\pm\sqrt{1+\left(1-\varkappa_0^2\right)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right]^2}{|\cos^3\vartheta|\left(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta\right)^2\sqrt{1+\left(1-\varkappa_0^2\right)\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}}=\\&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2\left[\beta_cE_0^*|\cos\vartheta|\pm\sqrt{E_0^{*2}-m^2a^2}\right]^2}{a^4p^*\sqrt{E_0^{*2}-m^2a^2}}\\&0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

(употребление знаков см. в § 12). Если масса частицы $m = 0$, формула (13.4) значительно упрощается:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\gamma_c^2}\cdot\frac{1}{(1-\beta_c\cos\vartheta)^2}. \qquad (13.4')$$

Средний угол в $Л$-системе, соответствующий распределению (13.4'),

$$\bar{\vartheta} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\gamma_c^2}\cdot\frac{\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{(1-\beta_c\cos\vartheta)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\gamma_c\beta_c}\left[1-\frac{1}{\gamma_c(1+\beta_c)}\right], \qquad (13.5)$$

что при $\gamma_c \gg 1$ дает

$$\bar{\vartheta} \approx \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\gamma_c}; \qquad (13.5')$$

в) для упругого рассеяния и ультрарелятивистского предела, когда $\beta_0^* \to 1$ и $\beta_c \to 1$, применяется формула при $\varkappa_0 = 1$ [см. выражение (12.18')]:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma_c^2}\cdot\frac{\cos\vartheta}{(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta)^2}. \qquad (13.6)$$

Средний угол в $Л$-системе в этом случае

$$\bar{\vartheta} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma_c^2}\cdot\frac{\vartheta\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\gamma_c+1}, \qquad (13.7)$$

что при $\gamma_c \gg 1$ также приводит к соотношению (13.5').

Энергетическое распределение в $Л$-системе, соответствующее выражению (13.1), по формуле (12.26') [с учетом выражения (12.13)] имеет следующий вид:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE} = \frac{E}{p}\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp}\right) = \frac{1}{2\gamma_c\beta_c}\int_{p_-^*}^{p_+^*}\delta(p^*-p_0^*)\frac{dp^*}{p^*} = \frac{1}{2\gamma_c\beta_c p^*}, \qquad (13.8)$$

т. е. это равномерное, не зависящее от E распределение в интервале

$$\gamma_c(E_0^*-\beta_c p_0^*) \leqslant E \leqslant \gamma_c(E_0^*+\beta_c p_0^*), \qquad (13.9)$$

а вне этого интервала

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE} = 0$$

(рис. 13).

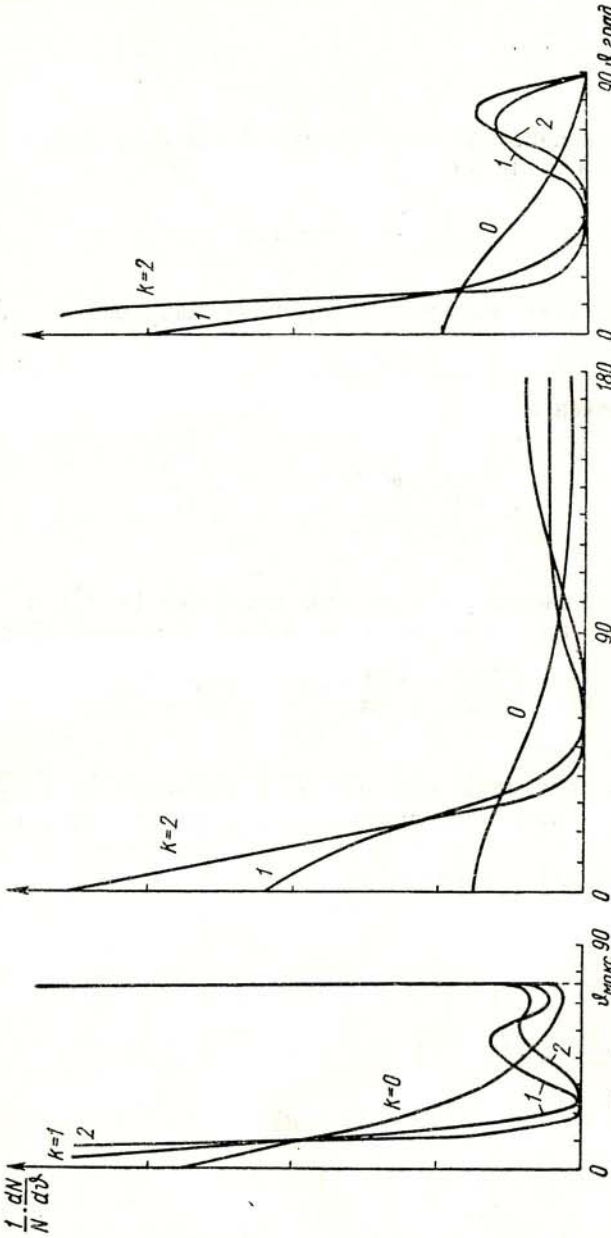


Рис. 12. Угловые распределения в $Л$-системе, соответствующие распределениям (13.1) и (13.14) в $Ц$-системе.

Распределение по поперечным импульсам по выражению (12.32′)

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=\int\limits_{\vartheta^*_{\text{гр}}}^{\pi/2}\delta\left(\frac{p_\perp}{\sin\vartheta^*}-p_0^*\right)d\vartheta^*. \tag{13.10}$$

Воспользовавшись обычной формулой для δ-функции от сложного аргумента, получим

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=\frac{p_\perp}{p_0^*\sqrt{p_0^{*2}-p_\perp^2}}. \tag{13.11}$$

Наиболее вероятное значение поперечного импульса

$$p_\perp^{\text{вер}}=p_0^*, \tag{13.12}$$

а среднее значение

$$\bar{p}_\perp=\int\limits_0^{p_0^*}\frac{p_\perp^2\,dp_\perp}{p_0^*\sqrt{p^{*2}_0-p_\perp^2}}=\frac{\pi}{4}p_0^*. \tag{13.13}$$

2. Импульс частицы в *Ц*-системе постоянен ($=p_0^*$), а угловое распределение пропорционально четной степени $\cos\vartheta^*$ [16]:

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*d\Omega^*}=\frac{2k+1}{4\pi}\cos^{2k}\vartheta^*\,\delta(p^*-p_0^*), \tag{13.14}$$

где k — целое число.

Такие же выкладки, как и в п. 1, приводят к следующим результатам. Угловое распределение в *Л*-системе (см. рис. 12):

а) при $p_0^*<m\gamma_c\beta_c$ $\left(\varkappa_0=\dfrac{\beta_c E_0^*}{p_0^*}>1\right)$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{2k+1}{4\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2}{\cos^3\vartheta\,(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta)^{2k+2}\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}}\times$$
$$\times\left\{\left[-\varkappa_0\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta+\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right]^{2k}\times\right.$$
$$\times\left(\varkappa_0+\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^2+$$
$$+\left[\varkappa_0\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta+\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right]^{2k}\times$$
$$\left.\times\left(\varkappa_0-\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^2\right\}; \tag{13.15}$$
$$0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_{\text{макс}},$$

где $\vartheta_{\text{макс}}$, как и прежде, определяется равенством (13.3);

б) при $p_0^*>m\gamma_c\beta_c$ $(\varkappa_0<1)$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{2k+1}{4\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2}{|\cos^3\vartheta|\,(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta)^{2k+2}\sqrt{1+(1-\beta_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}}\times$$
$$\times\left(-\varkappa_0\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta\pm\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^{2k}\times$$
$$\times\left(\varkappa_0\pm\sqrt{1+(1-\varkappa_0^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^2; \tag{13.16}$$
$$0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$$

(употребление знаков см. в § 12);

в) при $\varkappa_0=1$ ультрарелятивистский предел $(\beta_0^*\to1,\ \beta_c\to1)$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{2k+1}{\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2}{\cos^3\vartheta\,(1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta)^2}\left(\frac{1-\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right)^{2k}=$$
$$=\frac{2k+1}{\pi}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\gamma_c^2\,(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta)^2}\left[\frac{1-(2-\beta_c^2)\cos^2\vartheta}{1-\beta_c^2\cos^2\vartheta}\right]^{2k}; \tag{13.17}$$
$$0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Угловое распределение в *Л*-системе обладает двумя характерными максимумами, отражающими пики вперед и назад в распределении (13.14). Первый максимум соответствует направлению вперед

$$\vartheta_1^{\text{макс}}=0. \tag{13.18}$$

Положение второго максимума в общем случае выражается довольно громоздкими формулами. Например, для сравнительно простой кривой (13.17)

$$\operatorname{tg}^2\vartheta_2^{\text{макс}}=2\left[\sqrt{\left(1-\frac{2k+1}{2\gamma_c^2}\right)^2+\frac{3k\,(k+1)}{\gamma_c^4}}-\left(1-\frac{2k+1}{\gamma_c^2}\right)\right]. \tag{13.19}$$

Если $\gamma_c\gg1$, формула (13.19) существенно упрощается

$$\operatorname{tg}\vartheta_2^{\text{макс}}\approx\frac{\sqrt{2k+1}}{\gamma_c}. \tag{13.19′}$$

Минимум между $\vartheta_1^{\text{макс}}$ и $\vartheta_2^{\text{макс}}$ на кривой (13.17) определяется выражением

$$\operatorname{tg}\vartheta^{\text{мин}}=\frac{1}{\gamma_c}. \tag{13.20}$$

Энергетическое распределение в $Л$-системе (рис. 13):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE}=\frac{2k+1}{2\gamma_c\beta_c p_0^*}\left(\frac{E-\gamma_c E_0^*}{\gamma_c\beta_c p_0^*}\right)^{2k};\\ &\gamma_c(E_0^*-\beta_c p_0^*)\leqslant E\leqslant\gamma_c(E_0^*+\beta_c p_0^*). \end{aligned}\right\} \qquad (13.21)$$

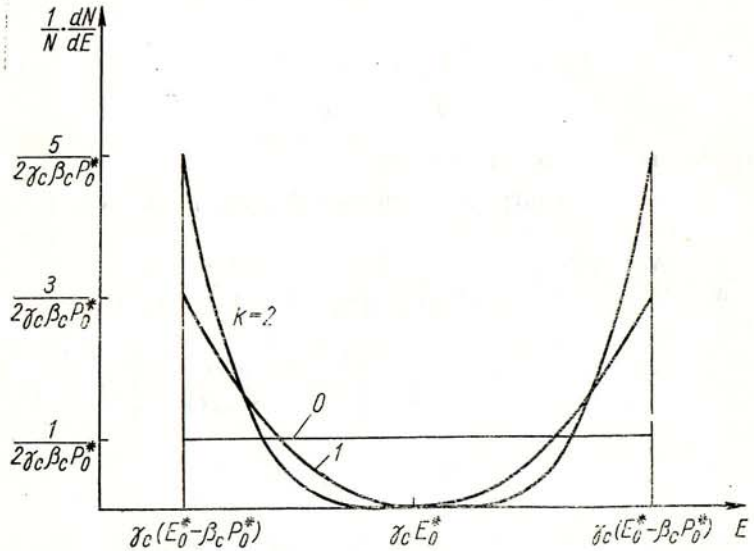


Рис. 13. Энергетические распределения в $Л$-системе, соответствующие распределениям (13.1) и (13.14) в $Ц$-системе.

Распределение по поперечным импульсам

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=(2k+1)\frac{p_\perp\left(p_0^{*2}-p_\perp^2\right)^{\frac{2k-1}{2}}}{p_0^{*2k+1}}. \qquad (13.22)$$

Наиболее вероятное значение поперечного импульса

$$p_\perp^{\text{вер}}=\frac{p_0^*}{\sqrt{2k}}. \qquad (13.23)$$

Среднее значение поперечного импульса

$$\overline{p}_\perp=\frac{\pi}{2^{2k+2}}\cdot\frac{(2k+1)!}{k!\,(k+1)!}\,p_0^*. \qquad (13.24)$$

3. Угловое распределение в $Ц$-системе изотропно, а импульсное распределение пропорционально p^{*2}/E^{*4}:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}=\frac{A}{4\pi}\cdot\frac{mp^{*2}}{E^{*4}};\\ &0\leqslant p^*\leqslant p^*_{\text{гр}}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.25)$$

где A — нормировочная константа.

Такое распределение вытекает из теории множественного образования частиц, предложенной Гейзенбергом [15], и его преобразование неоднократно обсуждалось [16].

Прежде всего найдем нормировочную константу A:

$$\frac{1}{A}=\int_0^{p^*_{\text{гр}}}\frac{mp^{*2}\,dp^*}{E^{*4}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{p^*_{\text{гр}}}{m}-\frac{mp^*_{\text{гр}}}{m^2+p^{*2}_{\text{гр}}}\right). \qquad (13.26)$$

Если $p^*_{\text{гр}}\gg m$, то

$$\frac{1}{A}\approx\frac{\pi}{4}-\frac{m}{p^*_{\text{гр}}}. \qquad (13.26')$$

Угловое распределение, вычисленное по формулам (12.9), можно записать в следующем виде, справедливом во всем интервале углов ϑ $(0\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{A}{4\pi}\cdot\frac{\gamma_c^2}{a^4}\left\{\frac{1+2\gamma_c^2\cos^2\vartheta}{2a}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{\gamma^{*2}_{\text{гр}}-a^2}}{\gamma^*_{\text{гр}}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\arcsin\left(\beta_c\cos\vartheta\right)\right]+\left(\frac{1}{\gamma_c}-\frac{2}{\gamma^*_{\text{гр}}}\right)\beta_c\cos\vartheta-\frac{\sqrt{\gamma^{*2}_{\text{гр}}-a^2}}{\gamma^{*2}_{\text{гр}}}\right\}, \qquad (13.27)$$

где величина a определяется выражением (12.19). При $\gamma_c\gg 1$ и $\gamma^*_{\text{гр}}\gg 1$ для подавляющего большинства частиц, идущих в конусе с углом раствора $\vartheta\approx 3/\gamma_c$, вторым и третьим членами в фигурных скобках можно пренебречь, а арксинусы в первом члене заменить на $\pi/2$. В результате получаем простую приближенную формулу

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}\approx\frac{A}{8}\cdot\frac{\gamma_c^2\left(1+2\cos^2\vartheta\right)}{a^5}. \qquad (13.28)$$

Импульсное распределение имеет чрезвычайно простой вид

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp}=A\gamma_c\frac{mp^2}{\left(p^2+\gamma_c^2m^2\right)^2}, \qquad (13.29)$$

причем наиболее вероятное значение импульса

$$p^{\text{вер}}=\gamma_c m. \qquad (13.30)$$

Распределение по поперечным импульсам

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}=\frac{A}{2}\cdot\frac{mp_\perp}{(m^2+p_\perp^2)^{3/2}}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{(m^2+p_\perp^2)(p_{\text{гр}}^{*2}-p_\perp^2)}}{p_{\text{гр}}^{*2}+m^2}-\right.$$

$$\left.-\arcsin\sqrt{\frac{m^2+p_\perp^2}{m^2+p_{\text{гр}}^{*2}}}\right]. \qquad (13.31)$$

Если $p_{\text{гр}}^*\gg m$, то

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_\perp}\approx\frac{A}{2}\cdot\frac{mp_\perp}{(m^2+p_\perp^2)^{3/2}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(p_\perp^2+m^2)^{3/2}}{p_{\text{гр}}^{*3}}\right]. \qquad (13.32)$$

Вычисление $\bar{p}_\perp$ требует громоздких выкладок. Заметим лишь, что с ростом $p_{\text{гр}}^*$ среднее значение $\bar{p}_\perp$ логарифмически расходится

$$\bar{p}_\perp\approx m\ln\frac{p_{\text{гр}}^*}{m}. \qquad (13.33)$$

4. Угловое распределение в *Ц*-системе изотропно, а импульсное распределение описывается формулой Бозе — Планка при температуре T:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dp^*\,d\Omega^*}&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{m^3F_2(z)}\cdot\frac{p^{*2}}{e^{\frac{zE^*}{m}}-1}=\frac{1}{4\pi}\omega(p^*);\\ z&=\frac{m}{T},\end{aligned}\right\} \qquad (13.34)$$

где T — в энергетических единицах.

Множитель $1/F_2(z)$ — нормировочный, величина $F_2(z)$ определяется ниже [см. формулу (13.41) и рис. 14]. Распределение типа (13.34) при температуре $T\sim m$ ($z\sim 1$) широко используется, например, в различных моделях множественной генерации частиц [17, 18].

Для вычисления углового распределения в *Л*-системе сделаем следующие упрощающие предположения. Рассмотрим практически нужный в приложениях случай $\gamma_c\gg 1$; тогда число частиц, летящих под углами больше 90°, пренебрежимо мало, и можно ограничиться вычислением интеграла (12.20). Кроме того, так как при $p^*>\gamma_c\beta_c m$

$$J_-(p^*,\cos\vartheta^*/p^*,\cos\vartheta)\ll J_+(p^*,\cos\vartheta^*/p^*,\cos\vartheta),$$

интеграл (12.20) можно приближенно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma_c\beta_c m\sin\vartheta}^{\infty}\omega(p^*)[J_+(\ldots)+J_-(\ldots)]dp^*=$$

$$=\frac{\gamma_c^2}{2\pi F_2(z)\,a}\int\limits_1^\infty\left[\left(2-\frac{a^2}{\gamma_c^2}\right)\sqrt{t^2-1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{a^2}{\gamma_c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right]\frac{tdt}{e^{zat}-1}, \qquad (13.35)$$

где сделана замена переменных

$$t=\frac{E^*}{ma}; \qquad (13.36)$$

величина a определяется формулой (12.19).

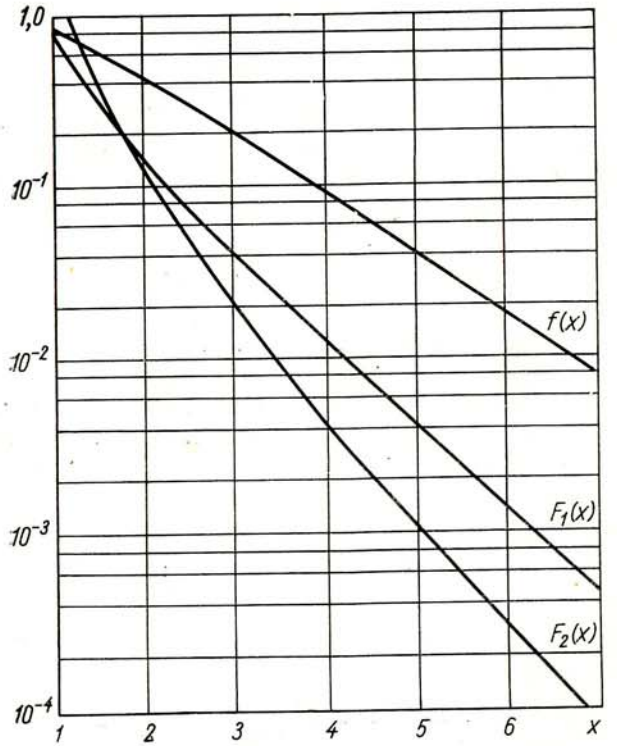


Рис. 14. Графики функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, $f(x)$.

Разложив множитель, содержащий экспоненту, в ряд

$$\frac{1}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx} \qquad (13.37)$$

(это можно сделать, поскольку $x = zat \gtrsim 1$ и e^{-x} — малая величина) и воспользовавшись (после интегрирования по частям) формулой (см. формулу (3.387) из книги [19])

$$\int_1^\infty (x^2-1)^{\varkappa-1} e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{\varkappa-\frac{1}{2}} \Gamma(\varkappa)\, K_{\varkappa-1/2}^{(\mu)}, \qquad (13.38)$$

где $K_\nu(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента; $\Gamma(\varkappa)$ — гамма-функция, окончательно получим

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega} = \frac{\gamma_c^2}{2\pi a}\cdot\frac{1}{F_2(z)}\left\{\left(2-\frac{a^2}{\gamma_c^2}\right)F_1(za)+\left(1-\frac{a^2}{\gamma_c^2}\right)F_2(za)\right\}; \qquad (13.39)$$

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K_1(nx); \qquad (13.40)$$

$$F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(nx)}{nx}. \qquad (13.41)$$

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для значений $x = 1 - 7$ приведены на рис. 14. Ряды (13.40) и (13.41) быстро сходятся: их асимптотические выражения при $x \gg 1$ имеют следующий вид:

$$F_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left(1+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x}\right); \qquad (13.40')$$

$$F_2(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\frac{e^{-x}}{x}\left(1+\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{x}\right). \qquad (13.41')$$

На рис. 15 приведены угловые распределения π-мезонов, вычисленные по формуле (13.39), для нескольких значений γ_c и z.

Импульсное распределение по формуле (12.26′) имеет вид

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp} = \frac{1}{2\gamma_c\beta_c}\cdot\frac{1}{m^3 F_2(z)}\int_{E_-^*}^{E_+^*}\frac{E^*\,dE^*}{e^{\frac{zE^*}{m}}-1}. \qquad (13.42)$$

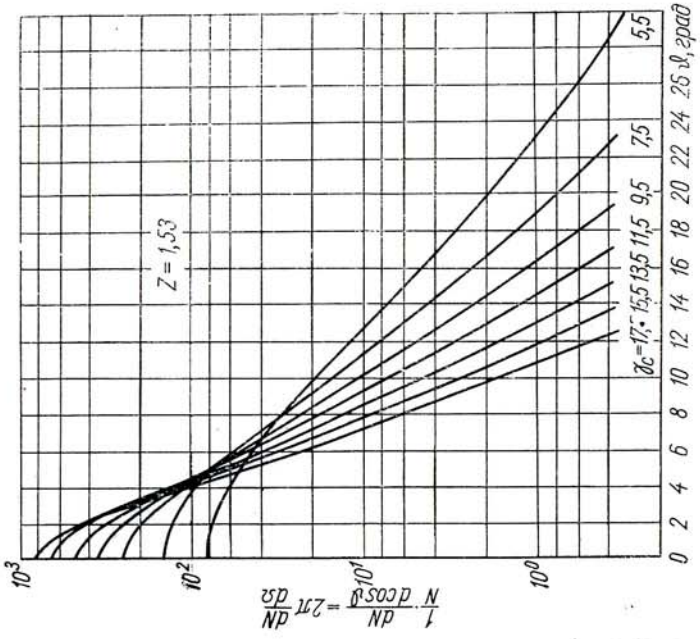
Воспользовавшись снова разложением (13.37), после элементарного интегрирования получим

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp} = \frac{1}{2\gamma_c\beta_c m}\cdot\frac{1}{z^2 F_2(z)}\cdot\frac{p}{E}\,[f(x_-)-f(x_+)], \qquad (13.43)$$

где

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-nx}\left(x+\frac{1}{n}\right); \qquad (13.44)$$

$$x_\pm = \frac{z\gamma_c}{m}(E \pm \beta_c p). \qquad (13.45)$$



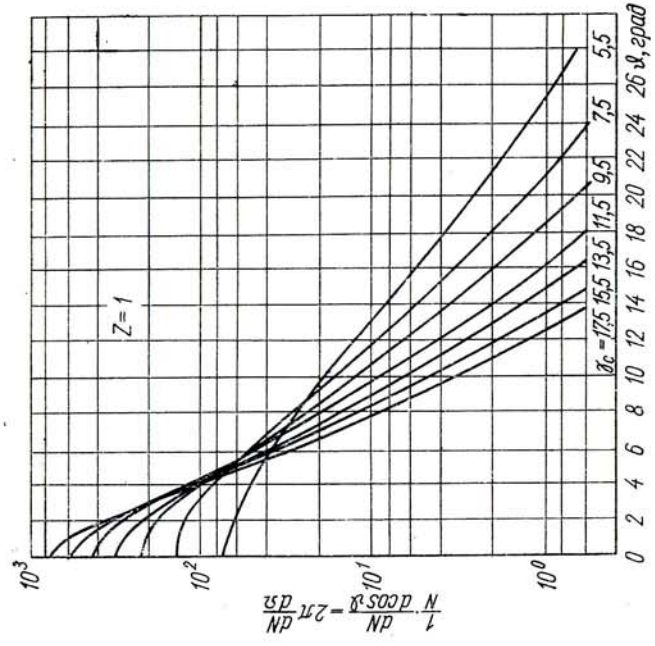


Рис. 15. Угловые распределения в *Л*-системе, соответствующие распределению (13.34) в *Ц*-системе.

Функция $f(x)$ дана на рис. 14 для интервала значений $x = 1$—7. Ряд для $f(x)$ сходится очень быстро, и уже при $x > 2$ с погрешностью менее 5% можно ограничиться первым членом:

$$f(x) \approx (x+1)\,e^{-x}. \qquad (13.44')$$

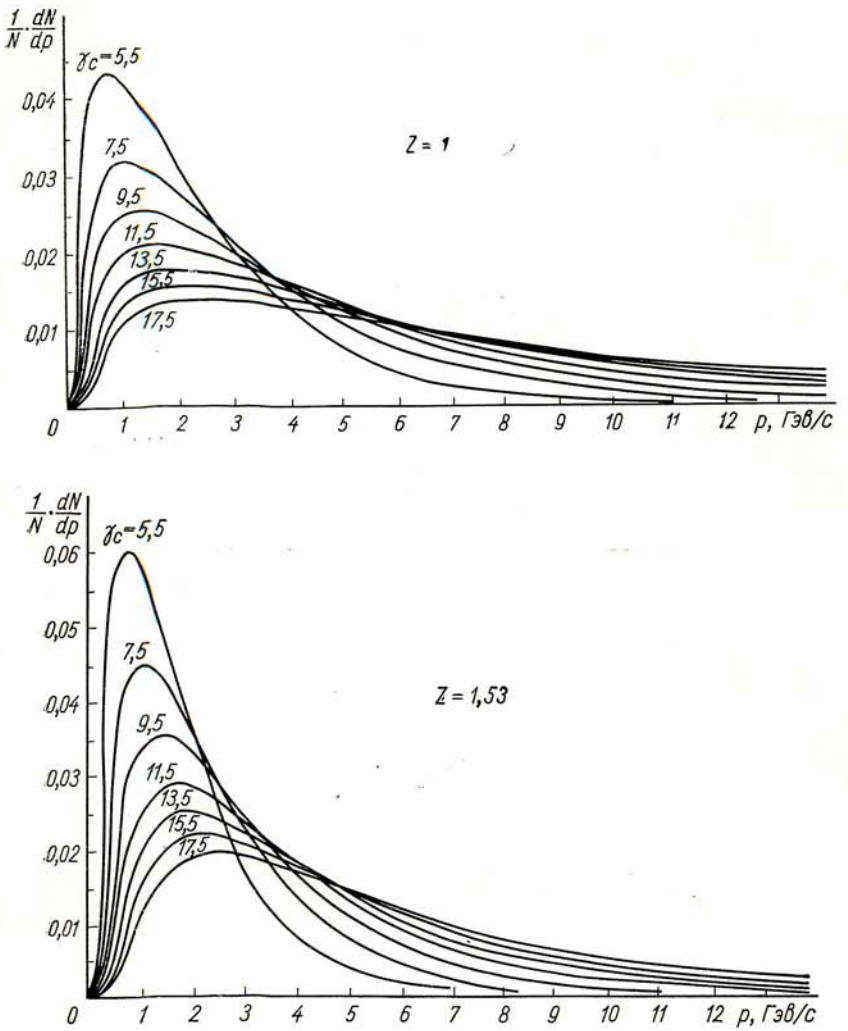


Рис. 16. Импульсные распределения в $Л$-системе, соответствующие распределению (13.34) в $Ц$-системе.

Формула (13.43) существенно упрощается при $\gamma_c \gg 1$, когда подавляющее большинство вторичных частиц в $Л$-системе ультрарелятивистские ($E \approx p$). В этом случае следует пользоваться для x_+ и x_- приближенными выражениями [см. формулы (4.11) и (4.12)]

$$\left.\begin{aligned} x_+ &\approx \frac{2z\gamma_c p}{m}; \\ x_- &\approx \frac{z}{2}\left(\frac{p}{\gamma_c m} + \frac{\gamma_c m}{p}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13.45')$$

Так как $x_-/x_+ \ll 1$, а $f(x)$ — быстро убывающая функция от x, то

$$f(x_-) \gg f(x_+). \qquad (13.46)$$

С учетом выражений (13.44′), (13.45′) и (13.46) получаем

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp} \approx \frac{1}{2\gamma_c m}\cdot\frac{1}{z^2 F_2(z)}\left[\frac{z}{2}\left(\frac{p}{\gamma_c m} + \frac{\gamma_c m}{p}\right) + 1\right] e^{-\frac{z}{2}\left(\frac{p}{\gamma_c m} + \frac{\gamma_c m}{p}\right)}. \qquad (13.47)$$

Заметим, что распределение по величине

$$\xi = \frac{p}{\gamma_c m} \approx \frac{E}{\gamma_c m} \qquad (13.48)$$

в этом приближении не зависит от γ_c и в этом смысле является универсальной функцией:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\xi} = \frac{1}{2z^2 F_2(z)}\left[\frac{z}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + 1\right] e^{-\frac{z}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)}. \qquad (13.47')$$

Наиболее вероятное значение импульса определяется приближенно простым соотношением

$$p^{\text{вер}} \approx \gamma_c m \qquad (13.49)$$

и не зависит от z.

Как видно из выражения (13.47), при значениях $p \gg \gamma_c m$ импульсное распределение экспоненциально убывает, т. е.

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp} \approx \frac{1}{4\gamma_c^2 m}\cdot\frac{1}{zF_2(z)}\, p e^{-\frac{z}{2\gamma_c m}p}. \qquad (13.47'')$$

На рис. 16 приведены импульсные распределения π-мезонов, вычисленные по формуле (13.43) для нескольких значений γ_c и z.

Глава 3

КИНЕМАТИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ДВУХ ЧАСТИЦ

Эта глава посвящена кинематике реакций, в результате которых в конечном состоянии возникают только две частицы. Такое выделение двухчастичных реакций диктуется некоторыми соображениями:

во-первых, такие реакции чрезвычайно распространены в ядер-

ной физике. Это и упругое рассеяние частиц, и неупругие процессы взаимных превращений элементарных частиц (например, $\pi^- + p \to \Sigma^+ + K^-$, $\widetilde{p} + p \to \widetilde{n} + n$, $\gamma + p \to \pi^+ + n$ и т. д.), и распады частиц (например, $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$, $\Lambda^\circ \to p + \pi^-$ и т. д.), и огромное большинство ядерных реакций в области энергий до нескольких сот мегаэлектронвольт (например, $d + d \to {}_2\mathrm{He}^3 + n$, ${}_7\mathrm{N}^{14} + n \to {}_6\mathrm{C}^{14} + p$ и т. д.);

во-вторых, кинематический анализ реакций с двумя частицами в конечном состоянии может быть произведен значительно полнее, чем анализ реакций с бо́льшим числом частиц, так как ограничения, накладываемые законами сохранения энергии и импульса, особенно сильно проявляются именно в двухчастичных реакциях. Действительно, кинематика этих реакций в значительной мере определяется тем, что независимо от конкретного типа взаимодействия продукты реакции разлетаются в $Ц$-системе под углом 180°, а их энергии в той же системе зависят только от масс частиц и начальной энергии;

в-третьих, некоторые задачи, относящиеся к множественной генерации частиц, по существу сводятся к задаче с двумя частицами в конечном состоянии — путем объединения вторичных частиц в определенные группы и замены одноактной генерации многих частиц несколькими последовательными актами, в каждом из которых образуется по две частицы.

§ 14. ИНВАРИАНТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Начальное и конечное состояния реакции перехода двух частиц в две частицы

$$a_{01} + a_{02} \to a_1 + a_2 \tag{14.1}$$

полностью определяются (если отвлечься от дискретных характеристик: спина, изотопического спина и т. д.) заданием 4-импульсов $\mathcal{P}_{01}$, $\mathcal{P}_{02}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, и вероятность перехода может зависеть только от этих 4-импульсов, причем последние должны входить в релятивистски инвариантных комбинациях, поскольку сама вероятность перехода — релятивистски инвариантная величина. Легко сообразить что из четырех 4-импульсов можно построить десять релятивистских инвариантов, среди которых четыре — это просто квадраты 4-импульсов, т. е. квадраты масс участвующих в реакции частиц, которые представляют собой фиксированные параметры и не могут фигурировать в качестве кинематических переменных, а на оставшиеся шесть инвариантов законами сохранения энергии и импульса накладываются четыре связи. Таким образом, двухчастичные реакции кинематически полностью описываются двумя независимыми переменными. В качестве таких переменных можно, например, выбрать энергию E_{01} налетающей частицы [считая, как это чаще всего и бывает, что частица-мишень a_{02} покоится (рис. 17)] и угол рассеяния одного из продуктов реакции (в данном случае частицы a_1) в $Л$-системе ϑ_1 или в $Ц$-системе ϑ_1^*. Энергия E_{01} и угол ϑ_1—непосредственно измеряемые в эксперименте величины, однако их использование не всегда удобно, поскольку они не являются релятивистскими инвариантами, и в последнее время, особенно в связи с развитием теории дисперсионных соотношений и комплексных моментов, широко используются инвариантные переменные

$$s = -(\mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02})^2 = -(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2; \tag{14.2}$$

$$t = -(\mathcal{P}_{01} - \mathcal{P}_1)^2 = -(\mathcal{P}_{02} - \mathcal{P}_2)^2. \tag{14.3}$$

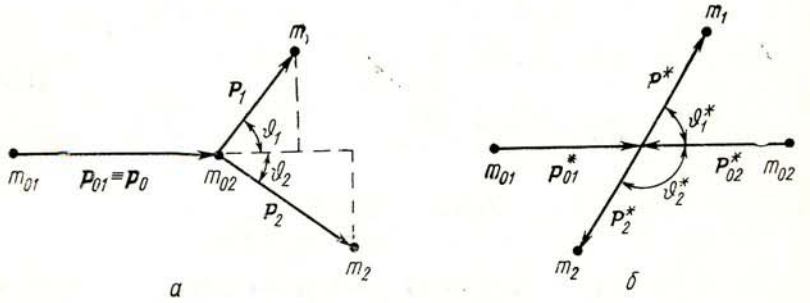


Рис. 17. Картина взаимодействия с двумя частицами в конечном состоянии: *а* — в $Л$-системе; *б* — в $Ц$-системе

Физический смысл переменных s и t и их связь с неинвариантными переменными очевидны. Переменная s равна квадрату полной энергии в $Ц$-системе [см. формулы (8.8) и (8.10)]:

$$\begin{aligned} s = E_c^2 &= m_{01}^2 + m_{02}^2 + 2E_{01}m_{02} = (m_{01} + m_{02})^2 + 2m_{02}T_{01} = \\ &= (E_{01}^* + E_{02}^*)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = \\ &= (E_1^* + E_2^*)^2. \end{aligned} \tag{14.2'}$$

Переменная t содержит информацию об угле рассеяния и равна взятому с обратным знаком квадрату передаваемого 4-импульса (для последней величины обычно используется обозначение Δ^2):

$$\begin{aligned} t = -\Delta^2 &= m_{01}^2 + m_1^2 - 2(E_{01}E_1 - p_{01}p_1\cos\vartheta_1) = \\ &= m_{01}^2 + m_1^2 - 2(E_{01}^*E_1^* - p_{01}^*p_1^*\cos\vartheta_1^*) = \\ &= m_{02}^2 + m_2^2 - 2E_2m_{02} = (m_{02} - m_2)^2 - 2m_{02}T_0. \end{aligned} \tag{14.3'}$$

В технике дисперсионных соотношений и комплексных моментов обычно для симметрии вводится третья инвариантная переменная

$$u = -(\mathcal{P}_{01} - \mathcal{P}_2)^2 = -(\mathcal{P}_{02} - \mathcal{P}_1)^2. \tag{14.4}$$

Естественно, что из трех переменных s, t, u только две независимы. Как легко убедиться, учитывая закон сохранения $\mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, эти три переменные связаны равенством

$$s + t + u = m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_1^2 + m_2^2. \tag{14.5}$$

Для целей настоящей книги достаточно ограничиться только переменными s и t, используя оба типа записи кинематических соотношений — и с помощью инвариантных переменных s, t и неинвариантных величин E_{01} (или p_{01}) и ϑ_1 (или ϑ_1^*). Приведем несколько основных кинематических соотношений для двухчастичных реакций. В § 9 уже получены формулы для энергий и импульсов сталкивающихся частиц в $Ц$-системе [см. формулы (9.7)—(9.10)]; для удобства приведем их еще раз, выразив через s:

$$\left.\begin{aligned} E_{01}^* &= \frac{E_{01}m_{02}+m_{01}^2}{\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} = \frac{s+m_{01}^2-m_{02}^2}{2\sqrt{s}}; \\ E_{02}^* &= \frac{E_{01}m_{02}+m_{02}^2}{\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} = \frac{s-m_{01}^2+m_{02}^2}{2\sqrt{s}}; \end{aligned}\right\} \quad (14.6)$$

$$p_{01}^* = p_{02}^* = \frac{p_{01}m_{02}}{\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{[s-(m_{01}+m_{02})^2][s-(m_{01}-m_{02})^2]}}{2\sqrt{s}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(s-m_{01}^2-m_{02}^2)^2-4m_{01}^2m_{02}^2}}{2\sqrt{s}}. \quad (14.7)$$

Аналогичные формулы, как легко понять по их выводу [см. формулы (9.7)], справедливы и для частиц — продуктов реакции:

$$E_1^* = \frac{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} = \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}};$$

$$E_2^* = \frac{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-m_1^2+m_2^2}{2\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} = \frac{s-m_1^2+m_2^2}{2\sqrt{s}}; \quad (14.8)$$

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\sqrt{(2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}}{2\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}}{2\sqrt{s}}. \quad (14.9)$$

Выражение для энергий в $Л$-системе через s и t следует из формул (14.2′) и (14.3′) с учетом закона сохранения энергии ($E_1+E_2=E_{01}+m_{02}$):

$$E_{01} = \frac{s-m_{01}^2-m_{02}^2}{2m_{02}}; \quad (14.10)$$

$$E_1 = \frac{s+t-m_{01}^2-m_2^2}{2m_{02}}; \quad (14.11)$$

$$E_2 = \frac{m_{02}^2+m_2^2-t}{2m_{02}}. \quad (14.12)$$

Скорость $Ц$-системы относительно $Л$-системы

$$\beta_c = \frac{p_{01}}{E_{01}+m_{02}} = \frac{\sqrt{[s-(m_{01}+m_{02})^2][s-(m_{01}-m_{02})^2]}}{s-m_{01}^2+m_{02}^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(s-m_{01}^2-m_{02}^2)^2-4m_{01}^2m_{02}^2}}{s-m_{01}^2+m_{02}^2} \quad (14.13)$$

и соответственно

$$\gamma_c = \frac{E_{01}+m_{02}}{\sqrt{2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}} = \frac{s-m_{01}^2+m_{02}^2}{2m_{02}\sqrt{s}}. \quad (14.14)$$

Из формул (14.3′) и (14.6)—(14.9) получаем выражения для углов рассеяния ϑ_1^* и ϑ_1 через инвариантные переменные:

$$\cos\vartheta_1^* =$$

$$= \frac{s^2+s\left[2t-(m_{01}^2+m_{02}^2+m_1^2+m_2^2)\right]+(m_{01}^2-m_{02}^2)(m_1^2-m_2^2)}{\sqrt{(s-m_{01}^2-m_{02}^2)^2-4m_{01}^2m_{02}^2}\cdot\sqrt{(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}}. \quad (14.15)$$

$$\cos\vartheta_1 =$$

$$= \frac{(s-m_{01}^2-m_{02}^2)(s+t-m_{01}^2-m_2^2)+2m_{02}^2(t-m_{01}^2-m_1^2)}{\sqrt{(s-m_{01}^2-m_{02}^2)^2-4m_{01}^2m_{02}^2}\cdot\sqrt{(s+t-m_{01}^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}}. \quad (14.16)$$

Для упругого рассеяния ($m_{01}=m_1$, $m_{02}=m_2$) формулы (14.15) и (14.16) упрощаются

$$\cos\vartheta_1^* = 1+\frac{2st}{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}; \quad (14.15')$$

$$\cos\vartheta_1 =$$

$$= \frac{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]+t(s-m_1^2+m_2^2)}{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}\sqrt{[s+t-(m_1+m_2)^2][s+t-(m_1-m_2)^2]}}. \quad (14.16')$$

Заметим, что при кинематических расчетах нередко удобно представлять реакцию (14.1) идущей в два этапа: образование и последующий распад некоторой компаунд-частицы a_0:

$$a_{01}+a_{02}\to a_0\to a_1+a_2. \quad (14.1')$$

Очевидно, что компаунд-частица покоится относительно $Ц$-системы и ее масса равна $\sqrt{s}$. Такая кинематическая концепция уже использовалась в § 8 при вычислении характеристик $Ц$-системы. Ниже многие кинематические формулы будут выражены через s, t и массы частиц в конечном состоянии — через m_1 и m_2. Подобная запись удобна тем, что она в равной мере относится и к реакции превращения двух частиц в две (тогда $\sqrt{s} = E_c = \mathfrak{M}$ — просто полная энергия в $Ц$-системе или эффективная масса), и к распаду нестабильной частицы или резонанса на две частицы (и в этом случае $\sqrt{s} = m_0$ имеет физический смысл реальной массы распадающейся частицы, а γ_c — ее лоренц-фактора).

§ 15. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ И УГЛОМ ВЫЛЕТА ПРОДУКТА РЕАКЦИИ

Соотношение между энергией и углом вылета продукта реакции в $Л$-системе в двухчастичных реакциях полностью определяется заданием E_0 (или s) и не зависит от характера самого взаимодействия. Подставляя выражения (14.8) и (14.4) в формулу (5.5), получаем для вторичной частицы a_2

$$E_2 = \frac{1}{2\left[(E_{01}+m_{02})^2 - p_{01}^2\cos^2\vartheta_2\right]}\Big\{(E_{01}+m_{02})\left(2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-\right.$$
$$\left.-m_1^2+m_2\right)\pm p_{01}|\cos\vartheta_2|\times$$
$$\times\sqrt{\left(2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-m_1^2-m_2^2\right)^2-4m_2^2\left(m_1^2+p_{01}^2\sin\vartheta_2\right)}\Big\}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{s}\gamma_c\left(1-\beta_c^2\cos^2\vartheta_2\right)}\Big\{\left(s-m_1^2+m_2^2\right)\pm$$
$$\pm\beta_c|\cos\vartheta_2|\sqrt{\left(s-m_1^2-m_2^2\right)^2-4m_2^2\left(m_1^2+s\gamma_c^2\beta_c^2\sin^2\vartheta_2\right)}\Big\}. \quad (15.1)$$

При необходимости β_c и γ_c можно выразить через s и массы сталкивающихся частиц по формулам (14.13) и (14.14). Ввиду громоздкости не будем выписывать аналогичное выражение для E_1, которое можно получить из формулы (15.1), поменяв местами m_1 и m_2 и заменив ϑ_2 на ϑ_1. Как было показано в § 5, характер зависимости E_2 от ϑ_2 и правило употребления знаков в формуле (15.1) определяются величиной [9]

$$\varkappa_2 = \beta_c/\beta_2^* =$$
$$=\frac{s-m_1^2+m_2^2}{s-m_{01}^2+m_{02}^2}\sqrt{\frac{\left[s-(m_{01}+m_{02})^2\right]\left[s-(m_{01}-m_{02})^2\right]}{\left[s-(m_1+m_2)^2\right]\left[s-(m_1-m_2)^2\right]}}. \quad (15.2)$$

Напомним, что при $\varkappa_2 < 1$ энергия E_2 — однозначная функция угла ϑ_2, и в формуле (15.1) следует употреблять знак «+» при $0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \pi/2$

и знак «—» при $\pi/2 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \pi$ (или можно опустить знак модуля у $\cos\vartheta_2$ и тогда употреблять только знак «+»), а при $\varkappa_2 > 1$ энергия E_2 — двузначная функция ϑ_2 и соответственно используются оба знака в формуле (15.1), причем $0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \vartheta_{\text{макс}} < \pi/2$.

Критическое значение $\varkappa_2$, при котором меняется характер зависимости E_2 от ϑ_2, равно 1, что соответствует

$$s^{(\text{кр})} = \frac{m_2\left(m_{01}^2-m_{02}^2\right)-m_{02}\left(m_1^2-m_2^2\right)}{m_2-m_{02}} \quad (15.3)$$

и кинетической энергии налетающей частицы

$$T_{01}^{(\text{кр})} = \frac{(m_{01}+m_{02}-m_1-m_2)(m_{01}+m_{02}+m_1-m_2)}{2(m_2-m_{02})} \quad (15.4)$$

[для получения формул (15.3) и (15.4) проще приравнять лоренц-факторы $\gamma_c = \gamma_2^*$, а не решать уравнение (15.2)]. Величина $T_{01}^{(\text{кр})}$ может принимать в зависимости от соотношения между массами участвующих в реакции частиц и нефизические значения. Действительно, $T_{01}^{(\text{кр})}$ имеет физический смысл, если

$$T_{01}^{(\text{кр})} \geqslant 0 \quad (15.5)$$

для экзоэнергетических реакций и упругого рассеяния

и

$$T_{01}^{(\text{кр})} \geqslant T_{01}^{(\text{порог})} \quad (15.6)$$

для эндоэнергетических реакций. Пороговая кинетическая энергия [см. формулу (10.12′]

$$T_{01}^{(\text{порог})} = \frac{(m_1+m_2)^2-(m_{01}+m_{02})^2}{2m_{02}}. \quad (15.7)$$

Условия (15.5) и (15.6) означают, что критическое значение энергии $T_{01}^{(\text{кр})}$, при котором меняется характер зависимости E_2 от ϑ_2, существует в следующих случаях:

1) в экзоэнергетических реакциях ($m_{01}+m_{02} > m_1+m_2$) при $m_2 > m_{02}$, причем если $T_{01} < T_{01}^{(\text{кр})}$, то $\varkappa_2 < 1$, а если $T_{01} > T_{01}^{(\text{кр})}$, то $\varkappa_2 > 1$;

2) в эндоэнергетических реакциях ($m_{01}+m_{02} < m_1+m_2$) при $m_2 < m_{02}$, причем если $T_{01} < T_{01}^{(\text{кр})}$, то $\varkappa_2 > 1$, а если $T_{01} > T_{01}^{(\text{кр})}$, то $\varkappa_2 < 1$. Схематически характер зависимости $\varkappa_2$ от T_{01} и E_2 от ϑ_2 при различных соотношениях между массами m_{01}, m_{02}, m_1, m_2 показан на рис. 18, заимствованном (в несколько переработанном виде) из статьи [9].

При $\varkappa_2 > 1$ угол ϑ_2 не может быть больше предельного угла $\vartheta_{2\text{макс}}$ (§ 1.5), функциональную зависимость которого от s или E_{01} получим

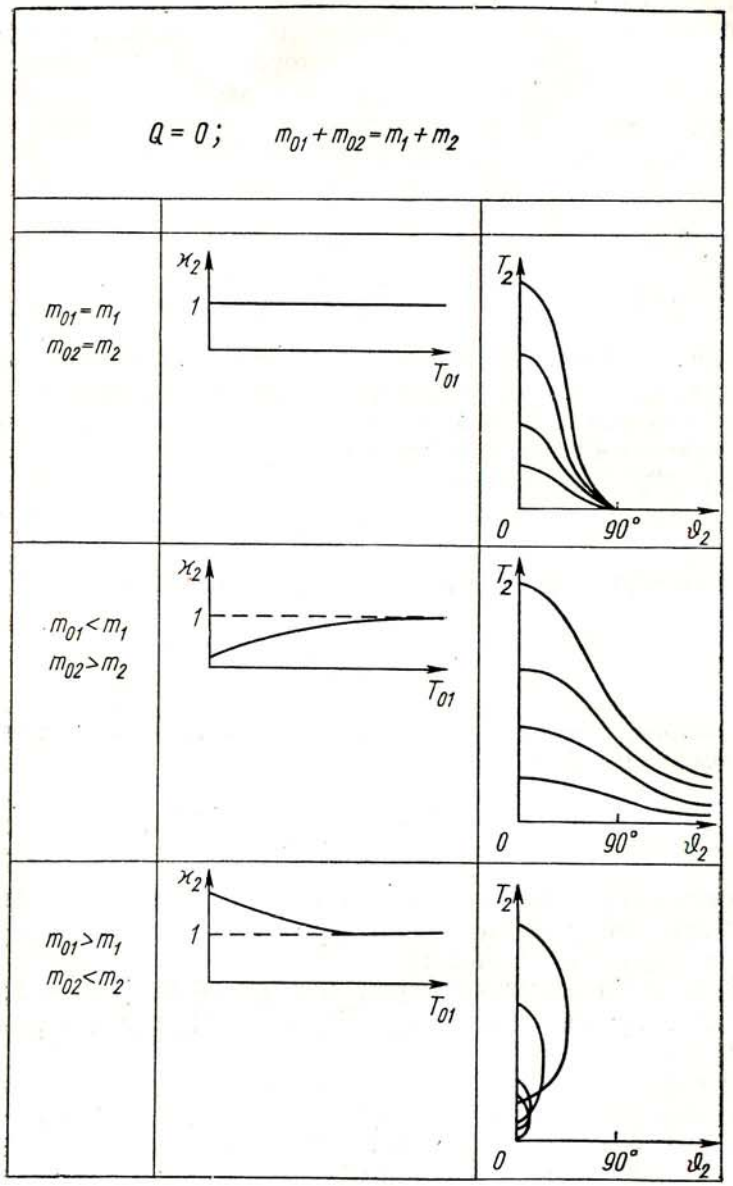
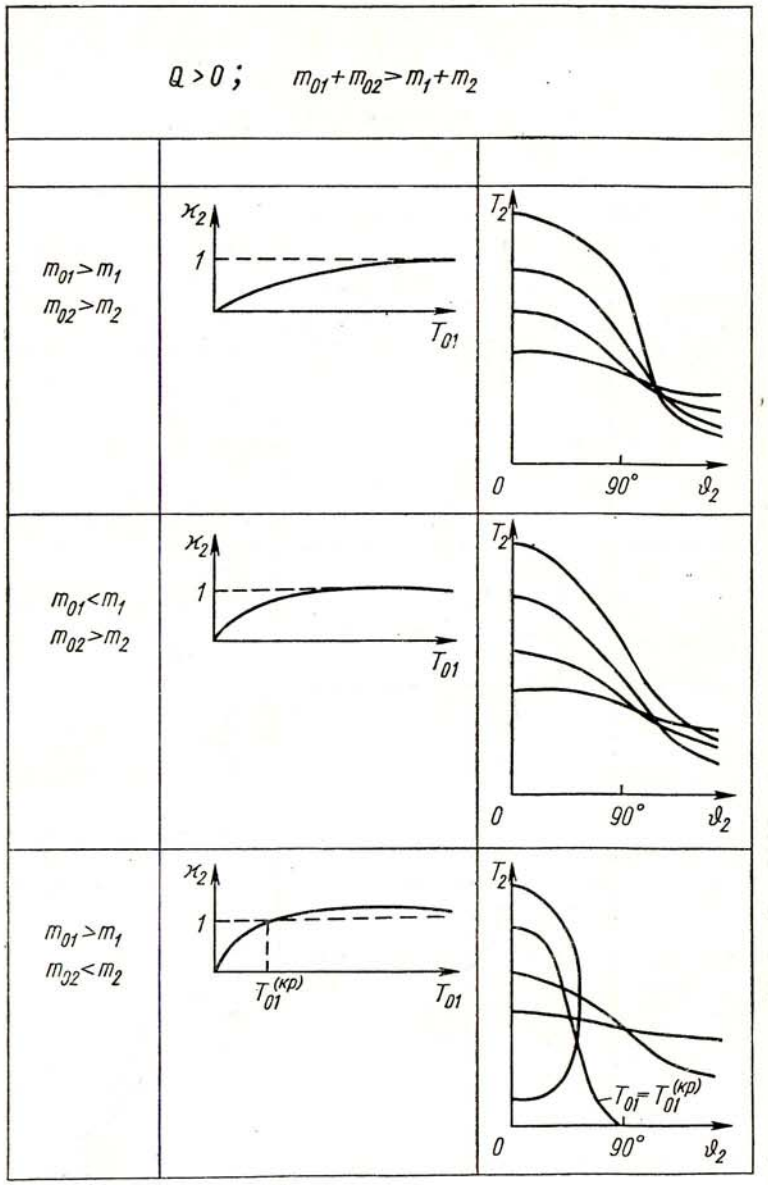


Рис. 18. Характер зависимости $\varkappa_2$ от T_{01} и T_2 от ϑ_2 (при различных фиксированных значениях T_{01})[9].



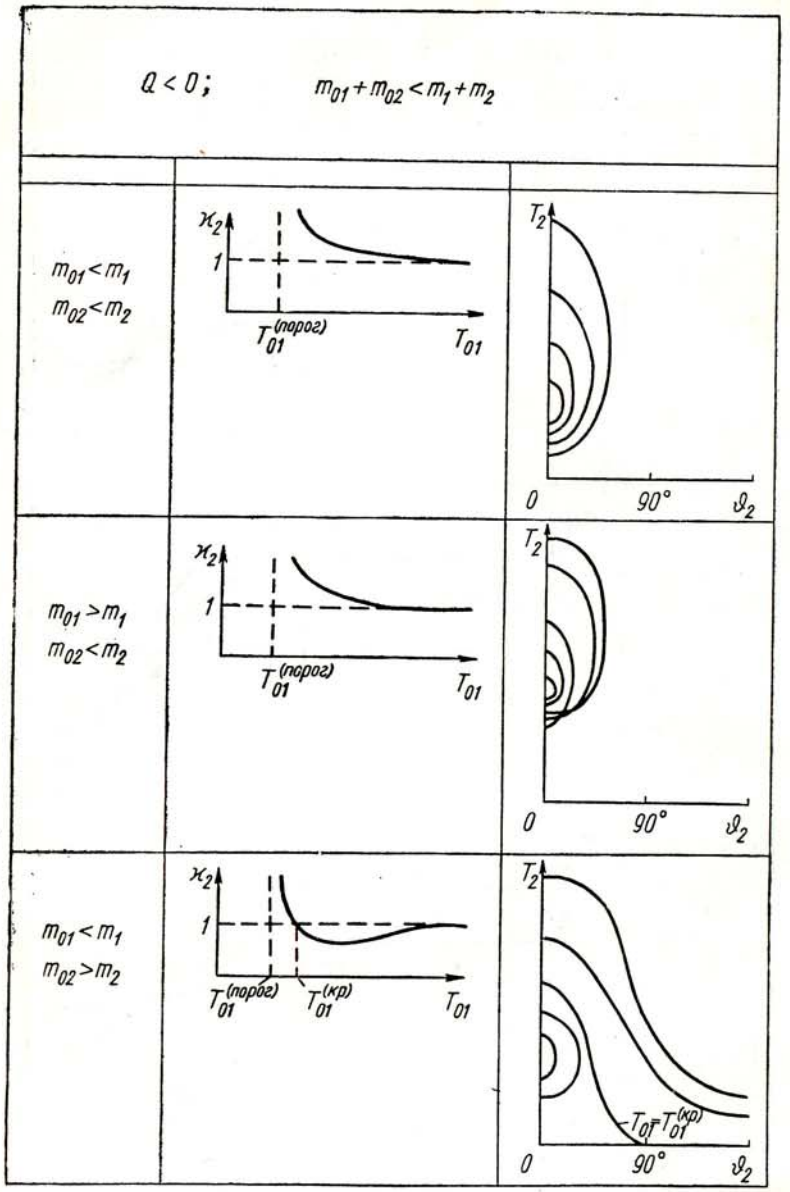


Рис. 18 (продолжение)

подстановкой выражения (14.14) и второй строки выражения (14.6) в формулу (5.12):

$$\sin\vartheta_{2\text{макс}}=\frac{m_{02}}{m_2}\cdot\frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}}{\sqrt{[s-(m_{01}+m_{02})^2][s-(m_{01}-m_{02})^2]}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left[2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-(m_1+m_2)^2\right]\left[2E_{01}m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2-(m_1-m_2)^2\right]}}{2m_2\,p_{01}}. \qquad (15.8)$$

§ 16. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для нахождения кинематических характеристик вторичных частиц в $Л$-системе, в частности, и зависимости импульсов от угла вылета, о которой шла речь в предыдущем параграфе, часто применяется весьма наглядный графический метод, основанный на построении эллипса импульсов (см. § 5). Параметры эллипса импульсов определяются величиной γ_c и импульсом частицы в $Ц$-системе, а поскольку в двухчастичных реакциях $p_1^* = p_2^*$, то эллипс для обеих вторичных частиц один и тот же (рис. 19, *а*). Подставляя формулы (14.7) и (14.14) в выражения для полуосей эллипса [см. формулу (5.2) и следующий за ней текст], параметры эллипса можно выразить через s или E_{01} (и массы частиц):

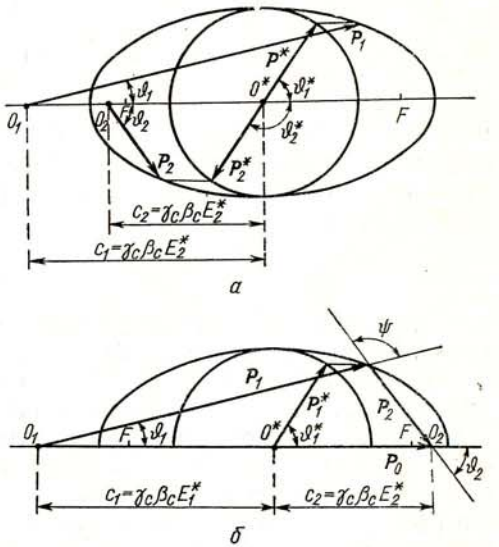


Рис. 19. Два способа построения эллипса импульсов для двухчастичных реакций.

$$a=\gamma_c p_1^*=\gamma_c p_2^*=$$

$$=\frac{p_{01}\,m_{02}\,(E_{01}+m_{02})}{2E_{01}\,m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}=$$

$$=\gamma_c\,\frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}}{2\sqrt{s}}; \qquad (16.1)$$

$$b=p_1^*=p_2^*=\frac{p_{01}\,m_{02}}{\sqrt{2E_{01}\,m_{02}+m_{01}^2+m_{02}^2}}=$$

$$= \frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}}{2\sqrt{s}}. \qquad (16.2)$$

Практически удобней, воспользовавшись тем обстоятельством, что $\vartheta_1^* + \vartheta_2^* = \pi$, произвести своего рода отражение эллипса для одной из частиц и откладывать отрезки

$$c_1 = \gamma_c \beta_c E_1^* = \frac{p_{01}\left(2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_1^2 - m_2^2\right)}{2\left(2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2\right)} =$$

$$= \gamma_c \beta_c \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}; \qquad (16.3)$$

$$c_2 = \gamma_c \beta_c E_2^* = \frac{p_{01}\left(2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2 - m_1^2 + m_2^2\right)}{2\left(2E_{01}m_{02} + m_{01}^2 + m_{02}^2\right)} =$$

$$= \gamma_c \beta_c \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s}} \qquad (16.3')$$

по разные стороны от центра эллипса, как показано на рис. 19, *б*. Для такого построения достаточно пользоваться только верхней половиной эллипса импульсов. При этом получаем в удобном для отсчета виде угол разлета ψ продуктов реакции (см. § 17). Величина отрезка O_1O_2 равна, очевидно, импульсу налетающей частицы

$$O_1 O_2 = p_{01}. \qquad (16.4)$$

Таким образом, процедура графического определения кинематических характеристик продуктов реакции состоит в следующем:

1) вычисляются полуоси эллипса a и b по формулам (16.1) и (16.2) и параметры c_1 и c_2 по формулам (16.3) и (16.3′). Заметим, что если начальное состояние представляет собой столкновение двух частиц, одна из которых покоится, то для вычислений следует пользоваться в указанных формулах выражением через E_{01}. Если же рассматривается распад нестабильной частицы, то удобней выражения через s, где под s следует подразумевать квадрат массы распадающейся частицы ($s = m_0^2$), а под β_c и γ_c — ее скорость и лоренц-фактор;

2) любым известным способом (например, тем, который описан в § 5) по заданным полуосям a и b вычерчивается эллипс, и по обе стороны от его центра на расстояниях c_1 и c_2 намечаются точки O_1 и O_2;

3) варьируя в желаемых пределах угол вылета одной из частиц (например, ϑ_1^*), получаем с помощью транспортира и линейки все необходимые кинематические характеристики продуктов реакции.

Рассмотрим несколько конкретных примеров построения эллипса импульсов.

1. Упругое рассеяние двух частиц ($m_{01} = m_1$, $m_{02} = m_2$). Три возможных случая упругого рассеяния: а) $m_1 = m_2 = m$, б) $m_1 > m_2$ и в) $m_1 < m_2$ иллюстрируются рис. 20. Для первоначально покоившейся частицы $\varkappa_2 = 1$, и она всегда вылетает под углом меньше 90°, а ее импульс после рассеяния определяется формулой (5.9):

$$p_2 = \frac{2m_2\beta_c\cos\vartheta_2}{1-\beta_c^2\cos^2\vartheta_2}. \qquad (16.5)$$

Для налетающей частицы предельный угол существует лишь при рассеянии тяжелой частицы на легкой.

В случае упругого рассеяния двух частиц одинаковой массы $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$ и, используя формулу (5.8), после элементарных преобразований получаем полезное соотношение

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 \operatorname{ctg}\vartheta_2 = \gamma_c^2 = \frac{\gamma_{01}+1}{2} = \frac{T_{01}}{2m} + 1, \qquad (16.6)$$

которое позволяет определить энергию налетающей частицы по углам рассеяния ϑ_1 и ϑ_2.

2. Распад $\pi^\circ \to 2\gamma$ (рис. 21). Точки O_1 и O_2 совпадают с фокусами эллипса (см. § 5), предельных углов испускания γ-квантов не существует.

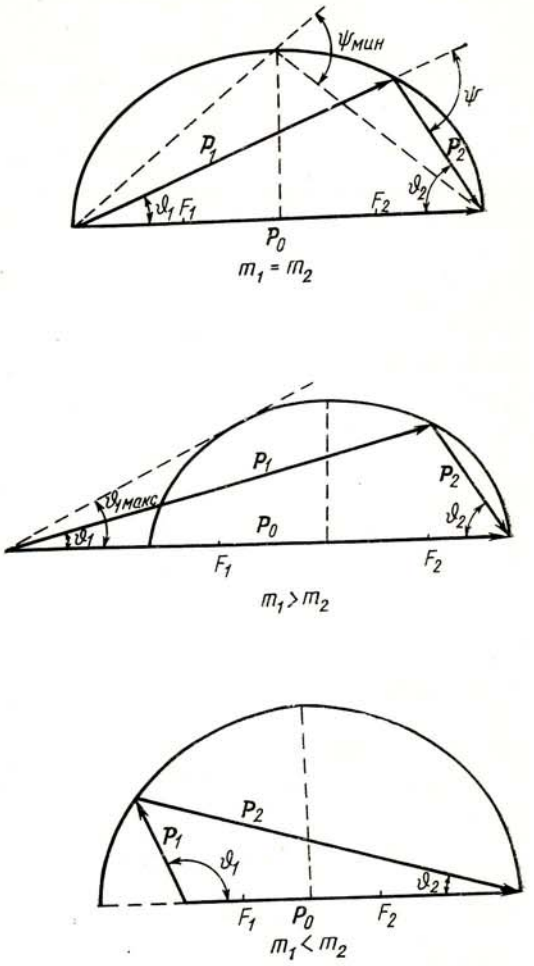


Рис. 20. Эллипс импульсов для упругого рассеяния.

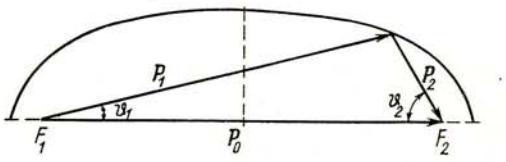


Рис. 21. Эллипс импульсов для реакции $\pi^\circ \to 2\gamma$.

§ 17. УГОЛ РАЗЛЕТА ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ

В качестве объекта кинематического анализа наряду с углами вылета вторичных частиц ϑ_1 и ϑ_2 часто фигурирует сумма этих углов, т. е. угол разлета продуктов реакции в $Л$-системе (см. рис. 19, *б*):

$$\psi = \vartheta_1 + \vartheta_2. \tag{17.1}$$

Кинематические соотношения, связанные с углом разлета, особенно существенны для реакций, в которых по той или иной причине неизвестно направление движения первичной частицы и поэтому измерения порознь углов ϑ_1 и ϑ_2 невозможны.

Будем считать, что заданы энергия E_{01} (или s) и массы всех участвующих в реакции частиц, которые однозначно определяют γ_c и параметры $\varkappa_1 = \beta_c/\beta_1^*$ и $\varkappa_2 = \beta_c/\beta_2^*$ [см. выражения (14.14) и (15.2)]. Поскольку

$$\psi^* = \vartheta_1^* + \vartheta_2^* = \pi, \tag{17.2}$$

то с помощью соотношения (5.3′) углы ϑ_1 и ϑ_2 можно представить в виде функции только одного угла, — например, ϑ_1^*:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta_1^*}{\varkappa_1+\cos\vartheta_1^*}; \tag{17.3}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta_1^*}{\varkappa_2-\cos\vartheta_1^*}. \tag{17.3′}$$

Заметим, что в двухчастичных реакциях углы ϑ_1 и ϑ_2 жестко связаны между собой. Действительно, исключая ϑ_1^* из равенств (17.3) и (17.3′), получаем следующую связь между ϑ_1 и ϑ_2:

$$[(1-\varkappa_2)\operatorname{ctg}\vartheta_1 + (1+\varkappa_1)\operatorname{ctg}\vartheta_2][(1+\varkappa_2)\operatorname{ctg}\vartheta_1 + (1-\varkappa_1)\operatorname{ctg}\vartheta_2] = (\varkappa_1+\varkappa_2)^2\gamma_c^2, \tag{17.4}$$

характер которой при различных значениях $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ иллюстрируется рис. 22, заимствованным из обзора [9].

Подставив соотношения (17.3) и (17.3′) в формулу (17.1), выразим ψ как функцию от ϑ_1^*:

$$\psi = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta_1^*}{\varkappa_1+\cos\vartheta_1^*}\right] + \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\gamma_c}\cdot\frac{\sin\vartheta_1^*}{\varkappa_2-\cos\vartheta_1^*}\right]. \tag{17.5}$$

Зависимость (17.5) имеет довольно сложный характер. Проанализируем сначала простой случай, когда обе вторичные частицы имеют одинаковую массу: $m_1 = m_2 = m$ и соответственно $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$. Напомним, что если реакция представляет собой распад частицы с массой m_0, то во всех приведенных ниже формулах следует положить $s = m_0^2$, $p_{01} = p_0$, $\gamma_c = \gamma_0$.

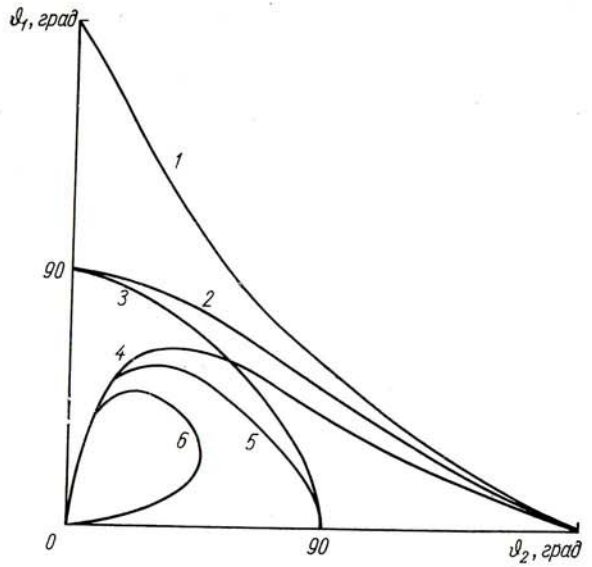


Рис. 22. Связь между углами вылета частиц в двухчастичных реакциях при различных значениях $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ [9]. Опущены случаи, отличающиеся от приведенных на рисунке перестановкой $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$:
1 — $\varkappa_1 < 1$, $\varkappa_2 < 1$; *2* — $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 < 1$; *3* — $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 1$; *4* — $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 < 1$; *5* — $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 = 1$; *6* — $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 > 1$.

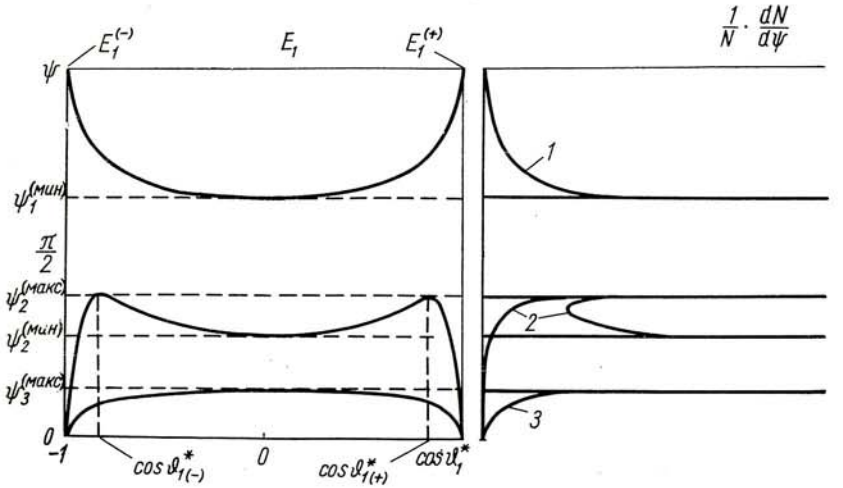


Рис. 23. Графики $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ и $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ для случая $m_1 = m_2 = m$.
1 — $\varkappa < 1$; *2* — $\varkappa > 1$, $s > 8m^2$; *3* — $\varkappa > 1$, $s < 8m^2$, $p_{01} > \sqrt{\frac{s(s-4m^2)}{8m^2-s}}$.

Исследование экстремумов функции $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ приводит к следующим результатам (рис. 23):

1) если импульс налетающей частицы

$$p_{01} < p_{01}^{(\text{кр})} = \frac{\sqrt{s\,(s-4m^2)}}{2m}, \tag{17.6}$$

что соответствует

$$\varkappa = \frac{p_{01}\sqrt{s}}{\sqrt{(s+p_{01}^2)\,(s-4m^2)}} < 1,$$

то существует только минимум при $\cos\vartheta_{1_1}^* = 0$, равный

$$\psi_1^{(\text{мин})} = 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{\gamma_c\varkappa} = 2\,\text{arctg}\,\frac{\sqrt{s-4m^2}}{p_{01}}, \tag{17.7}$$

и ψ изменяется в интервале

$$\psi_1^{(\text{мин})} \leqslant \psi \leqslant \pi; \tag{17.8}$$

2) если

$$p_{01} > p_{01}^{(\text{кр})} = \frac{\sqrt{s\,(s-4m^2)}}{2m}, \tag{17.9}$$

что соответствует $\varkappa > 1$, то могут осуществляться две возможности:

а) $s > 8m^2$ и $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ обладает двумя одинаковыми симметричными максимумами при

$$\cos\vartheta_1^* = \pm\sqrt{1-\frac{\gamma_c^2(\varkappa^2-1)}{\gamma_c^2-1}} =$$

$$= \pm\frac{1}{p_{01}}\sqrt{\frac{p_{01}^2(s-8m^2)+s(s-4m^2)}{s-4m^2}}, \tag{17.10}$$

равными

$$\psi_2^{(\text{макс})} = \text{arctg}\,\frac{\varkappa}{\sqrt{(\gamma_c^2-1)(\varkappa^2-1)}} = \text{arctg}\,\frac{\gamma^*}{\sqrt{\gamma_c^2-\gamma^{*2}}} =$$

$$= \text{arctg}\,\frac{s}{\sqrt{4m^2p_{01}^2 - s\,(s-4m^2)}}, \tag{17.11}$$

и относительным минимумом между ними при $\cos\vartheta_1^* = 0$, который определяется формулой (17.7). Угол разлета изменяется в интервале

$$0 \leqslant \psi \leqslant \psi_2^{(\text{макс})} \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{17.12}$$

б) $s < 8m^2$, и тогда $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ обладает двумя максимумами [см. выражения (17.10) и (17.11)] лишь при условии

$$\frac{\sqrt{s\,(s-4m^2)}}{2m} < p_{01} < \sqrt{\frac{s\,(s-4m^2)}{8m^2-s}}, \tag{17.13}$$

а при

$$p_{01} > \sqrt{\frac{s\,(s-4m^2)}{8m^2-s}}$$

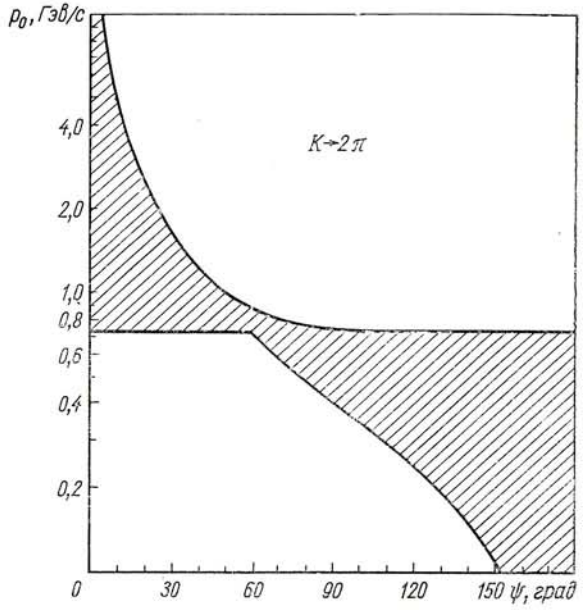


Рис. 24. Область разрешенных углов разлета в зависимости от импульса распадающейся частицы для случая $m_1 = m_2$ (распад $K \to 2\pi$).

на кривой $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ остается только один максимум, соответствующий $\cos\vartheta_1^* = 0$ и численно выражающийся формулой, которая совпадает с равенством (17.7)

$$\psi_3^{(\text{макс})} = 2\,\text{arctg}\,\frac{\sqrt{s-4m^2}}{p_{01}}. \tag{17.14}$$

Приведенные рассуждения показывают, что каждому значению p_{01} отвечает определенная область разрешенных значений ψ. В качестве иллюстрации на рис. 24 показана (штриховкой) область разрешенных значений ψ для конкретного распада $K \to 2\pi$.

Значительно сложнее обстоит дело, если массы вторичных частиц различны: $m_1 \neq m_2$ (для определенности будем считать, что $m_1 < m_2$ и соответственно $\varkappa_1 < \varkappa_2$). Значения $\cos\vartheta_1^*$, соответствую-

щие экстремумам $\psi(\cos\vartheta_1^*)$, определяются кубическим уравнением

$$\cos^3\vartheta_1^* - \left[1 + \frac{\gamma_c^2}{\gamma_c^2 - 1}(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\right]\cos\vartheta_1^* - \frac{\gamma_c^2}{\gamma_c^2 - 1}(\varkappa_1 - \varkappa_2) = 0. \tag{17.15}$$

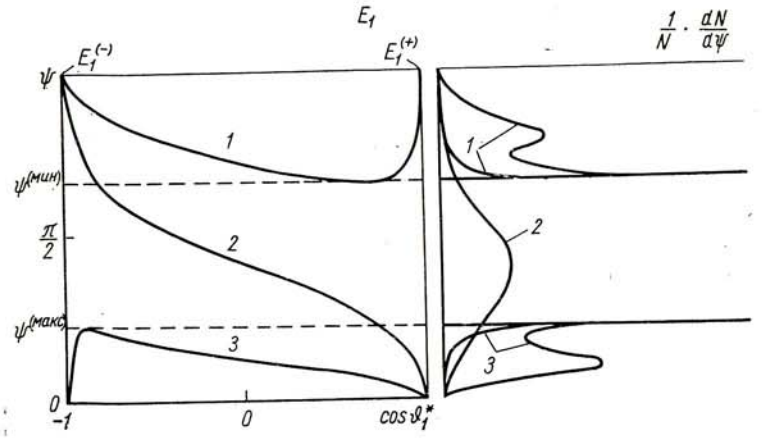


Рис. 25. Графики $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ и $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ для случая $m_1 < m_2$:
1 — $\varkappa_1 < 1$, $\varkappa_2 < 1$: *2* — $\varkappa_1 < 1$, $\varkappa_2 > 1$: *3* — $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 > 1$.

Не вдаваясь в подробный анализ решений уравнения (17.15), отметим, что существуют три области качественно различного поведения $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ (рис. 25):

1) $\varkappa_1 < 1$, $\varkappa_2 < 1$ или

$$p_{01} < \frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}}{2m_2}. \tag{17.16}$$

В этой области $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ обладает минимумом $\psi^{(мин)}$ при $\cos\vartheta_1^* > 0$ и угол ψ пробегает значения в интервале

$$\psi^{(мин)} \leqslant \psi \leqslant \pi; \tag{17.8'}$$

2) $\varkappa_1 < 1$, $\varkappa_2 > 1$ или

$$\frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}}{2m_2} < p_{01} < \frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}}{2m_1}. \tag{17.17}$$

Угол ψ может принимать любые значения

$$0 \leqslant \psi \leqslant \pi; \tag{17.18}$$

3) $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 > 1$ или

$$p_{01} > \frac{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}}{2m_1}. \tag{17.19}$$

В зависимости от соотношения между s, m_1 и m_2 функция $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ может иметь как два максимума различной высоты, так

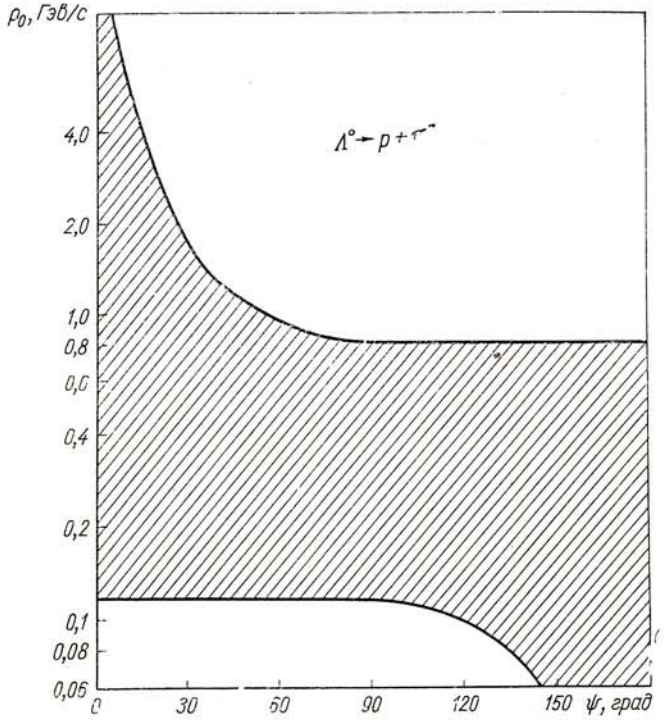


Рис. 26. Область разрешенных углов разлета в зависимости от импульса распадающейся частицы для случая $m_1 < m_2$ (распад $\Lambda \to p + \pi$).

и один, но в любом случае угол ψ не превышает некоторого угла $\psi^{(макс)}$ (которому соответствует $\cos\vartheta_1^* < 0$):

$$0 \leqslant \psi \leqslant \psi^{(макс)} \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{17.12'}$$

В качестве иллюстрации приведем функцию $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ (см. рис. 25) и область разрешенных значений ψ (рис. 26) для конкретного распада $\Lambda^0 \to p + \pi^-$.

Обратимся теперь к вычислению распределения по углам разлета в $Л$-системе $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$. Из очевидного соотношения

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}=\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\cos\vartheta_1^*}\left|\frac{d\cos\vartheta_1^*}{d\psi}\right| \tag{17.20}$$

следует, что в случае изотропного разлета вторичных частиц в $Ц$-системе $\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\cos\vartheta_1^*}=\frac{1}{N^*}\cdot\frac{dN^*}{d\cos\vartheta_1^*}=1/2\right)$ распределение по углам разлета полностью определяется производной $d\cos\vartheta_1^*/d\psi$ (см. рис. 23 и 25). В точках, где функция $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ достигает экстремумов, распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ обращается в бесконечность и в значительной доле событий углы ψ группируются вблизи экстремальных значений — качественно это понятно из рис. 23 и 25.

Для нахождения аналитического выражения $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ как функции ψ следовало бы решить уравнение (17.5) относительно $\cos\vartheta_1^*=f(\psi)$ и подставить в соотношение (17.20). Однако в общем случае эта задача чрезвычайно сложна, и проще продифференцировать обратную функцию $\psi(\cos\vartheta_1^*)$ и получить нужное распределение в параметрическом виде, выбрав в качестве параметра угол ϑ_1^*:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}=\frac{1}{N^*}\cdot\frac{dN^*}{d\cos\vartheta_1^*}\cdot\frac{1}{\left|\frac{d\psi}{d\cos\vartheta_1^*}\right|}=\left(\frac{1}{N^*}\cdot\frac{dN^*}{d\cos\vartheta_1^*}\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\vartheta_1^*\left[\gamma_c^2(\varkappa_1+\cos\vartheta_1^*)^2+\sin^2\vartheta_1^*\right]\left[\gamma_c^2(\varkappa_2-\cos\vartheta_1^*)^2+\sin^2\vartheta_1^*\right]}{\gamma_c(\varkappa_1+\varkappa_2)\left\{(\gamma_c^2-1)\cos^3\vartheta_1^*-\left[(\gamma_c^2-1)+\gamma_c^2(1-\varkappa_1\varkappa_2)\right]\cos\vartheta_1^*-\gamma_c^2(\varkappa_1-\varkappa_2)\right\}}. \tag{17.21}$$

Сам угол ψ определяется по формуле (17.5), которую можно записать в более компактном виде

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\gamma_c(\varkappa_1+\varkappa_2)\sin\vartheta_1^*}{\gamma_c^2(\varkappa_1+\cos\vartheta_1^*)(\varkappa_2-\cos\vartheta_1^*)-\sin^2\vartheta_1^*}. \tag{17.22}$$

Другим удобным параметрическим представлением распределения $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ является его выражение через энергии вторичных частиц в $Л$-системе [21]. Согласно преобразованиям Лоренца $\cos\vartheta_1^*$ и энергия вторичной частицы связаны линейно:

$$\cos\vartheta_1^*=\frac{E_1-\gamma_c E_1^*}{\gamma_c\beta_c p_1^*}, \tag{17.23}$$

поэтому зависимость $\psi(\cos\vartheta_1^*)$, приведенная на рис. 23 и 25, при соответствующем изменении шкалы (нижняя шкала на указанных рисунках) одновременно представляет зависимость $\psi(E_1)$ и

$$\frac{d\cos\vartheta_1^*}{d\psi}=\frac{1}{\gamma_c\beta_c p_1^*}\cdot\frac{dE_1}{d\psi}. \tag{17.24}$$

Подставляя зависимость (17.24) в соотношение (17.20), получаем (при изотропии в $Ц$-системе):

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}=\frac{1}{2\gamma_c\beta_c p_1^*}\left|\frac{dE_1}{d\psi}\right|. \tag{17.25}$$

Для определения $dE_1/d\psi$ (точнее, обратной величины $d\psi/dE_1$) выразим ψ через энергии вторичных частиц [см. предпоследнюю строку равенства (14.2′)]:

$$\cos\psi=\frac{E_1E_2-\frac{1}{2}(s-m_1^2-m_2^2)}{p_1p_2}, \tag{17.26}$$

и, продифференцировав это равенство, окончательно получим

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}=\frac{1}{2\gamma_c\beta_c p_1^*}\times$$

$$\times\frac{p_1^3p_2^3\sin\psi}{\left|E_1p_1^2m_2^2-E_2p_2^2m_1^2+\frac{1}{2}(s-m_1^2-m_2^2)(E_1p_2^2-E_2p_1^2)\right|}. \tag{17.27}$$

При дифференцировании равенства (17.26) было учтено то обстоятельство, что E_1 и E_2 связаны законом сохранения энергии*:

$$E_1+E_2=\sqrt{p_{01}^2+s}, \tag{17.28}$$

и поэтому

$$\frac{dE_2}{dE_1}=-1. \tag{17.29}$$

Равенство (17.28) позволяет исключить из равенств (17.26) и (17.27) энергию одной из вторичных частиц и представить ψ и $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi}$ в виде функций только одного параметра, например энергии E_1. Для построения распределения параметр E_1 нужно варьировать в интервале

$$\gamma_c(E_1^*-\beta_c p_1^*)\leqslant E_1\leqslant\gamma_c(E_1^*+\beta_c p_1^*). \tag{17.30}$$

* Если реакция представляет собой распад нестабильной частицы ($s=m_0^2$), то равенство (17.28) превращается в $E_1+E_2=E_0$.

Заметим, что для упругого рассеяния двух частиц одинаковой массы соотношение (17.26) имеет вид

$$\cos\psi = \frac{T_1 T_2}{p_1 p_2}. \qquad (17.26')$$

В нерелятивистском пределе правая часть соотношения (17.26′) очень мала, и угол разлета всегда имеет одно и то же значение $\psi = \pi/2$ (эллипс на рис. 20, *а* превращается в окружность).

Приведем, наконец, один важный частный случай, когда распределение по углу разлета может быть просто получено в явном виде. Речь идет о распаде на две частицы нулевой массы ($m_1 = m_2 = 0$), примером могут служить распады $\pi^\circ \longrightarrow 2\gamma$ или $\eta \longrightarrow 2\gamma$ (эллипс импульсов см. на рис. 21). В этом случае

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \beta_c < 1 \qquad (17.31)$$

и осуществляется ситуация, иллюстрируемая кривой *1* на рис. 23, т. е. угол ψ заключен в интервале $\psi^{(\text{мин})} \leqslant \psi \leqslant \pi$, причем

$$\cos\frac{\psi^{(\text{мин})}}{2} = \beta_c. \qquad (17.32)$$

Заметим, что при реализации минимального угла энергии вторичных частиц одинаковы (см. рис. 21). Равенство (17.22) при условии (17.31) можно преобразовать к виду

$$\cos\vartheta_1^* = \pm\frac{\sqrt{\beta_c^2 - \cos^2\frac{\psi}{2}}}{\beta_c \sin\frac{\psi}{2}}. \qquad (17.33)$$

Дифференцируя равенство (17.33) и учитывая, что $\cos\vartheta_1^*$ имеет два значения при заданном ψ, приходим к окончательной формуле (для изотропного разлета в $Ц$-системе):

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\psi} = \frac{1-\beta_c^2}{2\beta_c}\cdot\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sin^2\frac{\psi}{2}\sqrt{\beta_c^2 - \cos^2\frac{\psi}{2}}}. \qquad (17.34)$$

§ 18. ПЕРЕДАВАЕМЫЙ 4-ИМПУЛЬС И ПЕРЕДАВАЕМАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Рассмотрим подробней формулу для квадрата передаваемого 4-импульса в двухчастичной реакции. Вычислим Δ^2 в $Ц$-системе, для этого подставим вторые части равенств (14.6)—(14.9) в соответствующую часть равенства (14.3′) и после некоторых преобразований получим

$$\Delta^2 = -t = \Delta^2_{\text{мин}} + 4p_{01}^* p_1^* \sin^2\frac{\vartheta_1^*}{2}, \qquad (18.1)$$

где $\Delta^2_{\text{мин}}$ — минимальное значение Δ^2, которое реализуется при рассеянии вперед ($\vartheta_1^* = 0$):

$$\Delta^2_{\text{мин}} = \frac{s}{2}\left\{1 - \frac{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_1^2 + m_2^2}{s} + \frac{(m_{01}^2 - m_{02}^2)(m_1^2 - m_2^2)}{s^2} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\left[1 - \frac{(m_{01}+m_{02})^2}{s}\right]\left[1 - \frac{(m_{01}-m_{02})^2}{s}\right]\left[1 - \frac{(m_1+m_2)^2}{s}\right]\left[1 - \frac{(m_1-m_2)^2}{s}\right]}\right\}. \qquad (18.2)$$

При больших энергиях, когда

$$s \gg m_{01}^2,\ m_{02}^2,\ m_1^2,\ m_2^2, \qquad (18.3)$$

фигурные скобки в выражении (18.2) представляют собой разность двух близких величин, что может служить источником ошибок при расчетах. Поэтому квадратный корень следует разложить в ряд по величинам m_i^2/s (m_i — любая из четырех масс), что после громоздких выкладок [с точностью до членов $(m_i^2/s)^3$] приводит к формуле:

$$\Delta^2_{\text{мин}} \approx \frac{(m_{01}^2 - m_1^2)(m_{02}^2 - m_2^2)}{s} +$$
$$+ \frac{(m_{01}^2 m_{02}^2 - m_1^2 m_2^2)\left[(m_{01}^2 + m_{02}^2) - (m_1^2 + m_2^2)\right]}{s^2} +$$
$$+ \frac{1}{s^3}\left\{(m_{01}^2 - m_1^2)(m_{02}^2 - m_2^2)(m_{01}^2 - m_2^2)(m_{02}^2 - m_1^2) + \right.$$
$$\left. + (m_{01}^2 m_{02}^2 - m_1^2 m_2^2)\left[(m_{01}^2 + m_{02}^2)^2 - (m_1^2 + m_2^2)^2\right]\right\} \qquad (18.4)$$

При очень больших энергиях можно ограничиться первым членом, при этом также

$$p_{01}^* \approx p_1^* \approx \frac{\sqrt{s}}{2} \qquad (18.5)$$

и

$$\Delta^2 \approx \frac{(m_{01}^2 - m_1^2)(m_{02}^2 - m_2^2)}{s} + s\sin^2\frac{\vartheta^*}{2}. \qquad (18.6)$$

Для упругого рассеяния $\Delta^2_{\text{мин}} = 0$, и поэтому всегда $\Delta^2 \geqslant 0$. В общем случае в зависимости от соотношения между массами передаваемый 4-импульс может быть как пространственноподобным ($\Delta^2 > 0$), так и времениподобным ($\Delta^2 < 0$) вектором. Можно сформулировать следующую теорему [22]: если выполняются условия

$$\left.\begin{aligned}(m_1 - m_{01})(m_2 - m_{02}) > 0;\\ (m_1 + m_{01})(m_2 + m_{02}) > 0,\end{aligned}\right\} \qquad (18.7)$$

то передаваемый 4-импульс всегда пространственноподобен

$$\Delta^2 > 0. \tag{18.8}$$

Важной характеристикой упругого рассеяния на неподвижной мишени является кинетическая энергия, теряемая налетающей частицей (с массой $m_{01} = m_1$) и передаваемая покоившейся до соударения частице-мишени (с массой $m_{02} = m_2$):

$$\Delta T = T_{01} - T_1 = T_2. \tag{18.9}$$

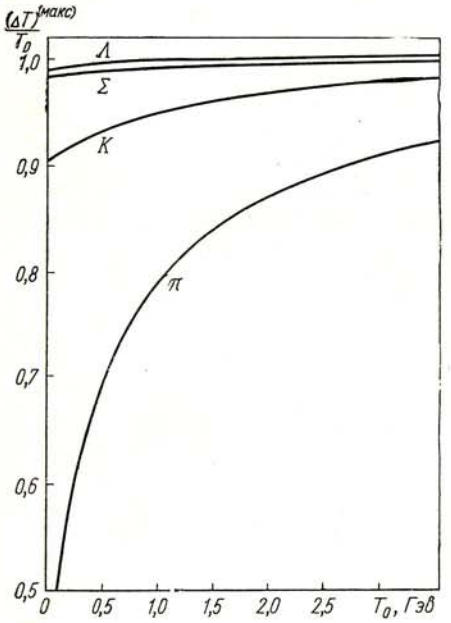


Рис. 27. Максимальная доля кинетической энергии $(\Delta T)^{макс}/T_{01}$ теряемая различными частицами при упругом рассеянии на покоящихся протонах [7].

Из формулы (15.1) после некоторых преобразований получаем:

$$\Delta T = T_2 = \frac{2m_2 p_{01}^2 \cos^2 \vartheta_2}{(E_{01} + m_2)^2 - p_{01}^2 \cos^2 \vartheta_2}. \tag{18.10}$$

Напомним (см. рис. 18 и рис. 21), что при упругом рассеянии у частицы-мишени $\varkappa_2 = 1$ и угол ϑ_2 заключен в интервале $0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \pi/2$, поэтому ΔT монотонно меняется от нуля до максимального значения

$$(\Delta T)^{(макс)} = \frac{2m_2 T_{01}(T_{01} + 2m_1)}{2T_{01}m_2 + (m_1 + m_2)^2} \tag{18.11}$$

при рассеянии вперед. Из выражения (18.11) видно, что рассеивающаяся частица может полностью передать свою кинетическую энергию частице-мишени лишь при рассеянии частиц с одинаковой массой

$$(\Delta T)^{(макс)}_{m_1 = m_2} = T_{01}. \tag{18.11'}$$

На рис. 27, заимствованном из обзора [7], приведена максимальная доля энергии $(\Delta T)^{(макс)}/T_{01}$, теряемая различными частицами при упругом рассеянии на покоящихся протонах. Для процесса образования δ-электронов частицами более тяжелыми, чем электроны ($m_1 \gg m_2$), при энергии $E_{01} \ll m_1^2/2m_2$ формула (18.11) приближенно записывается в более простом виде:

$$(\Delta T)^{(макс)} \approx 2m_2(\gamma_{01}^2 - 1). \tag{18.12}$$

Рассмотрим сначала дифференциальные сечения (распределения) двухчастичных реакций при фиксированных энергии и направлении движения первичной частицы. Для преобразования сечений существенное значение имеет характерная особенность двухчастичных реакций, которая состоит в том, что импульс вторичной частицы * в $Ц$-системе постоянен и не зависит от угла вылета ϑ_1^*. В этих условиях система кинематически полностью определяется углом вылета ϑ_1^* (предполагается азимутальная изотропия) и отношение сечений в $Л$- и $Ц$-системах равно якобиану $J(p^*, \cos\vartheta_1^*/p, \cos\vartheta_1)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} \Big/ \frac{d\sigma^*}{d\Omega_1^*} = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega_1} \Big/ \frac{1}{N^*} \cdot \frac{dN^*}{d\Omega_1^*} = J(p^*, \cos\vartheta_1^*/p^*, \cos\vartheta) = \left| \frac{\partial \cos\vartheta_1^*}{\partial \cos\vartheta_1} \right|_{p^*}. \tag{19.1}$$

В § 12 якобиан $J(p^*, \cos\vartheta_1^*/p^*, \cos\vartheta_1)$ с помощью формулы (12.18) был представлен как функция угла в $Л$-системе и импульса в $Ц$-системе. Полезно иметь также выражения для якобиана через угол и импульс в одной какой-либо системе. Чтобы получить такое выражение, например, через величины в $Ц$-системе, продифференцируем уравнение (5.3′) и после некоторых преобразований получим:

$$J(p^*, \cos\vartheta_1^*/p_1^*, \vartheta_1) = \frac{\sin^3\vartheta_1^*}{\sin^3\vartheta_1} \cdot \frac{1}{\gamma_c \left| 1 + \varkappa_1 \cos\vartheta_1^* \right|} = \frac{\left[\gamma_c^2 (\cos\vartheta_1^* + \varkappa_1)^2 + \sin^2\vartheta_1^*\right]^{3/2}}{\gamma_c \left| 1 + \varkappa_1 \cos\vartheta_1^* \right|}, \tag{19.2}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\beta_c}{\beta_1^*} = \frac{\beta_c E_1^*}{p_1^*}.$$

Аналогично можно выразить якобиан через величины в $Л$-системе:

$$J(p^*, \cos\vartheta_1^*/p^*, \cos\vartheta_1) = \frac{\gamma_c \left| 1 - \frac{\beta_c}{\beta_1} \cos\vartheta_1 \right|}{\left[\gamma_c^2 \left(\cos\vartheta_1 - \frac{\beta_c}{\beta_1}\right)^2 + \sin^2\vartheta_1\right]^{3/2}}. \tag{19.2'}$$

Если угловое распределение вторичных частиц в $Ц$-системе изотропно или пропорционально четной степени $\cos\vartheta_1^*$, то угловое и энергетическое распределения в $Л$-системе описываются полученными в § 13 формулами (13.2)—(13.24) (см. также рис. 12 и 13).

* Для конкретности будем говорить о частице a_1.

Дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega_1$ и $d\sigma^*/d\Omega_1^*$ легко выразить через инвариантное дифференциальное сечение $d\sigma/dt$. Так, в $Ц$-системе

$$\frac{d\sigma^*}{d\Omega_1^*} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dt}{d\cos\vartheta_1^*} = \frac{1}{\pi} p_{01}^* p_1^* \frac{d\sigma}{dt} =$$

$$= \frac{\sqrt{[s-(m_{01}+m_{02})^2]\,[s-(m_{01}-m_{02})^2]\,[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}}{4\pi s} \times$$

$$\times \frac{d\sigma}{dt} \qquad (19.3)$$

[для получения $dt/d\cos\vartheta_1^*$ нужно продифференцировать уравнение (14.3′) или обратную функцию (14.15)]. Аналогично

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dt}{d\cos\vartheta_1}, \qquad (19.4)$$

а $dt/d\cos\vartheta_1$ (точнее, обратная величина $d\cos\vartheta_1/dt$) определяется дифференцированием равенства (14.16). Полученное выражение довольно громоздко, приведем его лишь в частном случае, когда массы всех четырех частиц равны между собой

$$(m_{01} = m_{02} = m_1 = m_2 = m):$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{(s-4m^2)^{1/2}\,(s+t-4m^2)^{1/2}\,(s+t)^{3/2}}{4\pi m^2 \sqrt{s}} \cdot \frac{d\sigma}{dt}. \qquad (19.5)$$

Связь между дифференциальными сечениями (распределениями) двух продуктов реакции, частиц a_1 и a_2, в $Л$-системе имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} \Big/ \frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega_1} \Big/ \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\Omega_2} = \frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = \left| \frac{d\cos\vartheta_2}{d\cos\vartheta_1} \right| =$$

$$= \frac{\sin^3\vartheta_1}{\sin^3\vartheta_2} \cdot \frac{(1-\varkappa_2^2)\operatorname{tg}\vartheta_2 + (1+\varkappa_1\varkappa_2)\operatorname{tg}\vartheta_1}{(1-\varkappa_1^2)\operatorname{tg}\vartheta_1 + (1+\varkappa_1\varkappa_2)\operatorname{tg}\vartheta_2}, \qquad (19.6)$$

где величина $|d\cos\vartheta_2/d\cos\vartheta_1|$ найдена дифференцированием равенства (17.4). Если использовать соотношение (19.6) для определения дифференциального распределения одного продукта реакции (например, частицы a_2) по дифференциальному распределению другого продукта реакции (частицы a_1), то угол вылета ϑ_2 должен быть выражен через угол вылета ϑ_1, а для этого следует решить уравнение (17.4) относительно ϑ_2:

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{(1-\varkappa_1^2)\operatorname{tg}\vartheta_1}{-(1+\varkappa_1\varkappa_2) \pm (\varkappa_1+\varkappa_2)\sqrt{1+(1-\varkappa_1^2)\,\gamma_c^2\operatorname{tg}^2\vartheta_1}}. \qquad (19.7)$$

Правило употребления знаков в этом равенстве определяется величиной $\varkappa_1$ (см. рис. 22): если $\varkappa_1 < 1$, то ϑ_2 — однозначная функция ϑ_1 и в равенстве (19.7) используется знак «+» при $0 < \vartheta_1 < \pi/2$ и знак «—» при $\pi/2 < \vartheta_1 < \pi$; если же $\varkappa_1 > 1$, то ϑ_2 — двузначная функция ϑ_1 и в равенстве (19.7) употребляются оба знака.

§ 20. СВЯЗЬ МЕЖДУ СПЕКТРОМ НЕСТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ И СПЕКТРАМИ ПРОДУКТОВ ИХ РАСПАДА

Все приведенные в § 19 формулы, как уже отмечалось, относятся к фиксированной энергии и фиксированному направлению движения первичных частиц. Если же, как это часто бывает в реальных условиях, имеется какой-то спектр первичных частиц, то энергетическое и угловое распределения вторичных частиц зависят от вида этого спектра. В таких случаях интерпретация наблюдаемых на опыте распределений вторичных частиц существенно усложняется и зачастую оказывается неоднозначной. Ограничимся практически важным частным случаем распада нестабильной частицы

$$a_0 \to a_1 + a_2, \qquad (20.1)$$

происходящим изотропно в системе покоя частицы a_0. Рассмотрим сначала только энергетические распределения, считая их усредненными по углам вылета частиц (или интерпретируя их как относящиеся к изотропному угловому распределению).

Пусть энергетический спектр распадающихся частиц a_0 в $Л$-системе (или в некоторой произвольной системе координат)

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dE_0} = W(E_0). \qquad (20.2)$$

Энергетическое распределение продукта распада (для конкретности — частицы a_1) при фиксированном значении E_0 описывается формулами (13.8) и (13.9):

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dE_1} = \frac{1}{2\gamma_0\beta_0\widetilde{p}_1} = \frac{m_0}{2p_0\widetilde{p}_1}; \qquad (20.3)$$

$$\gamma_0(\widetilde{E}_1 - \beta_0\widetilde{p}_1) \leqslant E_1 \leqslant \gamma_0(\widetilde{E}_1 + \beta_0\widetilde{p}_1), \qquad (20.4)$$

где $\widetilde{E}_1$ и $\widetilde{p}_1$ — соответственно энергия и импульс частицы a_1 в системе покоя частицы* a_0, которые согласно формулам (14.3) и (14.9) выражаются через массы и не зависят от E_0:

$$\widetilde{E}_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}; \qquad (20.5)$$

$$\widetilde{p}_1 = \frac{\sqrt{(m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2m_0}. \qquad (20.6)$$

* Система покоя частицы a_0 совпадает с $Ц$-системой распада (20.1), и для физических величин в этой системе можно было бы использовать обычные обозначения со «звездочкой», однако мы сохраним последние для $Ц$-системы реакции, в которой образуются сами частицы a_0 (см. ниже вторую часть этого параграфа).

Для получения энергетического распределения частицы a_1 с учетом спектра (20.8) формула (20.3) должна быть проинтегрирована по E_0 с весом $W(E_0)$, и вместо (20.3) получаем

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE_1}=F(E_1)=\frac{m_0}{2\tilde{p}_1}\int\limits_{E_0^{(-)}}^{E_0^{(+)}}\frac{W(E_0)}{p_0}\,dE_0. \qquad (20.7)$$

Пределы интегрирования

$$E_0^{(\pm)}=\frac{m_0}{m_1^2}(\tilde{E}_1E_1\pm\tilde{p}_1p_1) \qquad (20.8)$$

определяются из условия, чтобы при изменении E_0 в интервале $E_0^{(-)}\leqslant E_0\leqslant E_0^{(+)}$ фиксированное значение E_1 попадало в интервал (20.4), и $E_0^{(-)}$ ($E_0^{(+)}$)—такое значение E_0, при котором фиксированная величина E_1 совпадает с правой (левой) границей интервала (20.4)

$$E_1=\gamma_0^{(-)}(\tilde{E}_1+\beta_0^{(-)}\tilde{p}_1); \qquad (20.9)$$
$$[E_1=\gamma_0^{(+)}(\tilde{E}_1-\beta_0^{(+)}\tilde{p}_1)],$$

что реализуется при вылете продукта распада a_1 в системе покоя распадающейся частицы a_0 вперед (назад). Решение равенства (20.9) относительно $E_0^{(-)}$ ($E_0^{(+)}$) и приводит к формуле (20.8).

Характер зависимости пределов интегрирования $E_0^{(-)}$ и $E_0^{(+)}$ от E_1 различен (рис. 28): при $p_1=0$ $E_0^{(-)}=E_0^{(+)}=\tilde{E}_1m_0/m_1$, а затем с ростом E_1 величина $E_0^{(+)}$ непрерывно возрастает, а $E_0^{(-)}$ сначала проходит через минимум $E_0^{(-)}=m_0$ при $E_1=\tilde{E}_1$. Такое поведение пределов интегрирования приводит к определенным закономерностям в спектре вторичных частиц. В реальных условиях спектр первичных частиц ограничен со стороны больших энергий некоторой постоянной величиной U, так что $W(E_0)\equiv 0$ при $E_0>U$. Проанализируем следствия такого ограничения для энергетического распределения вторичных частиц*. Рассмотрим сначала

$$U=U^{(1)}\leqslant\frac{m_0}{m_1}\tilde{E}_1, \qquad (20.10)$$

тогда в интеграле (20.7) верхним пределом будет константа $U^{(1)}$ и спектр $F(E_1)$ будет функцией только нижнего предела $E_0^{(-)}$. Поскольку каждому значению предела в этом случае соответствуют два значения энергии вторичной частицы ($E_1=E_1'<\tilde{E}_1$ и $E_1=E_1''>\tilde{E}_1$ — и подынтегральная функция в выражении (20.7) положительна, то в энергетическом распределении вторичных частиц наблюдается характерный максимум * при $E_1=\tilde{E}_1$, а в точках E_1' и E_1'' значения спектра совпадают

$$F(E_1')=F(E_1''), \qquad (20.11)$$

причем для величин E_1' и E_1'' выполняется условие

$$\tilde{E}_1E_1'-\tilde{p}_1p_1'=\tilde{E}_1E_1''-\tilde{p}_1p_1''. \qquad (20.12)$$

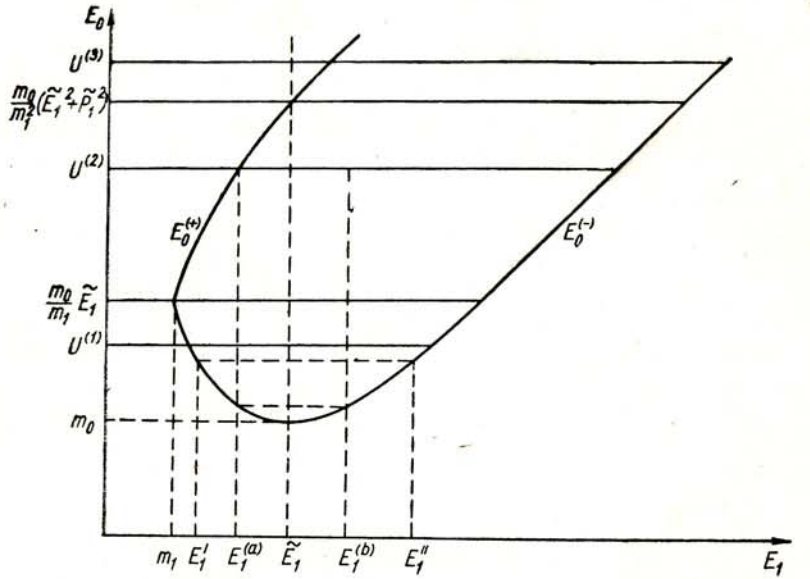


Рис. 28. Зависимость пределов интегрирования в выражении (20.7) от E_1.

Выразив с помощью формул (20.5) и (20.6) $\tilde{E}_1$ и $\tilde{p}_1$ через массы частиц, после некоторых преобразований соотношение (20.12) можно переписать в виде [23]

$$m_0=\sqrt{\frac{E_1'E_1''+p_1'p_1''+m_1^2}{2}}+\sqrt{\frac{E_1'E_1''+p_1'p_1''+2m_2^2-m_1^2}{2}}. \qquad (20.13)$$

Свойство спектра вторичных частиц, выражаемое равенствами (20.12) или (20.13), иногда называют логарифмической симметрией спектра [23, 24]; это название связано с тем, что «быстрота» частицы a_1 [§ 2, формулы (2.7), а также формулы (20.24)] логарифмически выражается через ее энергию и импульс

$$r_1=\ln\frac{E_1+p_1}{m_1}, \qquad (20.14)$$

* Наиболее подробно эти вопросы исследованы в работах Г. И. Копылова [23].

* В зависимости от вида спектра первичных частиц этот максимум может представлять собой пик или плато (см. ниже рис. 29).

и соотношение (20.12) переписывается в виде

$$\tilde{r}_1 - r_1' = r_1'' - \tilde{r}_1 \qquad (20.15)$$

или

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_1' + r_1''}{2}, \qquad (20.15')$$

т. е. спектр «быстрот» (20.14) для вторичной частицы симметричен относительно точки максимума $\tilde{r}_1$.

Пусть далее $U = U^{(2)}$, где

$$\frac{m_0}{m_1}\tilde{E}_1 < U^{(2)} < \frac{m_0}{m_1^2}(\tilde{E}_1^2 + \tilde{p}_1^2). \qquad (20.16)$$

Величина $(\tilde{E}_1^2 + \tilde{p}_1^2)m_0/m_1^2$ — это значение верхнего предела интегрирования в формуле (20.7) в точке $E_1 = \tilde{E}_1$, где нижний предел интегрирования достигает минимума. Таким образом, интервал интегрирования наибольший в точке $E_1 = \tilde{E}_1$, а справа и слева от нее интегрирование производится лишь по части этого интервала и, следовательно, по-прежнему при $E_1 = \tilde{E}_1$ распределение вторичных частиц будет иметь характерный максимум. Однако теперь свойства симметрии (20.12) или (20.13) для точек, где выполняется условие (20.11), проявляется в ограниченной части распределения вблизи максимума, точнее, в интервале энергий вторичной частицы

$$\left.\begin{aligned} &E_1^{(a)} \leqslant E_1 \leqslant E_1^{(b)}; \\ &E_1^{(a)} = \frac{U^{(2)}\tilde{E}_1 - \tilde{p}_1\sqrt{[U^{(2)}]^2 - m_0^2}}{m_0} = m_1 \operatorname{ch}(u - \tilde{r}_1); \\ &E_1^{(b)} = m_1 \operatorname{ch}(3\tilde{r}_1 - u), \end{aligned}\right\} \qquad (20.17)$$

где u — «быстрота», соответствующая $U^{(2)}$, т. е. $U^{(2)} = m_0 \operatorname{ch} u$. Смысл величин $E_1^{(a)}$ и $E_1^{(b)}$ понятен из рис. 28. Пусть, наконец,

$$U = U^{(3)} > \frac{m_0}{m_1^2}(\tilde{E}_1^2 + \tilde{p}_1^2). \qquad (20.18)$$

Поскольку в точке, где нижний предел интегрирования $E_0^{(-)} = U^{(3)}$, распределение $F(E_1) = 0$, то в любом случае ограниченного первичного спектра в энергетическом распределении продуктов распада $F(E_1)$ должны наблюдаться один или несколько максимумов. Однако теперь при $E_1 > \tilde{E}_1$ интервал интегрирования в выражении (20.7) с ростом E_1 все время сдвигается в сторону бо́льших энергий первичной частицы, поэтому количество максимумов и их положение определяются уже конкретным видом спектра первичных частиц $W(E_0)$. Обобщением свойства симметрии (20.12), которое относилось

к точкам с одинаковым значением $F(E_1)$ [см. соотношение (20.11)], в общем случае ограниченного первичного спектра служит формула, полученная в работе [23]; между значениями энергетического распределения $F(E_1)$ в точках:

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(1)} &= m_1 \operatorname{ch} r_1^{(1)} < \tilde{E}_1; \\ E_1^{(2)} &= m_1 \operatorname{ch}(2\tilde{r}_1 - r_1^{(1)}); \\ E_1^{(3)} &= m_1 \operatorname{ch}(2\tilde{r}_1 + r_1^{(1)}); \\ E_1^{(4)} &= m_1 \operatorname{ch}(4\tilde{r}_1 - r_1^{(1)}); \\ E_1^{(5)} &= m_1 \operatorname{ch}(4\tilde{r}_1 + r_1^{(1)}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (20.19)$$

существует следующая связь:

$$F(E_1^{(1)}) - F(E_1^{(2)}) + F(E_1^{(3)}) - F(E_1^{(4)}) + F(E_1^{(5)}) - \ldots = 0. \qquad (20.20)$$

Связь энергетических спектров становится чрезвычайно простой в частном случае, когда $m_0 \approx m_1 + m_2$, и, следовательно, вторичная частица оказывается нерелятивистской в системе покоя распадающейся частицы

$$\tilde{E}_1 \approx m_1, \ \tilde{p}_1 \ll m_1. \qquad (20.21)$$

В этом случае

$$E_0^{(+)} \approx E_0^{(-)} \approx \frac{m_0}{m_1} E_1 \qquad (20.22)$$

и интервал интегрирования в выражении (20.7) стремится к нулю, так что

$$F(E_1) \approx \frac{m_0}{2\tilde{p}_1}\left[\frac{1}{p_0} W(E_0)\right]_{E_0 = \frac{m_0}{m_1} E_1}(E_0^{(+)} - E_0^{(-)}) = \frac{m_0}{m_1} W\left(\frac{m_0}{m_1} E_1\right), \qquad (20.23)$$

т. е. спектр вторичных частиц повторяет спектр первичных.

Рассмотрим теперь задачу о восстановлении энергетического спектра первичных частиц по измеренному спектру вторичных [23, 25].

Прежде всего для упрощения выкладок, следуя работе [23], выразим энергии частиц через «быстроты» [см. выражение (2.7)]:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= m_0 \operatorname{ch} r_0; \\ E_1 &= m_1 \operatorname{ch} r_1; \\ \tilde{E}_1 &= m_1 \operatorname{ch} \tilde{r}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (20.24)$$

и, обозначив

$$\begin{aligned} W(E_0) &= W(m_0 \operatorname{ch} r_0) = w(r_0); \\ F(E_1) &= F(m_1 \operatorname{ch} r_1) = f(r_1), \end{aligned} \qquad (20.25)$$

перепишем соотношение (20.7) в виде

$$f(r_1) = \frac{m_0}{2\widetilde{p}_1} \int\limits_{|r_1 - \widetilde{r}_1|}^{r_1 + \widetilde{r}_1} w(r_0)\, dr_0. \qquad (20.26)$$

Затем, дифференцируя последнее уравнение по r_1 при $r_1 \geqslant \widetilde{r}_1$ ($E_1 \geqslant \widetilde{E}_1$), получаем разностное уравнение для $w(r_0)$:

$$\frac{df(r_1)}{dr_1} = \frac{m_0}{2\widetilde{p}_1} [w(r_1 + \widetilde{r}_1) - w(r_1 - \widetilde{r}_1)]. \qquad (20.27)$$

Для решения этого уравнения положим $r_1 - \widetilde{r}_1 = R$ и запишем уравнение (20.27) при $R = r_0$, $R = r_0 + 2\widetilde{r}_1$, $R = r_0 + 4\widetilde{r}_1$, ... $R = r_0 + 2\nu\widetilde{r}_1$, ... и т. д. вплоть до $R = r_0 + 2\nu_0 \widetilde{r}_1$, при котором обе части уравнения (20.27) обращаются в нуль. Складывая полученные равенства, получаем решение для $w(r_0)$:

$$w(r_0) = -\frac{2\widetilde{p}_1}{m_0} \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0} \frac{df(r_1)}{dr_1}\Bigg|_{r_1 = r_0 + (2\nu+1)\widetilde{r}_1}, \qquad (20.28)$$

или, возвращаясь к прежним переменным,

$$W(E_0) = -\frac{2\widetilde{p}_1}{m_0} \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0} (\rho_\nu E_0 + \varepsilon_\nu p_0) \frac{dF(E_1)}{dE_1}\Bigg|_{E_1 = \varepsilon_\nu E_0 + \rho_\nu p_0}, \qquad (20.29)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\nu &= \frac{m_1}{m_0} \operatorname{ch}\left[(2\nu+1)\operatorname{Arch}\frac{\widetilde{E}_1}{m_1}\right]; \\ \rho_\nu &= \frac{m_1}{m_0} \operatorname{sh}\left[(2\nu+1)\operatorname{Arch}\frac{\widetilde{E}_1}{m_1}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (20.30)$$

Формула (20.29) дает решение поставленной задачи о восстановлении спектра первичных частиц при условии, что энергетическое распределение вторичных частиц построено по достаточно большой статистике, которая позволяет с нужной точностью вычислить производные, входящие в эту формулу.

На практике нередко встречается важный частный случай, когда распад происходит на две частицы нулевой массы — обычно γ-кванты (например, $\pi^\circ \longrightarrow 2\gamma$, $\eta \longrightarrow 2\gamma$). В этом случае [см. формулы (20.5) и (20.6)]

$$\widetilde{E}_1 = \widetilde{p}_1 = \frac{m_0}{2}, \qquad (20.31)$$

интервал энергий распадных γ-квантов при фиксированной энергии первичных частиц [см. выражение (20.4)]

$$\frac{E_0 - p_0}{2} = \frac{m_0}{2}\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}} \leqslant E_1 \leqslant = \frac{E_0 + p_0}{2} = \frac{m_0}{2}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}, \qquad (20.32)$$

и соответственно пределы интегрирования в выражении (20.7) при фиксированном значении E_1 [см. формулу (20.8), в которой для $E_0^{(-)}$ нужно совершить предельный переход] следующие:

$$\left.\begin{aligned} E_0^{(+)} &= \infty; \\ E_0^{(-)} &= E_1 + \frac{m_0^2}{4E_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (20.33)$$

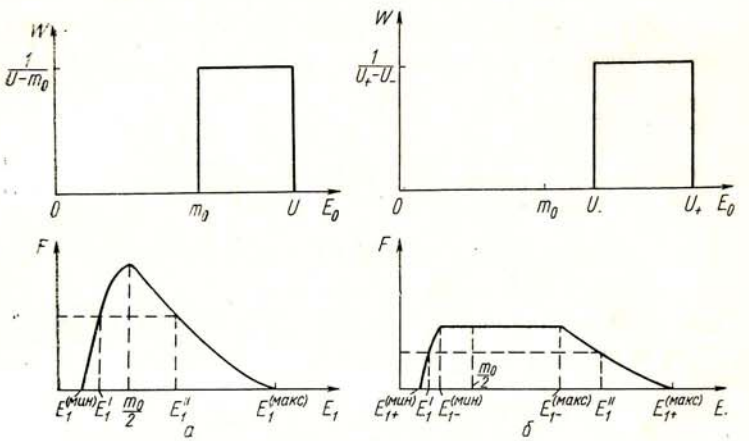


Рис. 29. Спектр γ-квантов (нижний график) от распада частиц $\tau_0 \to 2\gamma$, равномерно распределенных по энергиям (верхний график):

а — нижняя граница спектра первичных частиц совпадает с массой покоя; *б* — нижняя граница спектра первичных частиц больше массы покоя.

Формула (20.7) приобретает совсем простой вид*

$$F(E_1) = \int\limits_{E_1 + \frac{m_0^2}{4E_1}}^{\infty} \frac{W(E_0)}{p_0}\, dE_0. \qquad (20.34)$$

Поскольку $\widetilde{E}_1 m_0/m_1 \to \infty$, то свойство симметрии (20.12) справедливо при любой энергии первичной частицы [см. выражение (20.10)] и формула (20.13) для точек энергетического спектра γ-квантов (рис. 29) с одинаковой ординатой

$$F(E_1') = F(E_1'') \qquad (20.35)$$

* Поскольку два вторичных γ-кванта неразличимы между собой, то обычно строится энергетический спектр γ-квантов $F(E_\gamma) = 2F(E_1)$.

существенно упрощается

$$\frac{m_0}{2} = \sqrt{E_1' E_1''}. \tag{20.36}$$

В качестве примера приведем спектр γ-квантов от распада частиц a_0, равномерно распределенных по энергиям в некотором интервале. Если спектр $W(E_0)$ простирается от $E_0 = m_0$ ($p_0 = 0$) до $E_0 = U$

$$W(E_0) = \frac{1}{U - m_0}\ ;\quad m_0 \leqslant E_0 \leqslant U, \tag{20.37}$$

то (см. рис. 29, *а*)

$$F(E_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{U - m_0} \ln \dfrac{E_1}{E_1^{(\text{мин})}}, & E_1^{(\text{мин})} \leqslant E_1 \leqslant \dfrac{m_0}{2}\ ; \\ \dfrac{1}{U - m_0} \ln \dfrac{E_1^{(\text{макс})}}{E_1}, & \dfrac{m_0}{2} \leqslant E_1 \leqslant E_1^{(\text{макс})}, \end{cases} \tag{20.38}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(\text{макс})} &= \frac{U + \sqrt{U^2 - m_0^2}}{2}\ ; \\ E_1^{(\text{мин})} &= \frac{U - \sqrt{U^2 - m_0^2}}{2}\ . \end{aligned}\right\} \tag{20.39}$$

Если же спектр первичных частиц начинается с энергии $E_0 = U_- > m_0$ и простирается до $E_0 = U_+$

$$W(E_0) = \frac{1}{U_+ - U_-}\ ;\quad U_- \leqslant E_0 \leqslant U_+, \tag{20.37'}$$

то (см. рис. 29, *б*)

$$F(E_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{U_+ - U_-} \ln \dfrac{E_1}{E_{1+}^{(\text{мин})}}, & E_{1+}^{(\text{мин})} \leqslant E_1 \leqslant E_{1-}^{(\text{мин})}; \\ \dfrac{1}{U_+ - U_-} \ln \dfrac{E_{1-}^{(\text{мин})}}{E_{1+}^{(\text{мин})}} = & \\ = \dfrac{1}{U_+ - U_-} \ln \dfrac{E_{1+}^{(\text{макс})}}{E_{1-}^{(\text{макс})}}, & E_{1-}^{(\text{мин})} \leqslant E_1 \leqslant E_{1-}^{(\text{макс})}; \\ \dfrac{1}{U_+ - U_-} \ln \dfrac{E_{1+}^{(\text{макс})}}{E_1}, & E_{1-}^{(\text{макс})} \leqslant E_1 \leqslant E_{1+}^{(\text{макс})}, \end{cases} \tag{20.38'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E_{1\pm}^{(\text{макс})} &= \frac{U_\pm + \sqrt{U_\pm^2 - m_0^2}}{2}\ ; \\ E_{1\pm}^{(\text{мин})} &= \frac{U_\pm - \sqrt{U_\pm^2 - m_0^2}}{2}\ . \end{aligned}\right\} \tag{20.39'}$$

Примем теперь во внимание также и угловые распределения частиц, т. е. найдем связь между дважды дифференциальными (энергетическими и угловыми) распределениями первичных и вторичных частиц. В общем случае распада на две частицы произвольной массы задача эта достаточно сложна, и мы ограничимся все тем же простейшим, но весьма важным распадом на две частицы нулевой массы (γ-кванты), по-прежнему считая, что в системе покоя частицы a_0 распад происходит изотропно. В применении к распаду $\pi^\circ \longrightarrow 2\gamma$ такая задача неоднократно рассматривалась в некоторых работах [26—31], которым мы в той или иной мере будем следовать.

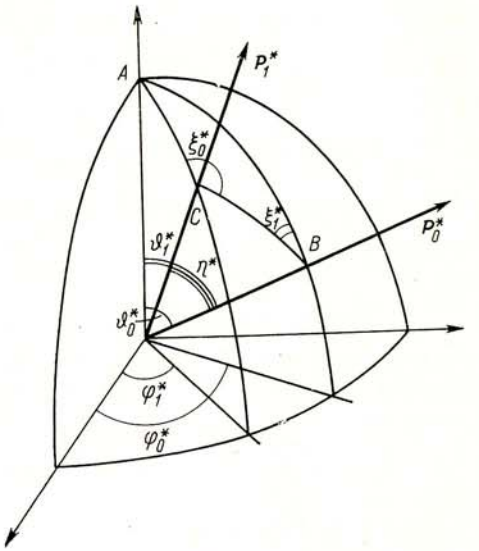


Рис. 30. Связь между углами ϑ_0^*, φ_0^*, ξ_0^* и ϑ_1^*, φ_1^*, ξ_1^*.

Пусть в *Ц*-системе реакции, в которой образуются нестабильные частицы a_0, их распределение

$$\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2N^*}{dE_0^*\, d\Omega_0^*} = W^*(E_0^*)\, \Phi^*(\cos\vartheta_0^*). \tag{20.40}$$

Угловое распределение $\Phi^*(\cos\vartheta_0^*)$ удобно представить в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\Phi^*(\cos\vartheta_0^*) = \sum_l A_l P_l(\cos\vartheta_0^*), \tag{20.41}$$

где A_l — константы, которые могут зависеть от E_0^*.

Найдем сначала дважды дифференциальное распределение продуктов распада (γ-квантов) при фиксированном $\mathbf{p}_0^*$, т. е. вероятность их вылета с энергией в интервале E_1^*, $E_1^* + dE_1^*$ в направлении, определяемом полярным углом η^* и азимутальным углом ξ_1^* относительно вектора $\mathbf{p}_0^*$ (обозначения всех углов приведены на рис. 30). То обстоятельство, что энергетический спектр распадных γ-квантов в системе покоя частицы a_0 описывается δ-функцией [см. выражение (20.31)], приводит в сочетании с преобразованиями

Лоренца к однозначной связи между энергией E_1^* и углом η^*:

$$\cos\eta^* = \frac{E_0^* - \dfrac{m_0^2}{2E_1^*}}{p_0^*}, \tag{20.42}$$

что позволяет записать искомое дважды дифференциальное распределение при фиксированном $\mathbf{p}_0^*$ в виде [для сравнения см. выражение (20.3)]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE_1^*\,d\xi_1^*} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{p_0^*};\\ &0 \leqslant \xi_1^* \leqslant 2\pi;\\ &\frac{E_0^* - p_0^*}{2} \leqslant E_1^* \leqslant \frac{E_0^* + p_0^*}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{20.43}$$

Далее, комбинируя выражения (20.40) и (20.43), получаем, что первичные частицы a_0, летящие в направлении $(\vartheta_0^*,\ \varphi_0^*)$ с энергией в интервале $E_0^*,\ E_0^* + dE_0^*$, дают при распаде

$$\frac{N^*}{2\pi}\cdot\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}\,\Phi^*(\cos\vartheta_0^*)\,dE_0^*\,|\,d\cos\vartheta_0^*\,|\,d\varphi_0^*\,dE_1^*\,d\xi_1^* \tag{20.44}$$

вторичных частиц a_1 (γ-квантов), летящих в направлении $\vartheta_1^*,\ \varphi_1^*$ с энергией в интервале $E_1^*,\ E_1^* + dE_1^*$, и, чтобы получить дважды дифференциальное распределение продуктов распада a_1, необходимо проинтегрировать выражение (20.44) по энергиям и углам вылета первичных частиц. Пределы интегрирования по E_0^* определяются аналогично соотношениям (20.33):

$$\left.\begin{aligned} &E_0^{*(+)} = \infty;\\ &E_0^{*(-)} = E_1^* + \frac{m_0^2}{4E_1^*}, \end{aligned}\right\} \tag{20.45}$$

а для выполнения интегрирования по углам сделаем замену переменных (см. рис. 30)

$$\cos\vartheta_0^*,\ \varphi_0^*,\ \xi_1^* \to \cos\vartheta_1^*,\ \varphi_1^*,\ \xi_0^* \tag{20.46}$$

по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\cos\vartheta_0^* = \cos\vartheta_1^*\cdot\cos\eta^* + \sin\vartheta_1^*\cdot\sin\eta^*\cdot\cos\xi_0^*;\\ &\varphi_0^* = \varphi_1^* + \arcsin\left[\frac{\sin\gamma_i^*\cdot\sin\xi_0^*}{\sin\vartheta_0^*}\right];\\ &\xi_1^* = \arcsin\left[\frac{\sin\xi_0^*\cdot\sin\vartheta_1^*}{\sin\vartheta_0^*}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20.47}$$

Первая формула (20.47) представляет собой «теорему косинусов» для сферического треугольника ABC, а две другие следуют из «теоремы синусов» для того же треугольника. Прямыми вычислениями с помощью формул (20.47) можно легко убедиться, что якобиан преобразования (20.46) равен

$$J(\cos\vartheta_0^*,\ \varphi_0^*,\ \xi_1^*/\cos\vartheta_1^*,\ \varphi_1^*,\ \xi_0^*) = 1. \tag{20.48}$$

Заметим, что $d\cos\vartheta_1^*\,d\varphi_1^* = d\Omega_1^*$ и ξ_0^* меняется в интервале от 0 до 2π, и запишем выражение для дважды дифференциального распределения распадных γ-квантов в виде

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE_1^*\,d\Omega_1^*} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1^* + \frac{m_0^2}{4E_1^*}}^{\infty}\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}\,dE_0^*\int\limits_0^{2\pi}\sum_l A_l P_l(\cos\vartheta_0^*)\,d\xi_0^*. \tag{20.49}$$

Чтобы проинтегрировать по ξ_0^*, воспользуемся «теоремой сложения» для полиномов Лежандра [см. в книге [19], формулу (8.814)]:

$$P_l(\cos\vartheta_0^*) = P_l(\cos\eta^*)\,P_l(\cos\vartheta_1^*) + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(\cos\eta^*)\,P_l^m(\cos\vartheta_1^*)\cos m\xi_0^*, \tag{20.50}$$

где $P_l^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра. Интеграл по ξ_0^* от суммы в выражении (20.50) равен нулю, и в результате приходим к формуле

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE_1^*\,d\Omega_1^*} = \sum_l P_l(\cos\vartheta_1^*)\int\limits_{E_1^* + \frac{m_0^2}{4E_1^*}}^{\infty}\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}\,A_l P_l(\cos\eta^*)\,dE_0^*. \tag{20.51}$$

Используя якобиан перехода (12.16) от $Ц$-системы к $Л$-системе при $m_1 = 0$

$$J(E_1^*,\ \cos\vartheta_1^*/E_1,\cos\vartheta_1) = \frac{1}{\gamma_c(1 - \beta_c\cos\vartheta_1)} \tag{20.52}$$

и выражая E_1^* и $\cos\vartheta_1^*$ через величины в $Л$-системе, получаем дифференциальное распределение в $Л$-системе

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dE_1\,d\Omega_1}=\frac{1}{\gamma_c(1-\beta_c\cos\vartheta_1)}\sum_l P_l\left(\frac{\cos\vartheta_1-\beta_c}{1-\beta_c\cos\vartheta_1}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{E_0^{*(-)}}^{\infty}\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}A_l P_l\left[\frac{1}{p_0^*}\left(E_0^*-\frac{m_0^2}{2\gamma_c E_1(1-\beta_c\cos\vartheta_1)}\right)\right];\quad(20.53)$$

$$E_0^{*(-)}=\frac{\gamma_c^2E_1^2(1-\beta_c\cos\vartheta_1)^2+m_0^2}{4\gamma_c E_1(1-\beta_c\cos\vartheta_1)}.\quad(20.54)$$

Рассмотрим частные случаи формул (20.51) и (20.53).

Пусть угловое распределение распадающихся частиц в *Ц*-системе пропорционально $\cos^2\vartheta_0^*$:

$$\Phi^*(\cos\vartheta_0^*)=\frac{3}{4\pi}\cos^2\vartheta_0^*=\frac{1}{4\pi}P_0(\cos\vartheta_0^*)+\frac{1}{2\pi}P_2(\cos\vartheta_0^*).\quad(20.55)$$

Подстановка выражения (20.55) в формулу (20.51) дает

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{d^2N^*}{dE_1^*\,d\Omega_1^*}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{E_1^*+\frac{m_0^2}{4E_1^*}}^{\infty}\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}dE_0^*+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta_1^*-1)\int\limits_{E_1^*+\frac{m_0^2}{4E_1^*}}^{\infty}\frac{W(E_0^*)}{p_0^*}\cdot\frac{1}{2}(3\cos^2\eta^*-1)\,dE_0^*.\quad(20.56)$$

При $\vartheta_1^*=\arccos(1/\sqrt{3})$ второй член в формуле (20.56) обращается в нуль и энергетическое распределение продуктов распада под этим углом в *Ц*-системе определяется таким же выражением, как в случае изотропного распределения [см. выражение (20.34)], и для него, следовательно, справедливо свойство логарифмической симметрии (20.36) [24, 26]. Если же угловое распределение пропорционально четной степени $\cos\vartheta_0^*$, превышающей два, то отмеченные свойства выполняются для угла $\vartheta_1^*=\arccos(1/\sqrt{3})$ приближенно [27].

Формула (20.53) часто используется для описания дифференциального распределения γ-квантов от распада π^0-мезонов, образованных в реакции фоторождения на протонах:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0+p&\to\pi^\circ+p;\\ \pi^0&\to 2\gamma.\end{aligned}\right\}\quad(20.57)$$

В *Ц*-системе этой реакции π°-мезон обладает постоянной энергией [см. выражение (14.8)]

$$E_{\pi^\circ}^*=\frac{2E_{\gamma_0}m_p+m_\pi^2}{2\sqrt{2E_{\gamma_0}m_p+m_p^2}},\quad(20.58)$$

где E_{γ_0} — энергия первичного γ-кванта в *Л*-системе, так что энергетическое распределение $W(E_{\pi^\circ}^*)$ представляет собой δ-функцию и формула (20.53) упрощается *:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{d^2N}{dE_\gamma\,d\Omega_\gamma}=\frac{2}{\gamma_c(1-\beta_c\cos\vartheta)}\times$$

$$\times\sum_l A_l P_l\left(\frac{\cos\vartheta_\gamma-\beta_c}{1-\beta_c\cos\vartheta_\gamma}\right)P_l\left[\frac{1}{p_{\pi^\circ}^*}\left(E_{\pi^\circ}^*-\frac{m_0^2}{2\gamma_c E_\gamma(1-\beta_c\cos\vartheta_\gamma)}\right)\right].\quad(20.59)$$

Частные случаи формулы (20.59) при

$$\Phi^*(\cos\vartheta_0^*)=A+C\cos^2\vartheta_0^*=$$
$$=\left(A+\frac{1}{3}C\right)P_0(\cos\vartheta_0^*)+\frac{2}{3}CP_2(\cos\vartheta_0^*)\quad(20.60)$$

и

$$\Phi^*(\cos\vartheta_0^*)=A+B\cos\vartheta_0^*+C\cos^2\vartheta_0^*=$$
$$=\left(A+\frac{1}{3}C\right)P_0(\cos\vartheta_0^*)+BP_1(\cos\vartheta_0^*)+\frac{2}{3}CP_2(\cos\vartheta_0^*)\quad(20.61)$$

были приведены соответственно в работах [28, 29].

§ 21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ ЧАСТИЦЫ В ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ

Для определения массы частицы необходимо независимо измерить ее импульс и энергию (или скорость). Существуют стандартные экспериментальные методы (измерение ионизации и кривизны следа в магнитном поле в трековых приборах, измерение соотношения между остаточным пробегом и плотностью зерен в фотоэмульсиях и т. д.), которые позволяют в принципе решить эту задачу для одиночных заряженных частиц. Однако точность определения массы при этом невелика и, кроме того, указанные методы непригодны для нейтральных частиц. Практически часто используются кинематические соотношения, связывающие неизвестную массу одной из частиц в реакциях

$$a_0\to a_1+a_2;\quad(21.1)$$

* В формулу (20.59) введен множитель 2; см. сноску на стр. 99.

$$a_{01} + a_{02} \to a_1 + a_2 \qquad (21.1')$$

с заданными массами других частиц и измеренными на опыте импульсами и углами. Рассмотрим подробнее такие соотношения для распада (21.1).

1. Определение массы распадающейся частицы по кинематическим характеристикам продуктов распада. Согласно соотношению (14.2′) масса распадающейся частицы a_0

$$m_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\{\sqrt{p_1^2 + m_1^2}\sqrt{p_2^2 + m_2^2} - p_1 p_2 \cos\psi\}. \qquad (21.2)$$

Будем полагать, что массы вторичных частиц m_1 и m_2 известны, а их импульсы p_1, p_2 и угол разлета ψ измерены на опыте; очевидно, что формула (21.2) применима при распаде на заряженные частицы. Ее анализ в приложении к указанной задаче приводит к следующим выводам:

а) если хотя бы один из продуктов распада медленный, так что $m_1/p_1 > 1$ или $m_2/p_2 > 1$, то член с $\cos\psi$ вносит малый вклад и ошибка в определении массы m_0 обусловлена в основном ошибками в измерении импульсов;

б) член с $\cos\psi$ становится существенным, когда продукты распада быстрые: $m_1/p_1 \ll 1$ и $m_2/p_2 \ll 1$. Поскольку при этом обычно сам угол ψ невелик, а точность его измерения достаточно велика, то и в этом случае ошибка в массе m_0 зачастую определяется точностью измерения импульсов. Заметим, что при больших импульсах p_1 и p_2 и малом угле разлета ψ выражение в фигурных скобках в формуле (21.2) во избежание вычислительных ошибок удобно разложить в ряд:

$$m_0^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + p_1 p_2\left[\left(\frac{m_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{p_2}\right) + \vartheta^2\right]. \qquad (21.2')$$

В случае распада остановившейся частицы ($p_1 = p_2 = \tilde{p}$, $\psi = \pi$) формула (21.2) существенно упрощается

$$m_0 = \sqrt{\tilde{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\tilde{p}^2 + m_2^2}. \qquad (21.3)$$

Иногда формулу (21.3) записывают иначе, выделив массы продуктов распада

$$m_0 = m_1 + m_2 + \tilde{p}^2\left[\frac{1}{m_1 + \sqrt{\tilde{p}^2 + m_1^2}} + \frac{1}{m_2 + \sqrt{\tilde{p}^2 + m_2^2}}\right]. \qquad (21.3')$$

Такая запись удобна при $\tilde{p} < m_1, m_2$, когда последний член в формуле (21.3′), зависящий от $\tilde{p}$, представляет собой малую поправку к сумме масс m_1 и m_2, которые считаются известными. В этом случае даже грубые измерения импульса $\tilde{p}$ приводят к достаточно точному значению массы m_0. Если вместо импульса измеряется кинетическая

энергия одной из вторичных частиц (например, a_1), то формулу (21.3′) можно переписать в виде

$$m_0 = m_1 + m_2 + T_1\left[1 + \frac{T_1 + 2m_1}{m_2 + \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1) + m_2^2}}\right]. \qquad (21.3'')$$

Еще раз подчеркнем, что формула (21.3″), так же как и (21.3′), относится к случаю распада остановившейся частицы a_0.

Иногда возникает задача об определении массы первичной частицы, если известны значения ее скорости β_0, энергии E_1 и угла вылета ϑ_1 одной из вторичных частиц [32]. Переходя в систему покоя первичной частицы, получаем

$$m_0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = \gamma_0(E_1 - p_1\beta_0\cos\vartheta_1) + \\ + \sqrt{\gamma_0^2(E_1 - p_1\beta_0\cos\vartheta_1)^2 - m_1^2 + m_2^2}. \qquad (21.4)$$

2. Определение массы вторичной частицы. В этом случае считаем, что массы первичной частицы m_0 и вторичной m_1 известны с большой точностью, а их импульсы измерены экспериментально, и необходимо найти массу m_2 (обычно a_0 и a_1 — заряженные частицы, а a_2 — нейтральная).

Аналогично выражению (21.2) получаем

$$m_2^2 = m_0^2 + m_1^2 - 2\{\sqrt{p_0^2 + m_0^2}\sqrt{p_1^2 + m_1^2} - p_0 p_1 \cos\vartheta_1\}. \qquad (21.5)$$

Все выводы, касавшиеся равенства (21.2), легко перенести и на равенство (21.5)

3. Определение массы первичной частицы по энергетическому спектру вторичных. Этот метод определения массы первичной частицы основан на свойстве логарифмической симметрии энергетического спектра продуктов распада (см. § 20). В экспериментальной практике особенно часто он применяется при изучении распада нейтральной частицы на два γ-кванта. В этом случае (см., например, рис. 29) максимум в энергетическом спектре распадных γ-квантов всегда находится в точке $E_\gamma = m_0/2$. Точность определения массы зависит от «остроты» максимума, что в свою очередь определяется энергетическим спектром первичных частиц. Кроме того, для точек энергетического спектра γ-квантов с одинаковой ординатой [см. выражение (20.35)] выполняется равенство (20.36), которое также позволяет вычислить массу первичной частицы. Для повышения точности обычно значение массы усредняется по нескольким парам таких точек.

Массу первичной частицы в принципе можно определить и в случае распада на частицы ненулевой массы. Решение задачи при этом несколько усложняется и, в частности, как было показано в § 20, зависит от верхней границы энергетического спектра распадающихся частиц. Наиболее общий подход, основанный на использовании равенств (20.19) и (20.20), предложен Г. И. Копыловым [23].

Глава 4

МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В настоящей главе остановимся на реакциях, в которых в конечном состоянии образуется более двух частиц (множественные процессы). Если реакции с двумя частицами в конечном состоянии характеризуются двумя параметрами, то реакциям с многими частицами свойственно большее число параметров. В частности, энергия вторичных частиц в $Ц$-системе уже не описывается простыми формулами (14.8) и (14.9), зависящими лишь от энергии E_0 и масс частиц. Поэтому информация, которая может быть получена чисто кинематическим путем по малому числу исходных параметров, для множественных процессов менее богатая, чем в случае двухчастичных реакций. В соответствии с этим изменяется и сам подход к анализу подобных реакций и класс решаемых кинематических задач.

Так, нерационально пытаться, задаваясь большим числом исходных параметров и используя кинематику, вычислить большую часть распределений из-за сложной и обычно неоднозначной связи между параметрами и относительно большими экспериментальными ошибками, свойственными измерениям энергетических характеристик множественных процессов*; поэтому решают некоторые ограниченные проблемы. Здесь можно назвать в первую очередь следующие задачи:

1) вычисление характеристик множественных процессов, исходя из представления о существенной роли фазовых объемов, являющихся кинематическими факторами;

2) нахождение экстремальных соотношений;

3) анализ сравнительно общих закономерностей в крайнем релятивистском случае, когда можно в большей или меньшей степени рассчитывать на успешное применение формул вида (5.8), в которые не входят импульсы вторичных частиц;

4) вычисление характеристик моделей (типа файрболов), динамические основы которых существенно не ясны, но их выводы могут иметь значительную эвристическую ценность.

§ 22. ИНВАРИАНТНЫЙ И НЕИНВАРИАНТНЫЙ ФАЗОВЫЕ ОБЪЕМЫ

Основная идея использования статистики для вычисления характеристик множественных процессов высказана Ферми [33]. Она имеет простой физический смысл. Вероятность W_f осуществления некоторого конечного состояния f в соответствии с квантовой механикой (в нерелятивистском приближении) имеет вид **

$$W_f = 2\pi |H_{if}|^2 \rho_f, \tag{22.1}$$

* Некоторые исключения представляют реакции с тремя частицами в конечном состоянии (см. § 23 и 25).

** Здесь и дальше $\hbar = 1$.

где H_{if} — матричный элемент перехода из начального i в конечное f состояние; ρ_f — статистический вес конечного состояния.

Статистический множитель можно в принципе рассчитать сколь угодно точно (см. § 23); основные трудности начинаются при попытке оценить матричный элемент. Общеизвестны многочисленные и перманентные неудачи построения теории сильных взаимодействий. Более того, в настоящее время неясны даже источники трудностей теории и, следовательно, пути их преодоления*. Поэтому можно полагать, что нужно учесть последний множитель точно, а второй грубо, приближенно, на основе каких-либо физических или размерных соображений. В частности, Ферми предположил, что вероятность перехода с образованием n частиц $|H_{if}|^2$ пропорциональна вероятности нахождения n вторичных частиц в некотором характеристическом для данного процесса объеме V. Естественно было положить, что в $Ц$-системе

$$V \sim \left(\frac{1}{\mu}\right)^3 \frac{1}{E_c}, \tag{22.2}$$

тогда

$$|H_{if}|^2 \sim V^n. \tag{22.3}$$

Очевидно, что подобный подход не может претендовать на большую точность или полную универсальность. Однако и сейчас и, повидимому, в течение еще длительного времени статистические методы и их модификации будут иметь важное значение в анализе множественных процессов**.

Подобный прогноз базируется не только на упомянутых выше трудностях теории. Дело состоит еще в том, что с увеличением энергии современных ускорителей возрастает значение множественных процессов. Также растет и среднее число вторичных частиц. А это увеличивает влияние статистического фактора, являющегося функцией с максимумом, острота которого возрастает с увеличением числа участвующих в акте частиц. С другой стороны, даже при сравнительно простых законах взаимодействия (электродинамика) вычисление характеристик системы многих частиц — весьма трудная задача, поэтому широкое распространение получили статистические модели сложных атомных оболочек.

Перейдем теперь к более современной формулировке статистического подхода в релятивистски инвариантной форме [2, 36, 37]. В наиболее общем виде вероятность W_{if} вычисляется на основе теории S-матрицы (см. ч. II настоящей книги и, например, работу [38]):

* Подобная ситуация сложилась уже к концу 40-х годов, когда Ферми впервые сформулировал свою теорию.

** Весьма ярким примером подобной модификации является предложенная Л. Д. Ландау [34] гидродинамическая теория множественных процессов, пригодная при энергиях $E_0 \geq 10^{12}$ *эв*. О современном состоянии гидродинамической теории см. работу [35].

$$W_{if} = \frac{1}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \int \dots \int |\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 \delta^4 \left(\mathcal{P}_0 - \sum_{i=1}^{h} n_{if} \right) \prod_{i=1}^{n} \delta \left(\mathcal{P}_{if}^2 + m_i^2 \right) \frac{d^4 \mathcal{P}_{if}}{(2\pi)^4}; \quad (22.4)$$

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02},$$

где $\langle f_0 | S | i_0 \rangle$ — элемент S-матрицы для состояний f_0 и i_0; f_0 и i_0 означают набор квантовых чисел конечного и начального состояний; n — полное число вторичных частиц. Интегрирование производится по всему фазовому объему.

Как было показано в § 7 [см. формулы (7.4) и (7.4′)], интегрирование по 4-импульсу свободной частицы сводится по существу к интегрированию по трехмерному импульсу, и выражение (22.4) можно записать в форме

$$W_{if} \sim \int \dots \int |\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 \delta^4 \left(\mathcal{P}_0 - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{kf} \right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 \mathbf{p}_{fk}}{2E_{fk}}. \quad (22.5)$$

Далее можно идти двумя путями: 1) усреднить по всем параметрам элементы S-матрицы, затем приближенно оценить его усредненное значение и 2) усреднить величину $|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{E_{fk}}$ и это значение подставить в формулу (22.5). В первом случае вероятность W_{if} пропорциональна инвариантному фазовому объему

$$R_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1 \dots m_n) = \int \dots \int \delta^4 \left(\mathcal{P}_0 - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{fk} \right) \prod_{k=1}^{n} \frac{d^3 \mathbf{p}_{fk}}{2E_{fk}}. \quad (22.6)$$

Интерпретация множественных процессов на основе (22.6) предложена впервые Шриваставой и Сударшаном [36]. Во втором случае вероятность W_{if} пропорциональна

$$\rho_n(\mathbf{p}, E_0; m_1, m_2 \dots m_n) = \int \dots \int \delta^4 \left(\mathcal{P}_0 - \sum_{k=1}^{n} n_{fk} \right) \prod_{i=1}^{n} d^3 \mathbf{p}_{fk}. \quad (22.7)$$

Этот неинвариантный фазовый объем использовался Ферми [33]. К соотношениям (22.6) и (22.7) можно подойти с несколько иных, более общих, позиций [37]. В общем случае величина $|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 = \Phi(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$. Кроме того, она может зависеть от других динамических переменных (спин, изотопический спин и т. д.). Допустим, что функцию Φ можно факторизовать относительно переменных $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$

$$\Phi(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_n) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i). \quad (22.8)$$

Ограничимся рассмотрением инвариантных функций $\Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i)$ определенного класса:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i) &= C \frac{(\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_i)^q}{s^r}; \\ s &= -\mathcal{P}_0^2. \end{aligned}\right\} \quad (22.9)$$

Постоянная C определяется константами связи, массами вторичных частиц и иными динамическими переменными, q и r—константы. Тогда, как легко видеть, соотношение (22.6) получается из выражения (22.5), если $q = r = 0$. Теория Ферми имеет место при $q = 1$, $r = 1$*. С подобной точки зрения обе статистические теории выделены, пожалуй, лишь сравнительно простой физической интерпретацией. Физическая трактовка теории Ферми — установление статистического равновесия в объеме V.

Выбор $\Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i) = C$ можно трактовать следующим образом. Разлагая мезонное поле нуклона (на достаточно больших расстояниях от его центра) в интеграл Фурье [39], можно получить, что вероятность ω_i того, что вторичный мезон будет иметь импульс, лежащий в интервале $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i$, равна $d^3\mathbf{p}/E_i$. Если ω_i не зависит от остальных ω_k, что эквивалентно статистической независимости частиц**, то вероятность того, что n мезонов находится в состояниях с импульсами $\mathbf{p}_1, \dots \mathbf{p}_n$, равна произведению вероятностей $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$. Далее в духе теории Оппенгеймера и др. [40] множественный процесс можно трактовать как отрыв мезонного облака без изменения его внутреннего состояния (т. е. с сохранением распределения $\prod_{i=1}^{n} d^3\mathbf{p}_i/E_i$).

Из этих замечаний следует, что хотя теории, соответствующие статистическим факторам (22.6) и (22.7), и имеют благодаря возможности их наглядно интерпретировать определенные преимущества, все же логически с теми же основаниями существует довольно широкий класс теорий, определенный уравнением (22.9).

§ 23. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Для конкретных применений статистической теории необходимо вычислить интегралы типа (22.6), (22.7) или более общий интеграл (22.5) при условиях (22.8) и (22.9). Эта задача в общем виде решена [41] в форме сложного нестепенного ряда, основным параметром разложения оказалась величина*** $\nu_i = m_i/\sqrt{s}$. Отсылая читателя из-за громоздкости формул к оригинальным работам, ограничимся

* С точностью до несущественного численного множителя.

** Аналогичное допущение лежит в основе рассмотрения идеального газа.

*** В последние годы для расчетов статистических весов использовались вычислительные машины с применением метода Монте-Карло [42, 43].

здесь приведением первого члена разложения, пригодного для достаточно больших энергий. В общем виде [(22.5), (22.8) и (22.9)]

$$W_n = \frac{C^n \pi^{n-1} (q!)^n [2n(q+1)-4]!\, s^{\frac{n(2+2q-r)-4}{2}}}{2^{n(q+1)-1} [n(q+2)-4]! [n(q+1)-1]! [n(q+1)-2]!}. \quad (23.1)$$

В частности, для теории с инвариантным фазовым объемом

$$W_n = \overline{|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{s^{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!} =$$

$$= C^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{s^{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!}. \quad (23.2)$$

Здесь $\overline{|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2} = C^n$ — усредненное значение элемента S-матрицы. Для теории Ферми (неинвариантный фазовый объем) в ультрарелятивистском случае

$$W_n = \left\{ \frac{\overline{|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2}}{\prod_{i=1}^{n} E_i} \right\} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} s^{\frac{3n-4}{2}} \frac{(4n-4)!}{(3n-4)!\,(2n-1)!\,(2n-2)!}. \quad (23.3)$$

В другом предельном случае, когда все частицы нерелятивистские,

$$W_n = \left\{ \frac{\overline{|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2}}{\prod_{i=1}^{n} E_i} \right\} \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n-1)}}{\left[\frac{3}{2}(n-1)-1\right]!} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right)^{3/2} T_c^{\frac{3}{2}(n-1)-1}, \quad (23.4)$$

где T_c — полная кинетическая энергия частиц в $Ц$-системе.

Важной характеристикой множественных процессов является наиболее вероятная величина множественности $\bar{n}$ при заданной величине s. Опираясь на формулу (23.1) и допуская, что числа n настолько велики, что можно использовать формулу Стирлинга (т. е., полагая $\ln n \gg 1$), получаем в ультрарелятивистском приближении [37]

$$\bar{n} \sim s^{\frac{2q-r+2}{2(q+3)}}. \quad (23.5)$$

Как отмечалось выше, усредненное значение величины $\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 \Big/ \prod_{i=1}^{n} E_i$ Ферми предложил выбрать из следующих физических соображений: 1) в объеме V устанавливается статистическое равновесие; 2) все n вторичных частиц находятся в этом объеме. Тогда

$$\left(\frac{\overline{|\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2}}{\prod_{i=1}^{n} E_i} \right) = \left(\frac{V}{8\pi^3}\right)^{n-1} u_{n,J,I}. \quad (23.6)$$

Фактор $u_{n,J,I}$ учитывает статистический вес спиновых и изотопических степеней свободы. Вычисление его нужно производить на основе стандартных правил квантовой механики (см. ч. II и работу [44]). Из определения характеристического объема (22.2) V и фазового объема (22.7) следует, что Ферми сформулировал свою теорию в неинвариантной форме в определенной системе координат, а именно в $Ц$-системе. Поэтому все последующие формулы этого параграфа, относящиеся к фермиевской формулировке статистической теории, приводятся для II-системы. Вероятность

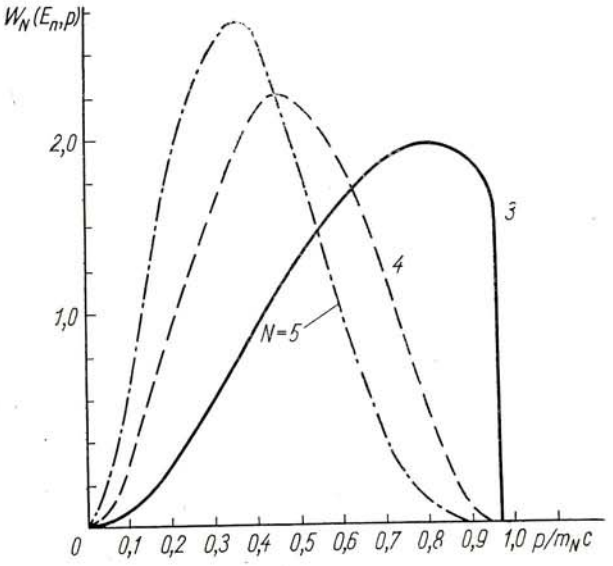


Рис. 31. Импульсное распределение π-мезонов, образованных при аннигиляции покоящейся пары нуклон — антинуклон (расчет по точным формулам статистической теории).

$$\frac{1}{N^*} \cdot \frac{dN^*}{dp^*} = \omega_n(E_c,\ p_1^*)$$

того, что одна из частиц имеет импульс, заключенный между p_1^*, $p_1^* + dp_1^*$, если полная энергия E_c равна произведению вероятности этой частицы, находящейся в шаровом слое фазового пространства (между сферами с радиусами p_1^*, $p_1^* + dp_1^*$), на величину фазового объема, занимаемого $(n-1)$ частицами при условии, что их энергия равна $E_c - \sqrt{p_1^{*2} + m_1^2}$, а полный импульс равен p_1^*:

$$\omega_n(E_c,\ p_1^*) = 4\pi p_1^{*2} W_{n-1}\left(E_c - \sqrt{p_1^{*2} + m_1^2},\ p_1^*\right). \quad (23.7)$$

Вычисление энергетического распределения для частных случаев приводилось в работах [45, 46], а в общем случае в статье [47] в виде сложного разложения. В качестве примера на рис. 31 показаны спектры π-мезонов, возникающие при аннигиляции покоящейся

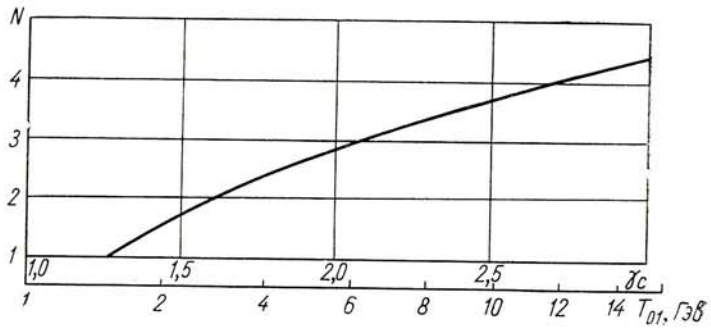


Рис. 32. Зависимость средней множественности π-мезонов, образованных при нуклон-нуклонных соударениях, от кинетической энергии налетающего нуклона. Вычисления проводились по статистической теории с учетом изобарных состояний [44].

нуклон-антинуклонной пары. Приведем значения $\omega_n(E_i, p_1^*)$ для ультрарелятивистского случая:

$$\omega_n(E_c,\ p_1^*) \sim p_1^*\,(E_c - 2p_1^*)^{n-3} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^i\, E_i^{n-i-1}}{(n+i-3)!} \cdot \frac{(E_c - 2p_1^*)^i}{(2n-i-4)!} \left[\frac{E_c}{2n-i-3} - \frac{E_c - 2p_i^*}{n+i-2} \right], \qquad (23.8)$$

где C_{n-1}^i — биномиальный коэффициент.

Чтобы получить энергетическое распределение в $Л$-системе, необходимо совершить переход по обычным формулам (см. § 12). Однако надо принять во внимание, что экспериментально угловое распределение вторичных частиц в $Ц$-системе характеризуется некоторым отклонением от изотропии. Если все же полагать для оценок это распределение изотропным, то можно воспользоваться упрощенными формулами § 13 для фиксированного импульса, а затем проинтегрировать по импульсам. Для характеристики статистической теории полезно также привести зависимость $\overline{n}(T_{01})$, вычисленную точно с учетом существования основного изобарного состояния $J = \frac{3}{2}$, $I = \frac{3}{2}$, $M = 1236$ *Мэв/с²* (рис. 32).

В заключение приведем несколько полезных выражений для случая, когда в конечном состоянии — три частицы, а их угловое распределение изотропно. Энергетическое распределение возьмем в форме (23.7)

$$\left.\begin{aligned} \omega_3(E_c,\ p_1^*) &\sim \frac{B^{1/2}\, p_1^{*2}}{\left[A^2 - p_1^{*2}\right]^2} \left[\left(1 - \frac{4A^2}{A^2 - p_1^{*2}}\right) B + AC \right]; \\ A &= E_c - \sqrt{p_1^{*2} + m_1^2}; \\ B &= (p_1^{*2} + m_2^2 + m_3^2 - A^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2; \\ C &= 6A\left[A^2 - (p_1^{*2} + m_2^2 + m_3^2)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (23.9)$$

При распаде $E_c = m_0$ (m_0 — масса распадающейся частицы). Естественно, что распределение (23.9) определяется лишь величиной E_c и массами вторичных частиц. Рассмотрим частные случаи (23.9):

1) $m_i \ll p_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$

$$\omega_3(E_c,\ p_1^*) \sim \left[3E_c^2 - 6E_c p_1^* + 2p_1^{*2}\right] p_1^{*2}; \qquad (23.10)$$

2) $m_i \gg p_i^*$

$$\omega_3(E_c,\ p_1^*) \sim \left[2(m_2 + m_3)\, T_c - \frac{E_c}{m_1}\, p_1^*\right] p_1^{*2}; \qquad (23.11)$$

3) $m_1 \ll p_1^*;\ m_2 \gg p_2^*;\ m_3 \gg p_3^*$

$$\omega_3(E_c,\ p_1^*) \sim (T_c - p_1^*)^{1/2}\, p_1^{*2}; \qquad (23.12)$$

4) $m_1 \gg p_1^*;\ m_2 \ll p_2^*;\ m_3 \gg p_3^*$

$$\omega_3(E_c,\ p_1^*) \sim (T_c^2 + p_1^{*2})\, p_1^{*2}; \qquad (23.13)$$

5) $m_1 \ll p_1^*;\ m_2 \ll p_2^*;\ m_3 \gg p_3^*$

$$\omega_3(E_c,\ p_1^*) \sim (T_c^2 - p_1^{*2})\, p_1^{*2}. \qquad (23.14)$$

Вычислим далее энергетические и угловые распределения в $Л$-системе, если распределение в $Ц$-системе соответствует выражению (23.10). В этом случае

$$\frac{1}{N^*} \cdot \frac{d^2N^*}{dp_1^*\, d\Omega_1^*} \sim \left[3E_c^2 - 6E_c p_1^* + 2p_1^{*2}\right] p_1^{*2}. \qquad (23.15)$$

Воспользуемся для ультрарелятивистского случая приближенными выражениями для якобиана $J\left(p_1^*,\ \cos\vartheta_1^*/p_1,\ \cos\vartheta_1\right) \approx \frac{E_1}{E_1^*} = \gamma_c(1 - \beta_c \cos\vartheta_1)$ и $p_1^* \approx E_1^* = \gamma_c E_1 (1 - \beta_c \cos\vartheta_1)$. Тогда импульсное распределение

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dp_1} \sim \int_{\cos\vartheta_1 \text{макс}(p)}^{1} p_1^{*2}\, \frac{3E_0^2 - 6E_c p_1^* + 2p^{*2}}{1 - \beta_c \cos\vartheta_1} \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 =$$

$$= \int\limits_{\cos\vartheta_{1\text{макс}}}^{1} p_1^2 (1-\beta_c\cos\vartheta_1)\left[3E_c^2 - 6E_c p_1 (1-\beta_c\cos\vartheta_1) + \right.$$

$$\left. + 2p_1^2 (1-\beta_c\cos\vartheta)^2\right] \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1. \qquad (23.16)$$

Отсюда следует, что

$$\cos\vartheta_{1\text{макс}} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_c}\left(1 - \frac{p^*_{1\text{макс}}}{\gamma_c p_1}\right) & \text{при } \frac{1}{\beta_c}\left(1 - \frac{p^*_{1\text{макс}}}{\gamma_c p_1}\right) > -1, \\ -1 & \text{при } \frac{1}{\beta_c}\left(1 - \frac{p^*_{1\text{макс}}}{\gamma_c p_1}\right) < 1. \end{cases} \qquad (23.17)$$

После интегрирования получаем

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dp_1} \sim p_1^2 \left\{3E_c^2\left[\chi^2 - (1-\beta_c)^2\right] - 4\gamma_c E_c p_1 \left[\chi^3 - (1-\beta_c)^3\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_c^2 p_1^2 \left[\chi^4 - (1-\beta_c)^4\right]\right\}, \qquad (23.18)$$

где

$$\chi = \begin{cases} \frac{E_c}{2p_1\gamma_c} & \text{при } p_1 > \frac{E_c}{2\gamma_c(1+\beta_c)}; \\ 1+\beta_c & \text{при } p_1 < \frac{E_c}{2\gamma_c(1+\beta_c)}. \end{cases}$$

Значения импульса p_1 заключены в интервале от 0 до $\frac{\gamma_c E_c}{2}(1+\beta_c)$

Перейдем к вычислению углового распределения:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega} \sim \int\limits_0^{p_{\text{макс}}(\vartheta)} \left[3E_c^2 - 6Eip_1(1-\beta_c\cos\vartheta) + \right.$$

$$\left. + 2p_1^2(1-\beta_c\cos\vartheta)^2\right] p_1^2(1-\beta_c\cos\vartheta)\, dp_1, \qquad (23.19)$$

причем

$$p_{\text{макс}}(\vartheta) = \frac{E_c}{2\gamma_c(1-\beta_c\cos\vartheta)}.$$

После интегрирования получаем

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\Omega} \sim \frac{1}{(1-\beta_c\cos\vartheta)^2}. \qquad (23.20)$$

Это выражение совпадает, если его нормировать, с угловым распределением частиц, возникших при распаде на две частицы (см. § 17). Такое совпадение не случайно. Характерной особенностью выражения (23.20) является его независимость от энергии вторичных частиц (лишь бы они обладали достаточно большими скоростями). Поэтому при любом импульсном распределении ультрарелятивистских частиц в $Ц$-системе будет приближенно определяться соотношением (23.20).

§ 24. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЕ

В современной физике высоких энергий большое место занимает изучение резонансных взаимодействий между частицами. Если в реакции образуется n вторичных частиц, среди которых k частиц — результат распада некоего резонанса (т. е. реакция идет в два этапа — сначала образуются $n-k$ частиц и резонанс, а затем резонанс распадается на k частиц), то между k частицами существуют определенные корреляции, для выявления которых нужно изучить физические величины, зависящие от характеристик всех этих частиц. Одним из методов экспериментального обнаружения резонансов в процессах множественной генерации служит анализ распределений по эффективной массе [см. выражение (7.3′)]

$$\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i\right)^2\right\}^{1/2}, \qquad (24.1)$$

«подозреваемых» k вторичных частиц (для удобства им присвоены первые k номеров: $i = 1, 2, \ldots, k$). Если предполагаемый резонанс действительно существует, то при соответствующем значении $\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots k} = \mathfrak{M}^{(\text{рез})}_{1\,2\,\ldots k}$ в распределении по эффективным массам наблюдается характерный пик. Надежное экспериментальное выделение таких пиков тем не менее нуждается в специальном анализе, поскольку реально наблюдаемое распределение по эффективным массам обусловлено не только динамикой взаимодействия, т. е. структурой матричного элемента $\langle f_0 | S | i_0\rangle$ в выражении (22.4) для вероятности данного неупругого процесса, но и кинематическими факторами, входящими в это выражение. Другими словами, между частицами существуют корреляции, обусловленные не только резонансным взаимодействием, но и законами сохранения.

Поэтому прежде всего необходимо оценить этот кинематический «фон», т. е. построить распределение по эффективной массе для тех же k частиц при условии, что взаимодействие между всеми вторичными частицами отсутствует и осуществление той или иной комбинации импульсов частиц определяется лишь фазовым объемом. Строго говоря, отсутствие взаимодействия между частицами означает, что квадрат матричного элемента может быть записан в виде произведения (22.8) с неизвестными функциями $\Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i)$. Практически чаще всего полагают, что $\Phi_i(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i) = \text{const}$, т. е. кинематический фон описывается релятивистски инвариантным фазовым объемом (22.6)

$$R_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, m_2, \ldots, m_n) =$$

$$= \underbrace{\int \dots \int}_{4n} \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_0\right) \prod_{i=1}^{n} \delta^4\left(\mathcal{P}_i^2 + m_i^2\right) d^4\mathcal{P}_i =$$

$$= \underbrace{\int \dots \int}_{3n} \delta^3\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E_0\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2E_i}, \qquad (24.2)$$

где $\mathcal{P}_0 = \{\mathbf{p}_0, iE_0\} = \mathcal{P}_{01} + \mathcal{P}_{02} = \{\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02}\ \ i(E_{01} + E_{02})\}$ — 4-импульс начального состояния.

Примем также это предположение, хотя глубоких оснований для него, как отмечено в § 22, нет. Наиболее веский довод в пользу релятивистски инвариантного фазового объема — это относительная простота вычислений, обусловленная релятивистской инвариантностью выражения (24.2). В частности, для этого выражения существует простое рекуррентное соотношение, впервые полученное в работе [36]. Для его вывода запишем выражение (24.2) в $Ц$-системе $\left(E_c = \sqrt{E_0^2 - p_0^2}\right)$, выделив интегрирование по импульсу одной из частиц (для определенности n-й частицы):

$$R_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, m_2, \dots, m_n) = R_n(0, E_c; m_1, m_2, \dots, m_n) =$$

$$= \underbrace{\int \dots \int}_{3n} \delta^3\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^*\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i^* - E_c\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{p}_i^*}{2E_i^*} =$$

$$= \int\int\int \frac{d^3\mathbf{p}_n^*}{2E_n^*} \left\{ \underbrace{\int \dots \int}_{3(n-1)} \delta^3\left[\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i^* - (-\mathbf{p}_n^*)\right] \delta\left[\sum_{i=1}^{n-1} E_i^* - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (E_c - E_n^*)\right] \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3\mathbf{p}_i^*}{2E_i^*} \right\}. \qquad (24.3)$$

Выражение в фигурных скобках в последней строчке равенства (24.3) представляет собой по определению фазовый объем для $n-1$ частицы

$$\underbrace{\int \dots \int}_{3(n-1)} \delta^3\left[\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i^* - (-\mathbf{p}_n^*)\right] \delta\left[\sum_{i=1}^{n-1} E_i^* - (E_c - E_n^*)\right] \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3\mathbf{p}_i^*}{2E_i^*} =$$

$$= R_{n-1}(-\mathbf{p}_n^*,\ E_c - E_n^*;\ m_1, m_2, \dots m_{n-1}) =$$

$$= R_{n-1}(0, \varepsilon; m_1, m_2, \dots m_{n-1}), \qquad (24.4)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{(E_c - E_n^*)^2 - p_n^{*2}}. \qquad (24.5)$$

Последнее равенство в (24.4) получено в результате перехода в систему центра инерции $n-1$ частицы. Подставляя затем выражение (24.4) в соотношение (24.3), получаем нужную рекуррентную формулу:

$$R_n(0, E_c; m_1, m_2, \dots, m_n) =$$

$$= \int\int\int R_{n-1}(0, \varepsilon; m_1, m_2, \dots m_{n-1}) \frac{d^3\mathbf{p}_n^*}{2E_n^*}. \qquad (24.6)$$

В формуле (24.6) удобно перейти к полярным координатам

$$d^3\mathbf{p}_n^* = p_n^{*2}\, dp_n^* \cdot \sin\vartheta_n^*\, d\vartheta_n^*\, d\varphi_n^* \qquad (24.7)$$

и проинтегрировать по углам, что дает множитель 4π. Тогда выражение (24.6) приводится к виду

$$R_n(0, E_c; m_1, m_2, \dots, m_n) =$$

$$= 2\pi \int_0^{p_n^{*\,(\text{макс})}} R_{n-1}(0, \varepsilon; m_1, m_2, \dots, m_{n-1}) \frac{p_n^{*2}}{E_n^*}\, dp_n^*. \qquad (24.6')$$

Верхний предел интегрирования в этом выражении равен максимальному значению импульса p_n^*, которое реализуется, когда остальные $n-1$ частиц движутся с одинаковыми скоростями в направлении, противоположном $\mathbf{p}_n^*$ [см. § 26, формула (26.8)]

$$p_n^{*\,(\text{макс})} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left\{E_c^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2\right\}\left\{E_c^2 - \left|\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) - 2m_n\right|^2\right\}}}{2E_c}. \qquad (24.7')$$

Приведем несколько частных случаев $R_n(0, E_c; m_1, m_2, \dots, m_n)$ Формально, согласно выражениям (24.2) или (24.3), фазовый объем для одной частицы, определенный в системе ее покоя,

$$R_1(0, E_c; m_1) =$$

$$= \int\int\int \delta^3(\mathbf{p}_1^*)\, \delta(E_1^* - E_c) \frac{d^3\mathbf{p}_1^*}{2E_1^*} = \frac{\delta(m_1 - E_c)}{2m_1}. \qquad (24.8)$$

Подставляя далее это значение в рекуррентную формулу (24.6') находим фазовый объем для двух частиц

$$R_2(0, E_c; m_1, m_2) = 2\pi \int_0^{p_2^{*\,(\text{макс})}} \frac{\delta\left[m_1 - \sqrt{(E_c - E_2^*)^2 - p_2^{*2}}\right]}{2m_1} \frac{p_2^{*2}\, dp_2^*}{E_2^*}. \qquad (24.9)$$

Для вычисления выражения (24.9) воспользуемся формулой (7.5) для δ-функции от сложного аргумента, тогда

$$\delta\left[m_1 - \sqrt{(E_c - E_2^*)^2 - p_2^{*2}}\right] = \frac{m_1 E_2^{*(\text{макс})}}{E_c\, p_2^{*(\text{макс})}}\,\delta\left[p_2^* - p_2^{*(\text{макс})}\right],$$

и окончательно получаем

$$R_2(0, E_c; m_1, m_2) = \pi \frac{p_2^{*(\text{макс})}}{E_c} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{\left[E_c^2 - (m_1+m_2)^2\right]\left[E_c^2 - (m_1-m_2)^2\right]}}{E_c^2}. \qquad (24.9')$$

С помощью рекуррентной формулы аналогично вычисляется и фазовый объем для трех частиц:

$$R_3(0, E_c; m_1, m_2, m_3) = \pi^2 \int_0^{p_3^{*(\text{макс})}} \frac{p_3^{*2}}{E_3^*} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\left[(E_c - E_3^*)^2 - p_3^{*2} - (m_1+m_2)^2\right]\left[(E_c - E_3^*)^2 - p_3^{*2} - (m_1-m_2)^2\right]}}{(E_c - E_3^*)^2 - p_3^{*2}}\, dp_3^*, \qquad (24.10)$$

где

$$p_3^{*(\text{макс})} = \frac{\sqrt{\left[E_c^2 - (m_1+m_2+m_3)^2\right]\left[E_c^2 - (m_1+m_2-m_3)^2\right]}}{2E_c}. \qquad (24.11)$$

Выражение (24.10) путем громоздких выкладок сводится к эллиптическим интегралам. При $n > 3$ аналитически вычислить $R_n(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ уже не удается, и в связи с этим были предложены различные методы получения приближенных выражений [37, 42, 48, 49]. Для оценок полезно иметь выражения $R_n(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ в двух предельных случаях — ультрарелятивистском и нерелятивистском. Для ультрарелятивистского случая [см. формулу (23.2)]

$$R_n^{\text{у·р}}(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{E_c^{2n-4}}{(n-1)!\,(n-2)!}. \qquad (24.12)$$

В нерелятивистском приближении произведение $\prod_{i=1}^{n} 1/2E_i$ в выражении (24.2) можно представить в виде:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2E_i} \approx \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i} \qquad (24.13)$$

и вынести из-под знака интеграла, тогда оставшийся интеграл будет представлять собой неинвариантный фазовый объем, который в этом приближении неоднократно вычислялся [см. формулу (23.4)]. В результате получаем

$$R_n^{\text{н·р}}(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n) =$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}(n-1)}}{\Gamma\left[\frac{3}{2}(n-1)\right]} \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{3/2}} \left[E_c - \sum_{i=1}^{n} m_i\right]^{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}. \qquad (24.14)$$

После этих замечаний о релятивистски инвариантном фазовом объеме обратимся к основной задаче — вычислению на основе выражения (24.2) распределения по эффективной массе $\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}$. Согласно принятым допущениям, вероятность того или иного «фонового» конечного состояния, которое в нашем случае характеризуется набором 4-импульсов $\mathcal{P}_i^*$, пропорциональна соответствующему фазовому объему, и, следовательно*,

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}} = F(\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}) = \frac{1}{R_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)} \times$$

$$\times \frac{dR_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)}{d\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}} = \frac{2\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}}{R_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)} \times$$

$$\times \frac{dR_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)}{d\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}^2}. \qquad (24.15)$$

Обозначив через

$$\mathcal{P}_{1\,2\,\ldots\,k} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i = \left\{\mathbf{p}_{1\,2\,\ldots\,k},\ \mathbf{i}E_{1\,2\,\ldots\,k}\right\} \qquad (24.16)$$

суммарный 4-импульс k частиц и введя в выражение (24.2) дополнительную δ-функцию, запишем:

$$\frac{dR_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)}{d\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}^2} =$$

$$= \underbrace{\int\ldots\int}_{4n} \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_0\right)\delta\left(\mathcal{P}_{1\,2\,\ldots\,k}^2 + \mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}^2\right)\prod_{i=1}^{n}\delta\left(\mathcal{P}_i^2 + m_i^2\right)d^4\mathcal{P}_i. \qquad (24.17)$$

* В приложениях нередко используется и распределение по квадрату эффективной массы $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\mathfrak{M}_{1\,2,\ldots,\kappa}^2}$. Связь между обоими распределениями очевидна:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\mathfrak{M}_{1\,2\ldots,\,k}^2} = \frac{1}{2\mathfrak{M}_{1\,2\ldots,\,k}}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\mathfrak{M}_{1\,2,\ldots,\,k}}.$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся свойством δ-функции

$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a), \tag{24.18}$$

из которого вытекает соотношение

$$\delta^4\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_0\right) =$$

$$= \int\int\int\int d^4\mathcal{P}_{1\,2\,\ldots\,k}\,\delta^4\left(\sum_{i=1}^{k}\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{1\,2\,\ldots\,k}\right)\delta^4\left[\left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{1\,2\,\ldots\,k}\right) - \mathcal{P}_0\right], \tag{24.19}$$

и, следовательно,

$$\frac{dR_n(\mathbf{p}_0, E_0; m_1, \ldots, m_n)}{d\mathfrak{M}^2_{1\,2\,\ldots\,k}} =$$

$$= \left\{\underbrace{\int\ldots\int}_{4\,(n-k+1)}\delta^4\left[\left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{12\,\ldots\,k}\right) - p_0\right]\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=k+1}^{n}\delta\left(n_i^2 + m_i^2\right)d^4n_i\,\delta\left(n^2_{1\,2\,\ldots\,k} + \mathfrak{M}^2_{1\,2\,\ldots\,k}\right)d^4n_{1\,2\,\ldots\,k}\right\}\times$$

$$\times\left\{\underbrace{\int\ldots\int}_{4k}\delta^4\left(\sum_{i=1}^{k}\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{12\,\ldots\,k}\right)\prod_{i=1}^{k}\delta\left(\mathcal{P}_i^2 + m_i^2\right)d^4\mathcal{P}_i\right\} =$$

$$= R_{n-k+1}(\mathbf{p}_0, E_0; m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_n, \mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k})\times$$

$$\times R_k(\mathbf{p}_{12\,\ldots\,k}, E_{12\,\ldots\,k}; m_1, m_2, \ldots, m_k). \tag{24.20}$$

Подставляя это выражение в формулу (24.15), приходим к искомой формуле для $F(\mathfrak{M}_{12\,\ldots\,k})$, причем для удобства записи здесь можно воспользоваться преимуществом релятивистски инвариантного фазового объема и представить * R_n и R_{n-k+1} в $Ц$-системе всей реакции, а R_k — в системе центра инерции выбранных k частиц:

$$F(\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}) =$$

$$= 2\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}\frac{R_{n-k+1}(0, E_c; m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_n, \mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k})}{R_n(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n)}\times$$

$$\times R_k(0, \mathfrak{M}_{12\ldots k}; m_1, m_2, \ldots, m_k). \tag{24.21}$$

Физический смысл формулы (24.21) ясен: а) множитель R_{n-k+1} описывает вероятность того, что при полной энергии E_c осуществится конечное состояние с $n-k+1$ частицей, среди которых на равных основаниях фигурируют $n-k$ обычных частиц с массами m_{k+1}, $m_{k+2}, \ldots, m_n$ и одна «эффективная частица» с массой $\mathfrak{M}_{12\,\ldots\,k}$, представляющая выбранную совокупность k частиц; б) множитель R_k описывает внутреннее состояние эффективной частицы и пропорционален числу способов, которыми из частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ можно образовать эффективную частицу с заданной массой $\mathfrak{M}_{12\,\ldots\,k}$; в) множитель $1/R_n$ введен для нормировки

$$\int\limits_{\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\,\ldots\,k}}^{\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\,\ldots\,k}} F(\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k})\,d\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k} = 1 \tag{24.22}$$

и в расчетах нередко опускается. Заметим, что, подставляя правую часть (24.21) в условие нормировки (24.22), получаем

$$R_n(0, E_c; m_1, m_2, \ldots, m_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\,\ldots\,k}}^{\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\,\ldots\,k}} R_{n-k+1}(0, E_c; m_{k+1}, \ldots, m_n, \mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k})\times$$

$$\times R_k(0, \mathfrak{M}_{12\,\ldots\,k}; m_1, \ldots, m_k)\,d\mathfrak{M}^2_{1\,2\,\ldots\,k}, \tag{24.23}$$

которое представляет собой обобщение рекуррентной формулы (24.6′) и также используется для вычисления фазовых объемов.

Величина $\mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k}$ изменяется в интервале

$$\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{1\,2\,\ldots\,k} \leqslant \mathfrak{M}_{1\,2\,\ldots\,k} \leqslant \mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\,\ldots\,k}, \tag{24.24}$$

причем минимальное значение эффективной массы реализуется, когда в $Ц$-системе k частиц (системе покоя эффективной частицы) все они покоятся

$$\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\,\ldots\,k} = \sum_{i=1}^{k} m_i, \tag{24.25}$$

а максимальное значение — когда остальные $n-k$ частиц и эффективная частица покоятся в $Ц$-системе реакции, т. е. $Ц$-системе n частиц, и вся возможная кинетическая энергия в этой системе трансформируется в эффективную массу

$$\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\,\ldots\,k} = E_c - \sum_{i=k+1}^{n} m_i. \tag{24.26}$$

Очевидно, что предельные точки (24.25) и (24.26) соответствуют энергетическим порогам фазовых объемов R_k и R_{n-k+1}, и для последних

* Для краткости мы иногда будем опускать аргументы у фазовых объемов.

вблизи этих точек можно пользоваться нерелятивистской формулой (24.12)

$$R_k\big|_{\mathfrak{M}_{12\ldots k}\to\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}} \sim \left(\mathfrak{M}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}\right)^{\frac{3}{2}k-\frac{5}{2}}; \quad (24.27)$$

$$R_{n-k+1}\big|_{\mathfrak{M}_{12\ldots k}\to\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}} \sim \left(\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}_{12\ldots k}\right)^{\frac{3}{2}(n-k)-1}. \quad (24.28)$$

Следовательно, распределение $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ имеет характерный вид кривой с одним максимумом (рис. 33), обращаясь в нуль в предель-

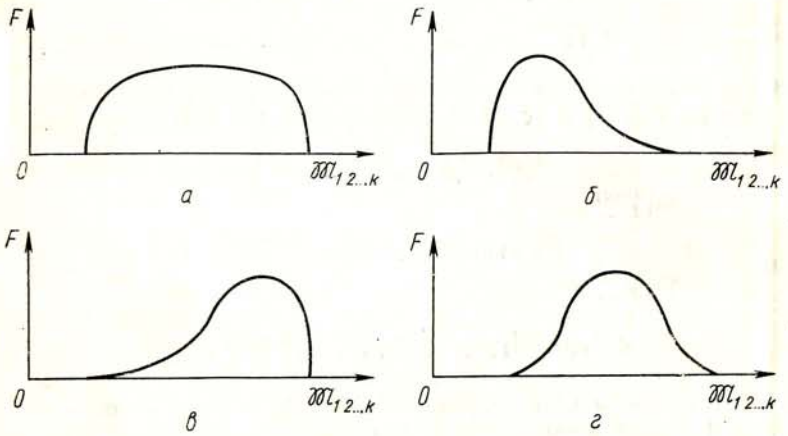


Рис. 33. Типы кривых распределений по эффективным массам [50]: $а-n=3,\ \kappa=2$; $б-n\geqslant 4,\ \kappa=2$; $в-n\geqslant 4,\ \kappa=n-1$; $г-n\geqslant 5,3<\kappa\leqslant n-1$.

ных точках. Кривые $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ по форме можно качественно разделить на четыре класса [50] в зависимости от поведения производной

$$\frac{dF(\mathfrak{M}_{12\ldots k})}{d\mathfrak{M}_{12\ldots k}}=\frac{1}{R_n}\left[\frac{dR_{n-k+1}}{d\mathfrak{M}_{12\ldots k}}R_k+R_{n-k+1}\frac{dR_k}{d\mathfrak{M}_{12\ldots k}}\right] \quad (24.29)$$

в предельных точках. Оценивая производные от фазовых объемов в предельных точках с помощью соотношений (24.27) и (24.28), легко убедиться, что

$$\frac{dR_k}{d\mathfrak{M}_{12\ldots k}}\bigg|_{\mathfrak{M}_{12\ldots k}=\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}}=\begin{cases}\infty & \text{при } k=2\\ 0 & \text{при } k>2\end{cases} \quad (24.30)$$

и

$$\frac{dR_{n-k+1}}{d\mathfrak{M}_{1\,2\ldots k}}\bigg|_{\mathfrak{M}_{1\,2\ldots k}=\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{1\,2\ldots k}}=\begin{cases}-\infty & \text{при } n-k+1=2\\ 0 & \text{при } n-k+1>2.\end{cases} \quad (24.31)$$

Таким образом, из соотношений (24.27)—(24.31) следует, что касательная к кривой $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ в предельных точках или перпендикулярна, или параллельна оси $\mathfrak{M}_{12\ldots k}$. Различные сочетания этих возможностей и дают разделение функций $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ на четыре класса, которые иллюстрируются рис. 33, заимствованным из работы [50].

Эту качественную оценку вида $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ можно продолжить, и, следуя работе Г. И. Копылова [51], получить приближенное выражение для $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$. Действительно, поскольку вблизи предельной точки (24.25) поведение $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ определяется в основном множителем R_k, т. е. формулой (24.27), а вблизи предельной точки (24.26) — множителем R_{n-k+1}, т. е. формулой (24.28), то можно допустить, что распределение $F(\mathfrak{M}_{12\ldots k})$ аппроксимируется функцией

$$F_{\text{апп}}(\mathfrak{M}_{1\,2\ldots k})=$$
$$=A\left(\mathfrak{M}_{1\,2\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{1\,2\ldots k}\right)^{\frac{3}{2}k-\frac{5}{2}}\left(\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{1\,2\ldots k}-\mathfrak{M}_{1\,2\ldots k}\right)^{\frac{3}{2}(n-k)-1}, \quad (24.32)$$

где A — нормировочный множитель, который определяется из условия (24.22)

$$A=\frac{\Gamma\left[\frac{3}{2}(n-1)\right]}{\Gamma\left[\frac{3}{2}(n-k)\right]\Gamma\left[\frac{3}{2}(k-1)\right]}\cdot\frac{1}{\left[\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}\right]^{\frac{3n-5}{2}}}. \quad (24.33)$$

Функция (24.32) обладает максимумом в точке

$$\mathfrak{M}^{(\text{вер})}_{12\ldots k}=\frac{3k-5}{3n-7}\left(\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}\right)+\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}, \quad (24.34)$$

причем ширина максимума (ширина при ординате, равной половине максимальной)

$$\delta\approx 2\left(\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}\right)\sqrt{\frac{2(3k-5)[3(n-k)-2]}{(3n-7)^3}}. \quad (24.35)^*$$

Заметим, что фигурирующая в формулах (24.33)—(24.35) разность максимальной и минимальной эффективных масс

$$\mathfrak{M}^{(\text{макс})}_{12\ldots k}-\mathfrak{M}^{(\text{мин})}_{12\ldots k}=E_c-\sum_{i=1}^{n}m_i=T_c, \quad (24.36)$$

т. е. равна суммарной кинетической энергии конечного состояния в $Ц$-системе.

* В работе [51] в формулу для δ, по-видимому, вкралась ошибка.

Как уже упоминалось, точные расчеты фазовых объемов требуют в общем случае большой вычислительной работы, поэтому предварительная качественная оценка кинематического «фона» и его

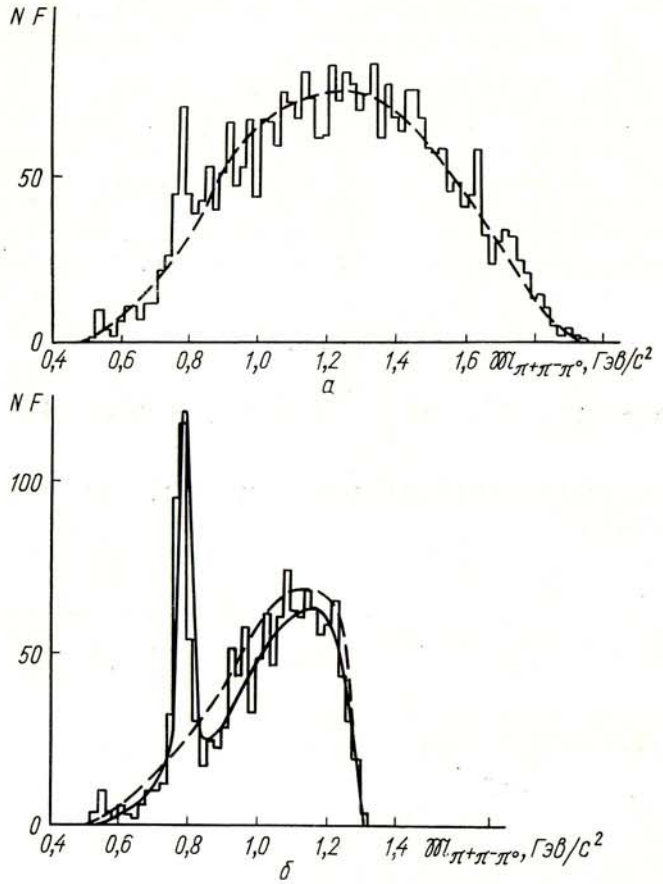


Рис. 34. Распределение по эффективной массе трех π-мезонов $\left(\mathfrak{M}_{\pi^+\pi^-\pi^0}\right)$ в различных реакциях. Наблюдаемый резонанс ω—мезон $\left(\mathfrak{M}_{\pi^+\pi^-\pi^0}^{(\text{рез})} = m_\omega\right)$.

$а$—$p+\tilde{p} \to n\pi^+ + n\pi^- + \pi^0$ ($n = 2$ или 3), при $p_{\tilde{p}}$=1,61 *Гэв/с* [52]; $б$—$K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ при $p_{K^-} = 2{,}45$ *Гэв/с* [53].

Пунктирные кривые—кинематический «фон», определяемый фазовым объемом, Сплошная кривая—сумма кинематического фона и формулы Брайта—Вигнера (Γ_ω=0,07 *Гэв*, α=0,21).

зависимость от различных параметров с помощью графиков рис. 33 и формул (24.32)—(24.36) на практике оказывается весьма полезной.

Итак, метод эффективной массы в изучении резонансов состоит в сравнении кинематического фона с экспериментальным распределением по эффективным массам и выделении в последнем пика, обусловленного резонансным взаимодействием выбранных k частиц. Большинство резонансов можно описать простой формулой Брайта—Вигнера:

$$F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}) = \frac{B}{\left(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k} - \mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}^{(\text{рез})}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \qquad (24.37)$$

где $\Gamma/2$ — полуширина резонанса; B — нормировочный множитель. Экспериментально наблюдаемое распределение в этом случае должно описываться суммой кинематического фона и формулы (24.37):

$$F_{\text{эксп}}(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}) = (1-\alpha)\,F(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}) + \alpha F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}), \qquad (24.38)$$

где α — относительный вклад резонансного взаимодействия. Подбирая кривую (24.38), наилучшим образом удовлетворяющую эксперименту, находят характеристики резонанса $\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}^{(\text{рез})}$, $\Gamma/2$ и α. Затем обычно случаи взаимодействия со значением эффективной массы вблизи $\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}^{(\text{рез})}$ отбирают для дальнейшего анализа (см. § 25).

В качестве примера на рис. 34 приведены распределения по эффективной массе трех π-мезонов ($\mathfrak{M}_{\pi^+\pi^-\pi^0}$), на которых четко проявляется резонанс — ω-мезон [52, 53].

При использовании метода эффективной массы нужно проявлять известную осторожность, имея в виду следующие обстоятельства:

1) не исключена возможность того, что кинематический фон невзаимодействующих частиц описывается релятивистски инвариантным фазовым объемом неточно;

2) в расчетах не учитывался закон сохранения момента;

3) если в реакции идентифицируются только заряженные частицы, то экспериментальный материал будет представлять смесь различных каналов реакции, отличающихся числом нейтральных частиц, и, следовательно, кинематический фон также будет суммой кривых с различными n. Вероятность различных каналов при этом нужно оценить достаточно аккуратно, так как в противном случае неучтенный вклад каналов с большим числом нейтральных частиц может имитировать резонансный пик, поскольку с ростом n максимум в распределении $F(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k})$ становится у́же и выше и сдвигается в сторону меньших значений $\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k}$;

4) может оказаться, что наряду с резонансом в группе из выбранных k частиц в реакции среди остальных $n-k$ частиц также образуется другой резонанс, присутствие которого, естественно, повлияет на распределение $F(\mathfrak{M}_{12\ \ldots\ k})$ (о некоторых частных случаях см. § 25);

5) при большой разнице между n и k число случайных комбинаций быстро возрастает и площадь фона значительно превышает площадь под резонансным пиком [α в формуле (24.38) мало], и, следовательно, для надежной идентификации резонанса нужно существенное увеличение статистики.

В заключение обратимся к понятию недостающей массы. Недостающей массой называется эффективная масса незарегистрированных нейтральных продуктов реакции, определяемая по измеренным кинематическим характеристикам заряженных продуктов реакции, природа которых считается установленной. Очевидно, что суммарная энергия и суммарный импульс всех нейтральных продуктов распада равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} E_{mis} &= E_0 - E^{(\pm)}; \\ \mathbf{p}_{mis} &= \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}^{(\pm)}, \end{aligned}\right\} \tag{24.39}$$

где $E^{(\pm)} = \sum E_i^{(\pm)}$; $\mathbf{p}^{(\pm)} = \sum \mathbf{p}_i^{(\pm)}$ — суммарная энергия и суммарный импульс заряженных частиц и, следовательно, недостающая масса

$$\mathfrak{M}_{mis} = \sqrt{E_{mis}^2 - p_{mis}^2}\,. \tag{24.40}$$

Если в реакции образуются только заряженные частицы, то недостающая масса близка к нулю*. Ввиду экспериментальных ошибок при этом может оказаться, что $E_{mis}^2 < p_{mis}^2$. В таком случае принято определять недостающую массу как

$$\mathfrak{M}_{mis} = -\sqrt{|E_{mis}^2 - p_{mis}^2|}\,. \tag{24.40'}$$

Если в реакции образуется только одна нейтральная частица, то недостающая масса совпадает с массой этой нейтральной частицы. Обычно в процессе идентификации измеренные величины $E_i^{(\pm)}$ и $\mathbf{p}_i^{(\pm)}$ пытаются варьировать так, чтобы значение $\mathfrak{M}_{mis}$ совпало с массой какой-либо нейтральной частицы (π^0, K°, n и т. д.), которую разумно ожидать в данной реакции. Если это удается сделать, то реакцию можно считать полностью идентифицированной.

Если же в реакции образуются две и больше нейтральных частиц, то $\mathfrak{M}_{mis}$ будет распределена в пределах от $\mathfrak{M}_{mis}^{(\text{мин})}$ до $\mathfrak{M}_{mis}^{(\text{макс})}$, которые определяются формулами (24.25) и (24.26), где k следует приравнять числу нейтральных частиц. В этом случае установить точно число нейтральных вторичных частиц нельзя.

Таким образом, вычисление недостающей массы позволяет разделить зарегистрированные события на три класса: 1) реакции без нейтральных вторичных частиц; 2) реакции с одной нейтральной вторичной частицей, природу которой можно установить, и 3) реакции с числом нейтральных вторичных частиц $\geqslant 2$.

События первых двух классов полностью и однозначно идентифицированы, поэтому их выделение существенно для дальнейшего анализа.

* Интерпретация экспериментального результата $\mathfrak{M}_{mis} \approx 0$ как образование нейтральной частицы с нулевой массой (γ-кванта или нейтрино) исключается, поскольку речь идет о процессах множественной генерации в результате сильного взаимодействия.

§ 25. РЕАКЦИИ С ТРЕМЯ ЧАСТИЦАМИ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ. ДИАГРАММЫ ДАЛИЦА

Основная идея метода эффективной массы (см. § 24) состоит в том, что по отклонению экспериментальных распределений от предсказываемых фазовым объемом можно судить о динамике взаимодействия, т. е. о матричном элементе $\langle f_0 | S | i_0 \rangle$. В частном случае $n = 3$ такой подход можно развить дальше и извлечь из экспериментальных данных более полную информацию о матричном элементе $\langle f_0 | S | i_0 \rangle$, построив вместо одномерных распределений по эффективной массе двумерные распределения — диаграммы Далица [54].

Для удобства рассмотрим задачу в $Ц$-системе. Вероятность перехода в конечное состояние — три частицы с импульсами $\mathbf{p}_1^*$, $\mathbf{p}_2^*$, $\mathbf{p}_3^*$ — равна [см. формулы (22.4) и (22.5)]

$$d^9 W_{if} =$$

$$= K |\langle f_0 | S | i_0 \rangle|^2 \delta^3\left(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{p}_i^*\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{3} E_i^* - E_c\right) \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3\mathbf{p}_i^*}{2E_i^*}, \tag{25.1}$$

где K — нормировочная константа. Матричный элемент $\langle f_0 | S | i_0 \rangle$ может зависеть только от релятивистских инвариантов, построенных из 4-импульса начального состояния $n_0^* = \{0, iE_c\}$ и 4-импульсов вторичных частиц $n_1^* = \{\mathbf{p}_1^*, iE_1^*\}$, $n_2^* = \{\mathbf{p}_2^*, iE_2^*\}$, $n_3^* = \{\mathbf{p}_2^*, iE_3^*\}$. Легко убедиться, что любой такой инвариант при фиксированном значении E_c выражается через энергии двух каких-либо вторичных частиц, например E_1^* и E_2^*. Действительно, рассмотрим инвариант $\mathcal{P}_i^* \mathcal{P}_j^* = \mathbf{p}_i^* \mathbf{p}_j^* - E_i^* E_j^* (i, j, k = 1, 2, 3)$. На основе закона сохранения импульса

$$\mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_j^* = -\mathbf{p}_k^* \tag{25.2}$$

можно написать преобразование

$$\mathbf{p}_i^* \mathbf{p}_j^* = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_j^*)^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i^{*2} + \mathbf{p}_j^{*2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_k^{*2} - \mathbf{p}_i^{*2} - \mathbf{p}_j^{*2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(E_k^{*2} - E_i^{*2} - E_j^{*2} + m_i^2 + m_j^2 - m_k^2) \tag{25.3}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P}_i^* \mathcal{P}_j^* = \frac{1}{2}\left[E_k^{*2} - (E_i^* + E_j^*)^2 + m_i^2 + m_j^2 - m_k^2\right]. \tag{25.4}$$

Инварианты $\mathcal{P}_0^* \mathcal{P}_i^*$ имеют еще более простой вид:

$$\mathcal{P}_0^* \mathcal{P}_i^* = -E_c E_i^*. \tag{25.5}$$

Таким образом, любой инвариант выражается через энергии E_1^*, E_2^*, E_3^*, а так как в силу закона сохранения

$$E_3^* = E_c - E_1^* - E_2^*, \tag{25.6}$$

то в конечном счете любой инвариант можно представить в виде функции только двух энергий E_1^* и E_2^*, и задание этих двух переменных полностью определяет конфигурацию импульсов в конечном состоянии, а квадрат матричного элемента можно представить в виде

$$|\langle f_0|S|i_0\rangle|^2 = M^2(E_1^*, E_2^*). \tag{25.7}$$

Найдем распределение вероятности по энергиям E_1^* и E_2^*. Для этого прежде всего проинтегрируем выражение (25.1) по $\mathbf{p}_3^*$, воспользовавшись «импульсной» δ-функцией,

$$d^6 W_{if} = KM^2(E_1^*, E_2^*)\,\frac{\delta\left(\sum_{i=1}^{3} E_i^* - E_c\right)}{2E_3^*}\cdot\frac{d^3\mathbf{p}_1^*}{2E_1^*}\cdot\frac{d^3\mathbf{p}_2^*}{2E_2^*}, \tag{25.8}$$

где E_3^* должна теперь рассматриваться как функция E_1^* и E_2^*. Далее перейдем к сферическим координатам, причем для интегрирования по $\mathbf{p}_1^*$ за ось z примем направление вектора $\mathbf{p}_2^*$, а для интегрирования по $\mathbf{p}_2^*$ — некое произвольное направление:

$$\left.\begin{aligned} d^3\mathbf{p}_1^* &= p_1^{*2}\,dp_1^*\,d\varphi_{12}^*\,d\cos\vartheta_{12}^*; \\ d^3\mathbf{p}_2^* &= p_2^{*2}\,dp_2^*\,d\varphi_2^*\,d\cos\vartheta_2^*. \end{aligned}\right\} \tag{25.9}$$

Заменим интегрирование по $\cos\vartheta_{12}^*$ с помощью равенства

$$p_3^{*2} = p_1^{*2} + p_2^{*2} + 2p_1^* p_2^* \cos\vartheta_{12}^* \tag{25.10}$$

интегрированием по p_3^*, тогда (при постоянных значениях p_1^* и p_2^*)

$$p_1^* p_2^*\,d\cos\vartheta_{12}^* = p_3^*\,dp_3^*. \tag{25.11}$$

Используя затем обычное соотношение

$$p_i^*\,dp_i^* = E_i^*\,dE_i^*,$$

перепишем произведение дифференциалов в виде

$$d^3\mathbf{p}_1^*\,d^3\mathbf{p}_2^* = E_1^* E_2^* E_3^*\,dE_1^*\,dE_2^*\,dE_3^*\,d\varphi_{12}^*\,d\varphi_2^*\,d\cos\vartheta_2^*, \tag{25.12}$$

где E_3^* — снова независимая переменная. Интегрируя по φ_{12}^*, φ_2^*, $\cos\vartheta_2^*$ и E_3^*, получаем окончательно

$$\frac{d^2 W_{if}}{dE_1^*\,dE_2^*} = \frac{KM^2(E_1^*, E_2^*)}{2^3}\int\delta\left(\sum_{i=1}^{3} E_i^* - E_c\right)dE_3^* \times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi_{12}^*\int_0^{2\pi} d\varphi_2^*\int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta_2^* = \pi^2 KM^2(E_1^*, E_2^*). \tag{25.13}$$

Диаграммой Далица (рис. 35, *а*) называется график в декартовой системе координат, по осям которой откладываются энергии E_1^* и E_2^* (практически чаще принято откладывать кинетические энергии $T_1^* = E_1^* - m_1$ и $T_2^* = E_2^* - m_2$). На этой диаграмме линии, где энергия третьей частицы $E_3^* = \text{const}$, представляют собой прямые $E_1^* + E_2^* = E_c - E_3^* = \text{const}$, идущие под углом 45° к осям координат. Экспериментальные случаи изобразятся на диаграмме Далица отдельными точками*, плотность которых согласно выражению (25.13) пропорциональна квадрату матричного элемента реакции:

$$\frac{d^2 N}{dE_1^*\,dE_2^*} = \text{const}\,M^2(E_1^*, E_2^*). \tag{25.14}$$

Фоновая плотность точек, когда вероятность W_{if} определяется только соответствующим фазовым объемом, следует из выражения (25.13) при $M^2(E_1^*, E_2^*) = \text{const}$, тогда и

$$\left.\frac{d^2 N}{dE_1^*\,dE_2^*}\right|_{\text{фон}} = \text{const}, \tag{25.15}$$

т. е. фазовый объем предсказывает равномерное распределение точек на диаграмме Далица. Это важнейшее свойство — одно из основных преимуществ метода диаграмм Далица: любое отклонение плотности экспериментальных точек от равномерного (разумеется, с учетом экспериментальных и статистических ошибок) означает определенное взаимодействие частиц в конечном состоянии.

В последнее время более широкое распространение получила несколько иная форма диаграммы Далица, когда по осям вместо энергий откладываются квадраты эффективных масс каких-либо двух (из трех возможных) парных комбинаций вторичных частиц, например $\mathfrak{M}_{23}^2$ и $\mathfrak{M}_{13}^2$ (см. рис. 35, *б*). Эти переменные очень просто связаны с энергиями E_1^* и E_2^*. Действительно, объединив кинематически две частицы в одну «эффективную», можно воспользоваться формулами

* Диаграммы подобного типа принято называть диаграммами рассеяния (scatter diagram), т. е. диаграмма Далица—это диаграмма рассеяния в переменных T_1^* и T_2^*.

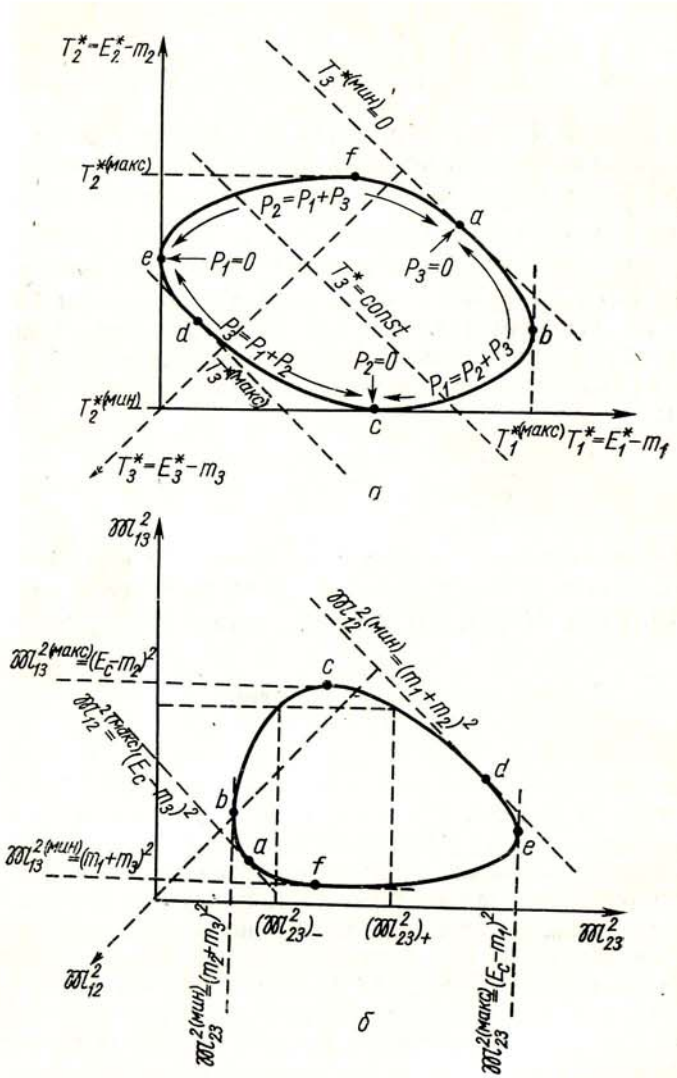


Рис. 35. Диаграмма Далица:
а — в переменных T_1^*, T_2^*; *б* — в переменных $\mathfrak{M}_{23}^2$, $\mathfrak{M}_{13}^2$.

для двухчастичных реакций [вторые части равенств (14.8)] и записать

$$\left.\begin{aligned} E_1^* &= \frac{E_c^2 + m_1^2 - \mathfrak{M}_{23}^2}{2E_c}; \\ E_2^* &= \frac{E_c^2 + m_2^2 - \mathfrak{M}_{13}^2}{2E_c}. \end{aligned}\right\} \tag{25.16}$$

Стало быть, переменные $\mathfrak{M}_{23}^2$ и $\mathfrak{M}_{13}^2$ линейно зависят от E_1^* и E_2^* и для них также справедливы основные свойства (25.14) и (25.15):

$$\frac{d^2N}{d\mathfrak{M}_{23}^2\, d\mathfrak{M}_{13}^2} = \text{const}\, M^2(\mathfrak{M}_{23}^2, \mathfrak{M}_{13}^2); \tag{25.17}$$

$$\left.\frac{d^2N}{d\mathfrak{M}_{23}^2\, d\mathfrak{M}_{13}^2}\right|_{\text{фон}} = \text{const}. \tag{25.18}$$

Полезно привести соотношение, связывающее квадраты эффективных масс трех возможных парных комбинаций вторичных частиц:

$$\mathfrak{M}_{12}^2 + \mathfrak{M}_{13}^2 + \mathfrak{M}_{23}^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) = E_c^2. \tag{25.19}$$

Это соотношение легко получить суммированием равенств (25.16) и аналогичного выражения для E_3^*. Заметим, что соотношение (25.19) представляет собой частный случай более общего соотношения, выражающего квадрат эффективной массы k частиц через квадраты эффективных масс возможных парных комбинаций:

$$\mathfrak{M}_{12\,\ldots\,k}^2 = \sum_{i<j} \mathfrak{M}_{ij}^2 - (k-2)\sum_{i=1}^{k} m_i^2. \tag{25.20}$$

Последнее соотношение легко получить, пользуясь определением (24.1). Очевидно, что в нашем случае $\mathfrak{M}_{123} \equiv E_c$.

Квадраты эффективных масс $\mathfrak{M}_{13}^2$, $\mathfrak{M}_{23}^2$ в качестве переменных удобнее тем, что они — релятивистские инварианты и могут вычисляться в любой системе координат. Законы сохранения ограничивают на диаграмме Далица определенную разрешенную область изменения переменных. Можно легко показать (совершенно так же, как это делается при выводе предельных соотношений — см. § 28), что на границе разрешенной области импульсы всех трех частиц колинеарны, так что абсолютная величина импульса одной из частиц равна сумме абсолютных величин импульсов двух других частиц:

$$p_i = p_j + p_k \tag{25.21}$$

[участки границы диаграммы Далица, соответствующие различным конкретным значениям (25.11), отмечены на рис. 35]. После несложных преобразований, сводящихся к последовательному возведению

в квадрат и перегруппировке членов, получаем из (25.21) уравнение границы диаграммы Далица сначала в переменных E_1^*, E_2^*:

$$4\,(E_1^{*2} - m_1^2)\,(E_2^{*2} - m_2^2) =$$

$$= \left[E_c^2 - 2E_c(E_1^* + E_2^*) + 2E_1^* E_2^* + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2\right]^2, \quad (25.22)$$

а после подстановки формул (25.16) — в переменных $\mathfrak{M}_{23}^2$, $\mathfrak{M}_{13}^2$:

$$\left[(E_c + m_1)^2 - \mathfrak{M}_{23}^2\right]\left[(E_c - m_1)^2 - \mathfrak{M}_{23}^2\right]\left[(E_c + m_2)^2 - \mathfrak{M}_{13}^2\right] \times$$

$$\times\left[(E_c - m_2)^2 - \mathfrak{M}_{13}^2\right] = \left[E_c^4 - E_c^2\,(\mathfrak{M}_{23}^2 + \mathfrak{M}_{13}^2 + m_1^2 + m_2^2 - 2m_3^2) -\right.$$

$$\left. - (\mathfrak{M}_{23}^2 - m_1^2)\,(\mathfrak{M}_{13}^2 - m_2^2)\right]^2. \quad (25.23)$$

Полезно найти решение этого уравнения относительно одной из переменных [8]:

$$(\mathfrak{M}_{ik}^2)_\pm = A\,(\mathfrak{M}_{jk}^2) \pm B\,(\mathfrak{M}_{jk}^2);$$

$$A\,(\mathfrak{M}_{jk}^2) = E_c^2 + m_j^2 - \frac{(E_c^2 + \mathfrak{M}_{jk}^2 - m_i^2)\,(\mathfrak{M}_{jk}^2 + m_j^2 - m_k^2)}{2\mathfrak{M}_{jk}^2};$$

$$B\,(\mathfrak{M}_{jk}^2) = \frac{1}{2\,\mathfrak{M}_{jk}^2}\sqrt{\left[(E_c + m_i)^2 - \mathfrak{M}_{jk}^2\right]\left[(E_c - m_i)^2 - \mathfrak{M}_{jk}^2\right]} \times$$

$$\times\sqrt{\left[\mathfrak{M}_{jk}^2 - (m_j + m_k)^2\right]\left[\mathfrak{M}_{jk}^2 - (m_j - m_k)^2\right]}. \quad (25.24)$$

Минимальное и максимальное значения переменной E_i^* (соответственно максимальное и минимальное значения переменной $\mathfrak{M}_{jk}^2$) реализуются соответственно при $p_i^* = p_i^{*(\text{мин})} = 0$ и при $p_i^* = p_i^{*(\text{макс})}$, которое определяется формулой (24.7) [см. также формулы (24.25) и (24.26)]:

$$\left.\begin{aligned} E_i^{*\,(\text{мин})} &= m_i; \\ E_i^{*\,(\text{макс})} &= \frac{E_c^2 + m_i^2 - (m_j + m_k)^2}{2E_c} \end{aligned}\right\} \quad (25.25)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{jk}^{2\,(\text{макс})} &= (E_c - m_i)^2; \\ \mathfrak{M}_{jk}^{2\,(\text{мин})} &= (m_j + m_k)^2. \end{aligned}\right\} \quad (25.26)$$

Проекции диаграммы Далица на координатные оси (в переменных $\mathfrak{M}_{23}^2$, $\mathfrak{M}_{13}^2$) дают одномерные распределения по эффективной массе $F(\mathfrak{M}_{23}^2)$ и $F(\mathfrak{M}_{13}^2)$.

В экспериментальной практике диаграммы Далица применяются для решения двух типичных физических задач:

1) обнаружения и изучения резонансного взаимодействия между двумя частицами из трех в конечном состоянии;

2) определения характеристик трехчастичного резонанса, обнаруженного в многочастичной реакции.

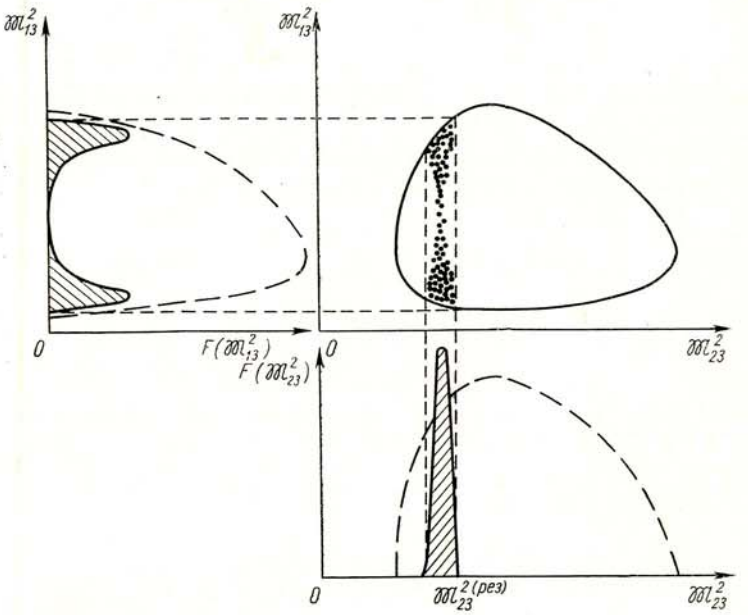


Рис. 36. Диаграмма Далица в случае резонансного взаимодействия между двумя частицами в одном канале.

В первом случае реакция идет в два этапа: сначала образуются две частицы, одна из которых — резонанс, распадающийся в свою очередь на две частицы:

$$a_{01} + a_{02} \to a_i + a_{jk}^* \to a_1 + a_2 + a_3. \quad (25.27)$$

Очевидно, что на диаграмме Далица при этом будет наблюдаться сгущение экспериментальных точек вдоль направления $\mathfrak{M}_{jk}^2 = \mathfrak{M}_{jk}^{(\text{рез})^2} = \text{const}$, т. е. в полосе, расположенной параллельно одной из осей координат или под углом 45° к ним — в зависимости от того, какая пара частиц испытывает резонансное взаимодействие. Для конкретности примем, что наблюдается резонанс a_{23}^* (рис. 36). Проекция диаграммы Далица на ось $\mathfrak{M}_{23}^2$ дает характерный резонансный пик, который может описываться, например, формулой Брайта — Вигнера [см. формулу (24.37)]:

$$F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{23}^2) = \frac{B}{\mathfrak{M}_{23}\left[(\mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{23}^{(\text{рез})})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right]}, \qquad (25.28)$$

которая нормируется на полное сечение σ_{23} образования резонанса a_{23}^*:

$$\int F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{23}^2)\, d\mathfrak{M}_{23}^2 = \sigma_{23}. \qquad (25.29)$$

Выясним теперь, как будет проявляться этот резонанс в проекции на ось $\mathfrak{M}_{13}^2$, т. е. в распределении $F(\mathfrak{M}_{13}^2)$ [8]. Вклад в это распределение, обусловленный резонансом a_{23}^*, обозначим через $F_{\text{отр}}(\mathfrak{M}_{13}^2)$. В системе покоя резонанса частица a_3 обладает энергией и импульсом [см. формулы (14.8) и (14.9)]:

$$\widetilde{E}_3 = \frac{\mathfrak{M}_{23}^2 + m_3^2 - m_2^2}{2\mathfrak{M}_{23}};$$

$$\widetilde{p}_3 = \frac{\sqrt{\left[\mathfrak{M}_{23}^2 - (m_2 + m_3)^2\right]\left[\mathfrak{M}_{23}^2 - (m_2 - m_3)^2\right]}}{2\mathfrak{M}_{23}} \qquad (25.30)$$

и вылетает под углом $\widetilde{\vartheta}_3$ к направлению движения резонанса, причем пусть угловое распределение

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\cos\widetilde{\vartheta}_3} = \psi(\cos\widetilde{\vartheta}_3) \qquad (25.31)$$

(предполагается азимутальная изотропия).

Эффективная масса [см. формулу (14.2′)]

$$\mathfrak{M}_{13}^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(E_1^* E_3^* - p_1^* p_3^* \cos\vartheta_{13}^*). \qquad (25.32)$$

Импульс резонанса a_{23}^* и импульс частицы a_1 направлены в противоположные стороны

$$\mathbf{p}_{23}^* = \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^* = -\mathbf{p}_1^*, \qquad (25.33)$$

и, следовательно, угол $\widetilde{\vartheta}_3$ и угол $\pi - \vartheta_{13}^*$ отсчитываются от одного направления и можно написать преобразование Лоренца [см. выражение (3.10′)]:

$$\left.\begin{aligned} p_3^*\cos(\pi - \vartheta_{13}^*) &= -p_3^*\cos\vartheta_{13}^* = \\ &= \gamma_{23}(\widetilde{p}_3\cos\widetilde{\vartheta}_3 + \beta_{23}\widetilde{E}_3); \\ E_3^* &= \gamma_{23}(\widetilde{E}_3 + \beta_{23}\widetilde{p}_3\cos\widetilde{\vartheta}_3), \end{aligned}\right\} \qquad (25.34)$$

где

$$\gamma_{23} = \frac{E_{23}}{\mathfrak{M}_{23}} = \frac{E_c^2 + \mathfrak{M}_{23}^2 - m_1^2}{2\mathfrak{M}_{23}^2} \qquad (25.35)$$

—лоренц-фактор резонанса a_{23}^* относительно $Ц$-системы; β_{23}—соответствующая скорость.

Подставляя выражения (25.16), (23.34) и (25.35) в формулу (25.32), после некоторых преобразований получаем

$$\mathfrak{M}_{13}^2 = A(\mathfrak{M}_{23}^2) + B(\mathfrak{M}_{23}^2)\cos\widetilde{\vartheta}_3, \qquad (25.36)$$

где выражения $A(\mathfrak{M}_{23}^2)$ и $B(\mathfrak{M}_{23}^2)$ определяются равенством (25.24). Заметим, что на границе разрешенной области диаграммы Далица $\cos\widetilde{\vartheta}_3 = \pm 1$ и выражение (25.36) совпадает с выражением (25.24). Следовательно,

$$d\mathfrak{M}_{13}^2 = B(\mathfrak{M}_{23}^2)\, d\cos\widetilde{\vartheta}_3 \qquad (25.37)$$

и, учитывая распределение (25.28), получаем, что вклад от резонанса a_{23}^* в распределение по эффективной массе другой пары частиц $\mathfrak{M}_{13}^2$

$$F_{\text{отр}}(\mathfrak{M}_{13}^2) = \int\limits_{(\mathfrak{M}_{23}^2)_-}^{(\mathfrak{M}_{23}^2)_+} F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{23}^2)\,\psi\left[\frac{\mathfrak{M}_{13}^2 - A(\mathfrak{M}_{23}^2)}{B(\mathfrak{M}_{23}^2)}\right]\frac{d\mathfrak{M}_{23}^2}{B(\mathfrak{M}_{23}^2)}, \qquad (25.38)$$

где $(\mathfrak{M}_{23}^2)_\pm$ определяются соотношением (25.24) для заданного $\mathfrak{M}_{13}^2$. Если резонанс достаточно узкий, то $F_{\text{рез}}(\mathfrak{M}_{23}^2)$ можно приближенно заменить δ-функцией, и тогда

$$F_{\text{отр}}(\mathfrak{M}_{13}^2) \approx \frac{1}{B(\mathfrak{M}_{23}^{(\text{рез})\,2})}\,\psi\left[\frac{\mathfrak{M}_{13}^2 - A(\mathfrak{M}_{23}^{(\text{рез})\,2})}{B(\mathfrak{M}_{23}^{(\text{рез})\,2})}\right] =$$

$$= \frac{2}{(\mathfrak{M}_{13}^2)_+ - (\mathfrak{M}_{13}^2)_-}\,\psi\left[\frac{2\mathfrak{M}_{13}^2 - (\mathfrak{M}_{13}^2)_+ - (\mathfrak{M}_{13}^2)_-}{(\mathfrak{M}_{13}^2)_+ - (\mathfrak{M}_{13}^2)_-}\right], \qquad (25.39)$$

где $(\mathfrak{M}_{13}^2)_\pm$ — максимальное и минимальное значения $\mathfrak{M}_{13}^2$ при $\mathfrak{M}_{23}^2 = \mathfrak{M}_{23}^{(\text{рез})\,2}$ [см. формулу (25.24)]. В случае, когда угловое распределение $\psi(\cos\widetilde{\vartheta}_3)$ анизотропно [например, $\psi(\cos\widetilde{\vartheta}_3) \sim \cos^{2k}\widetilde{\vartheta}_3$], распределение $F_{\text{отр}}(\mathfrak{M}_{13}^2)$ имеет характер, показанный на рис. 36.

Очень часто оказывается, что к одному и тому же конечному состоянию могут приводить несколько альтернативных каналов типа (25.27) с образованием различных двухчастичных резонансов, например

$$a_{01} + a_{02} \to \begin{cases} a_1 + a_{23}^* \\ a_2 + a_{13}^* \\ a_3 + a_{12}^* \end{cases} \to a_1 + a_2 + a_3. \qquad (25.40)$$

В этом примере на диаграмме Далица (рис. 37) наблюдаются соответственно три полосы сгущения экспериментальных точек, которые в общем случае могут пересекаться. В местах наложения одной полосы на другую простое сложение интенсивностей, вообще говоря, не имеет места, поскольку складываются амплитуды трех каналов реакции (25.40) и возникают интерференционные члены [55]. Если же интерференцией можно пренебречь, то распределение по эффек-

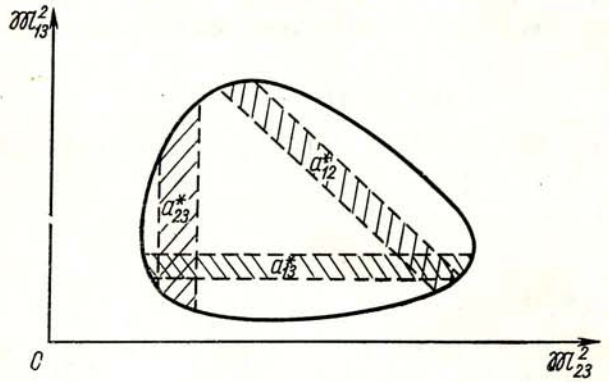


Рис. 37. Диаграмма Далица в случае резонансного взаимодействия между двумя частицами в трех каналах реакции.

тивной массе каждой парной комбинации вторичных частиц будет представлять собой сумму трех членов: резонансного распределения типа (25.28) и двух членов типа (25.38).

Обратимся теперь ко второй задаче — определению характеристик трехчастичного резонанса. Допустим, что в некоторой реакции с числом вторичных частиц $n > 3$ было построено распределение по эффективной массе и обнаружен резонанс (см. § 24, рис. 34). Затем отбираются только события вблизи $\mathfrak{M}^{(\text{рез})}_{123}$, и для них строится диаграмма Далица, с помощью которой по характеру отклонений от фазового объема определяются некоторые характеристики резонанса, в частности его спин и четность. Таким методом были исследованы, например, резонансы в системе трех π-мезонов, в частности ω-мезон [52] (по распаду $\omega \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$), данные о котором приведены на рис. 34. Рассмотрим подробнее этот частный случай трех тождественных частиц в конечном состоянии ($m_1 = m_2 = m_3 = m$). Ввиду тождественности частиц обычно принято использовать несколько модифицированную (по сравнению с описанными выше) диаграмму Далица, в которую энергии всех трех частиц входят симметрично [54, 55]; такой вариант диаграммы иногда называют диаграммой Далица — Фабри. Ее построение основано на элементарном геометрическом соотношении: если из произвольной точки

внутри равностороннего треугольника опустить на его стороны перпендикуляры h_1, h_2, h_3, то

$$a(h_1 + h_2 + h_3) = 2S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \tag{25.41}$$

или

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h, \tag{25.41'}$$

где a — сторона треугольника; h — высота; S — его площадь. Таким образом, если построить равносторонний треугольник с высотой $h = \mathfrak{M}^{(\text{рез})}_{123} - 3m = Q$ (определение величины Q см. в § 10), то

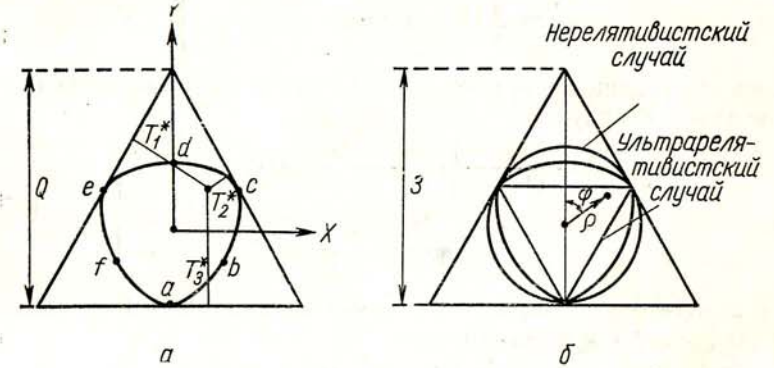


Рис. 38. Диаграмма Далица — Фабри:
а — в переменных X, Y; *б* — в переменных ρ, φ.

расстояния от произвольной точки внутри него до его сторон можно интерпретировать как значения кинетических энергий частиц * T^*_1, T^*_2, T^*_3, поскольку при таком построении закон сохранения энергии выполняется

$$T^*_1 + T^*_2 + T^*_3 = Q \tag{25.42}$$

и, следовательно, каждая точка внутри треугольника описывает определенную кинематическую ситуацию в системе трех частиц. Реально для построения диаграммы Далица — Фабри вводится декартова система координат с началом в центре треугольника (рис. 38, *а*):

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{T^*_1 - T^*_2}{\sqrt{3}}; \\ Y &= T^*_3 - \frac{Q}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{25.43}$$

* Обозначения со звездочкой здесь, как и в начале параграфа, относятся к величинам в $Ц$-системе резонанса.

Часто для уменьшения влияния флуктуаций в величине Q строят диаграмму Далица в безразмерных величинах, поделив X и Y на Q или $Q/3$. Для теоретических выкладок диаграмму Далица удобно представить также в полярных координатах. Для этого предварительно начертим далицевский треугольник в безразмерных единицах, поделив все линейные размеры на $Q/3$. Определяя затем ρ и φ, как показано на рис. 38, *б*, получаем

$$\left.\begin{aligned} T_1^* &= \frac{Q}{3}\left[1+\rho\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right];\\ T_2^* &= \frac{Q}{3}\left[1+\rho\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right];\\ T_3^* &= \frac{Q}{3}\left[1+\rho\cos\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (25.44)$$

Уравнение границы разрешенной области (25.23) в переменных ρ и φ приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned} &1-\left[1+\frac{2\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}\right]\rho^2-\frac{2\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}\rho^3\cos 3\varphi=0;\\ &\varepsilon=1-\frac{3m}{\mathfrak{M}_{123}^{(\text{рез})}}=\frac{Q}{\mathfrak{M}_{123}^{(\text{рез})}}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.45)$$

В нерелятивистском случае следует положить $\varepsilon = 0$ и уравнение (25.45) сводится к выражению

$$\rho^2 - 1 = 0, \qquad (25.45')$$

т. е. границей является окружность, вписанная в далицевский треугольник.

В ультрарелятивистском случае $\varepsilon = 1$ и уравнение (24.45) преобразуется к виду:

$$\left[1-2\rho\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[1-2\rho\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right][1-2\rho\cos\varphi]=0. \qquad (25.45'')$$

Уравнение (25.45″) распадается на уравнения трех прямых, образующих вписанный треугольник. Границы (25.45) вместе с предельными случаями (25.45′) и (25.45″) показаны на рис. 38, *б*. Треугольной диаграмме Далица — Фабри, очевидно, присущи те же свойства, что и обычной диаграмме Далица — распределение точек dN/dS по площади внутри граничной кривой пропорционально квадрату матричного элемента, а кинематический фон описывается равномерным распределением.

Из самых общих требований симметрии и инвариантности, которые налагаются на матричный элемент распада на три частицы, следует, что при заданных значениях изотопического спина I, спина J и четности P в определенных местах диаграммы Далица —

Фабри плотность dN/dS обращается в нуль. Например, если конечное состояние трех частиц описывается антисимметричной пространственной волновой функцией, то матричный элемент обращается в нуль везде, где две частицы обладают одинаковыми импульсами

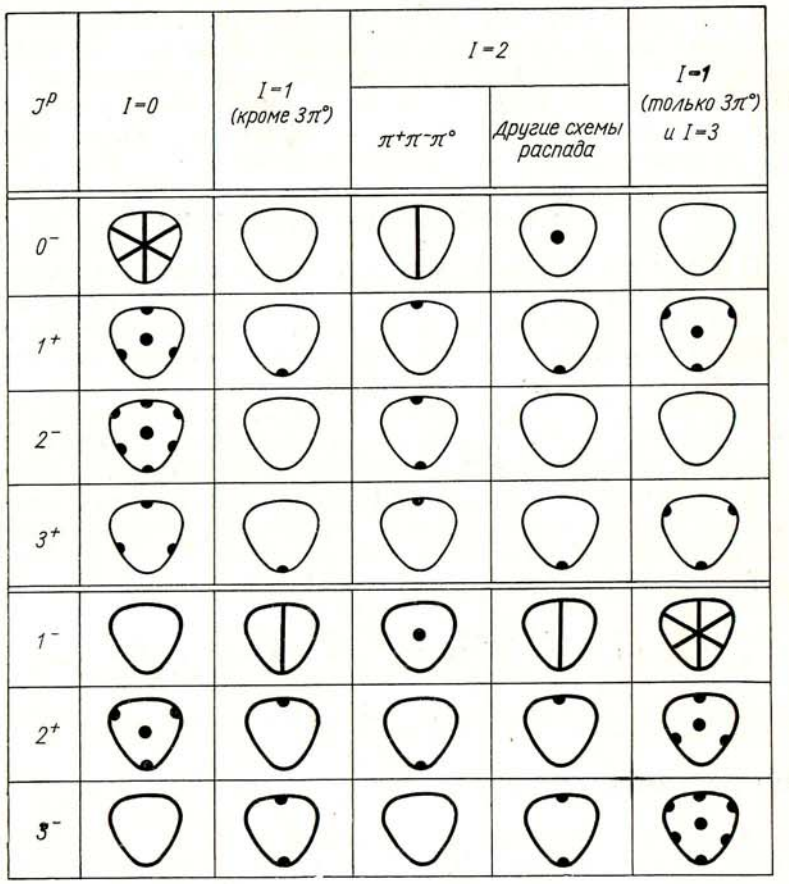


Рис. 39. Места на диаграмме Далица (отмечены жирными линиями и точками), где матричный элемент распада частицы на три псевдоскалярных мезона обращается в нуль. Для конечного состояния (π^+, π^-, π^0) принято, что $E_1 = E_{\pi^+}$, $E_2 = E_{\pi^-}$, $E_3 = E_{\pi^0}$.

(т. е. в точках *a*, *c*, *e* на рис. 38, *а*). Другой пример: если матричный элемент пропорционален сумме векторных произведений трехмерных импульсов $\Sigma \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{p}_j^*$, то он обращается в нуль, когда все три вторичные частицы колинеарны, т. е. на границе разрешенной области. Подробный анализ этого вопроса проведен в работе [56] для случая распада на три псевдоскалярных мезона при различных значениях

I, J и P (рис. 39). Таким образом, на диаграмме Далица должна наблюдаться симметричная картина распределения плотности dN/dS, характерная для заданных I, J и P. Как пример применения описанной методики приведем уже упоминавшуюся работу [52], в которой изучался ω-мезон. Так как в распределении по эффективной массе трех π-мезонов (см. рис. 34) резонансный пик наблюдался только для комбинации $(\pi^+\pi^-\pi^\circ)$, был сделан вывод, что изотопический спин $I = 0$. Сделав далее определенные предположения о виде матричного элемента и сравнив теоретическое и экспериментальное распределения плотности dN/dS по диаграмме Далица — Фабри, авторы установили спин и четность ω-мезона ($J^P = 1^-$).

§ 26. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В общем случае можно получить два предельных соотношения: для максимального импульса данной частицы с массой m_1 в $Ц$-системе и для максимального угла вылета этой частицы в $Л$-системе. Ясно, что второе соотношение в значительной степени определяется первым.

Определение предельных импульсов в $Ц$-системе. Импульс частицы имеет максимальное значение, если все остальные частицы 2, 3, ..., n летят по направлению, обратному направлению движения частицы 1. Это обстоятельство существенно упрощает последующее рассмотрение, поскольку вместо векторных величин можно рассматривать скалярные.

Так как энергия и импульс частицы 1 имеют следующие значения:

$$E_1^* = E_{01}^* + E_{02}^* - \sum_{i=2}^{n} E_i^* = \sqrt{s} - \sum_{i=2}^{n} E_i^*;$$

$$p_1^* = \sum_{i=2}^{n} p_i^*,$$

то ее скорость

$$\beta_1^* = \frac{p_1^*}{E_1^*} = \frac{\sum_{i=2}^{n} p_i^*}{\sqrt{s} - \sum_{i=2}^{n} E_i^*}. \qquad (26.1)$$

Найдем максимальное значение этой величины при условии

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^* = \sqrt{s}, \qquad (26.2)$$

т. е. решим задачу на нахождение условного экстремума. Следуя методу Лагранжа, будем искать абсолютный экстремум выражения

$$K = \beta_1^* + \lambda \sum_{i=1}^{n} E_i^*, \qquad (26.3)$$

где λ — множитель, который будет определен впоследствии.

Экстремум функции K определяется системой уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial p_j^*} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \qquad (26.4)$$

Поскольку $\partial E_j^*/\partial p_j^* = \beta_j^*$, то эту систему можно переписать в форме

$$\frac{1}{\sqrt{s} - \sum_{i=2}^{n} E_i^*} + \frac{\beta_j^* \sum_{i=2}^{n} p_i^*}{\left(\sqrt{s} - \sum_{i=2}^{n} E_i^*\right)^2} + \lambda \frac{\sum_{i=2}^{n} p_i^*}{\sqrt{s} - \sum_{i=2}^{n} E_i^*} = 0. \qquad (26.5)$$

Здесь величина λ должна удовлетворять всем $n - 1$ уравнениям. Это возможно лишь в том случае, если все уравнения тождественны, т. е. если выполняется условие

$$\beta_2^* = \beta_3^* = \ldots = \beta_N^*. \qquad (26.6)$$

Приведенный метод доказательства этого соотношения принадлежит Штернхеймеру [57]. Из условия (26.6) следует, что для экстремального случая частицы 2, 3, ..., n эквивалентны одной частице с массой $\sum_{i=2}^{n} m_i$. Тогда определение максимального импульса частицы сводится к случаю двух частиц в конечном состоянии, соответственно к формулам (9.7):

$$E_{1\,\text{макс}}^* = \frac{s + m_1^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} m_i\right)^2}{2\sqrt{s}} \qquad (26.7)$$

и

$$p_{1\,\text{макс}}^* = \frac{\sqrt{\left[s - \left(\sum_{i=2}^{n} m_i + m_1\right)^2\right]\left[s - \left(\sum_{i=2}^{n} m_i - m_1\right)^2\right]}}{2\sqrt{s}}. \qquad (26.8)$$

В более общей форме эта задача формулируется для случая, когда импульсы первых d частиц (1, 2, ..., d) заданы. Тогда максимальный импульс $(d + 1)$-й частицы направлен противоположно суммарному импульсу $\mathbf{p}_\Sigma^* = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{p}_i^*$, а его величина определяется из соотношений

$$p_{d+1}^* = p_\Sigma^* + \sum_{i=d+2}^{n} p_i^*; \qquad (26.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^* = s. \qquad (26.10)$$

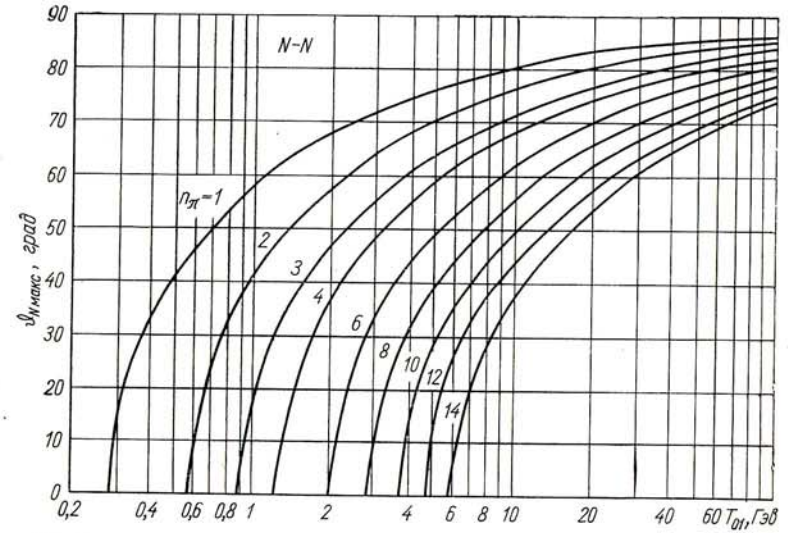


Рис. 40. Зависимость максимального угла вылета $\vartheta_{N\,макс}$ нуклона отдачи в нуклон-нуклонных соударениях от энергии T_{01} налетающего нуклона для различных значений полного числа n_π генерированных π-мезонов.

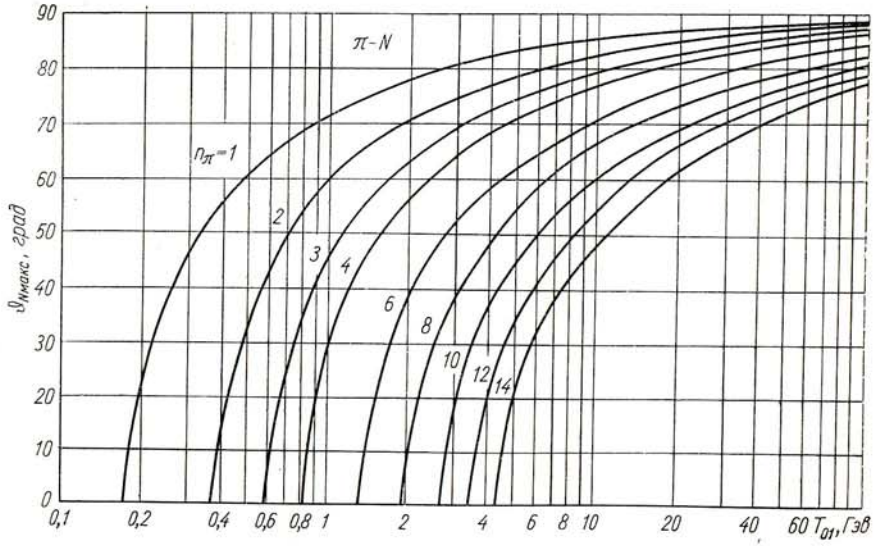


Рис. 41. Зависимость максимального угла вылета $\vartheta_{N\,макс}$ нуклона отдачи в π-мезон-нуклонных соударениях от энергии T_{01} налетающего π-мезона для различных значений полного числа n_π генерированных π-мезонов.

Определение экстремальных углов в $Л$-системе. Переходя к вычислению экстремальных углов $\vartheta_{макс}$ в $Л$-системе, заметим прежде всего, что $\vartheta_{макс}$ увеличивается при возрастании p^*, исключая случай, когда этот угол достигает предельного значения $\pi/2$. Поэтому экстремальный угол соответствует $p^*_{макс}$ и определяется соотношениями (25.8) и соотношением (5.12), которое удобно представить в форме

$$\sin\vartheta_{1\,макс} = \sqrt{\frac{1-\beta_c^2}{\left(\frac{\beta_c}{\beta_1^*}\right)^2-\beta_c^2}}. \qquad (26.11)$$

Подставляя значение скорости β_1^* из уравнения (25.1), окончательно получаем

$$\vartheta_{1\,макс} = \arcsin\sqrt{\frac{(1-\beta_c^2)\,D}{4sm_1^2\beta_c^2}}, \qquad (26.12)$$

где

$$D=\left[s-\left(\sum_{i=2}^{n}m_i+m_1\right)^2\right]\left[s-\left(\sum_{i=2}^{n}m_i-m_1\right)^2\right]. \qquad (26.13)$$

На рис. 40—43 приведены максимальные углы и максимальные энергии для π — N- и N — N-столкновений различных энергий.

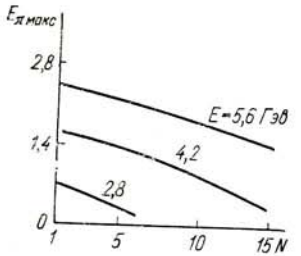


Рис. 42. Максимальная энергия $E^*_{\pi макс}$ π-мезона, образованного в нуклон-нуклонных соударениях, в которых генерируется n_π π-мезонов [58]. Числа около кривых обозначают полную энергию первичных нуклонов в $Ц$-системе.

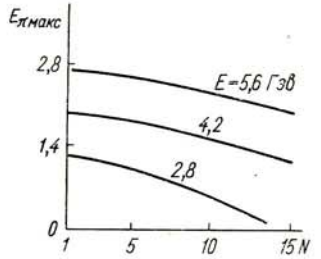


Рис. 43. Максимальная энергия $E^*_{\pi макс}$ π-мезона, образованного в π-мезон-нуклонных соударениях, в которых генерируется n_π π-мезонов [58]. Числа около кривых обозначают полную энергию первичных π-мезонов в $Ц$-системе.

При выводе выражения (26.11), а следовательно, и (26.12) предполагалось, что в $Ц$-системе осуществляется вылет частиц под любыми углами; однако в принципе возможен случай (он осуществляется при столкновении частиц достаточно больших энергий $\sqrt{s}$), когда

угловое распределение вторичных частиц в $Ц$-системе существенно анизотропно и, следовательно, в $Ц$-системе также есть экстремальный угол $\vartheta^*_{\text{экст}}$. Выпишем соответствующий угол в $Л$-системе, предполагая, что в $Ц$-системе разлет осуществляется симметрично относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения частиц. В этом случае $\vartheta_{\text{макс}}$ соответствует частицам, движущимся под экстремальным углом в задней полусфере в $Ц$-системе:

$$\vartheta'_{\text{макс}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\gamma_c} \cdot \frac{\sin \vartheta^*_{\text{экст}}}{\cos \vartheta^*_{\text{экст}} + \beta_c \Big/ \sqrt{\dfrac{D}{D + 4sm_1^2}}}. \qquad (26.14)$$

Несколько иная задача возникает в том случае, если измерены импульсы многих вторичных частиц. Рассмотрим случай, когда известны импульсы всех вторичных частиц, кроме одной с номером 1, для которой необходимо определить максимальный угол.

Уравнение сохранения можно для этого случая записать в форме

$$E_{01} - p_{01} + m_{02} = \sum_{i=2}^{n} (E_i - p_i \cos \vartheta_i) + (E_1 - p_1 \cos \vartheta_1). \qquad (26.15)$$

Если $m_{02} \neq 0$ и энергия E_{01} достаточно велика, то член $E_{01} - p_{01} \ll m_{02}$ и им можно пренебречь. Тогда

$$p_1 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \left[F \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{F^2 - m_1^2 \sin^2 \vartheta_1} \right], \qquad (26.16)$$

где

$$F = m_{02} - \sum_{i=2}^{n} (E_i - p_i \cos \vartheta_i), \qquad (26.17)$$

и, следовательно,

$$\vartheta_{1\ \text{макс}} = \arcsin \frac{F}{m_1}. \qquad (26.18)$$

Как и обычно, если $F/m_1 \geqslant 1$, то $\vartheta_{1\text{макс}} = \pi/2$. Этими соотношениями исчерпываются основные общие предельные связи для множественных процессов. Однако для частного механизма процессов с образованием трех частиц возможны дополнительные выводы. Таким механизмом являются последовательные акты с испусканием в каждом из них двух частиц, например $a_{01} + a_{02} \to a_1 + a_{23} \to a_1 + a_2 + a_3$. При таком механизме для одной из трех частиц (в данном случае a_1) импульс в $Ц$-системе максимален и потому сохраняется определенная связь между углом ее вылета и энергией в $Л$-системе, а по наличию такой связи можно сделать вывод о возникновении в ходе превращения промежуточного состояния a_{23}.

В общем случае, чтобы вернуться к простым уравнениям гл. 3, необходимо задать импульс одной из трех частиц, например a_3, и тогда для $E' = E_{01} - \sqrt{m_3^2 + p_3^2}$ и $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_{01} - \mathbf{p}_3$ будут справед-

ливы все записанные выше соотношения и можно построить эллипс импульсов p_1 и p_2 при фиксированном p_3. При этом, конечно, $Ц$-система уже не будет системой общего центра инерции, а лишь центром инерции частиц a_1 и a_2.

Применим соотношения распада на три частицы к конкретному примеру β-распада покоящегося ядра M ($\mathbf{p}_{01} = 0$) и найдем возможные значения импульсов электрона ($\mathbf{p}_e$) и нейтрино ($\mathbf{p}_\nu$) при заданном импульсе ядра отдачи $\mathbf{p}_я$, который может меняться от $p_{я.\ мин} = 0$ до некоего $p_{я.\ макс}$. Очевидно, что здесь $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}_я$ и $E' = \delta - T_я$, где $\delta = M - m_я$; $m_я$ и $T_я$ — масса и кинетическая энергия ядра отдачи. В системе центра инерции электрона и нейтрино полная энергия этих двух частиц $E'^* = \sqrt{(E')^2 - (p')^2} = \sqrt{\delta^2 - 2MT_я}$, а малая полуось эллипса согласно уравнению (9.8)

$$b = \frac{\delta^2 - m_e^2 - 2MT_я}{2\sqrt{\delta^2 - 2MT_я}}. \qquad (26.19)$$

Поскольку $b > 0$, ясно, что $T_{я.\ макс} = \dfrac{\delta^2 - m_я^2}{2M}$ и поэтому величина разности энергий начального и конечного ядер δ может быть определена по максимальной энергии отдачи ядра. При $W_я = W_{я.\ макс}$; $b = 0$, а также $a_\nu = 0$, так что нейтрино не получает при этом никакой энергии. Поскольку $p_я^2 \approx 2MT_я$, то выражение (26.19) можно переписать в виде

$$b = \frac{p_{я.\ макс}^2 - p_я^2}{2\sqrt{\delta^2 - p_я^2}}. \qquad (26.20)$$

Ядро отдачи забирает лишь малую часть энергии β-распада, и потому эксцентриситет эллипса импульсов

$$\beta_c = \frac{p'}{E'} \approx \frac{p_я}{\delta}, \qquad (26.21)$$

его большая полуось

$$a \approx \frac{b\delta}{\sqrt{\Delta^2 - p_я^2}} = \delta \frac{p_{я.\ макс}^2 - p_я^2}{2\left(\delta^2 - p_я^2\right)}. \qquad (26.22)$$

При $p_я = 0$ эллипсоид импульсов обращается в сферу, а при $p_{я.макс}$ — в точку. С ростом $p_я$, таким образом, убывают обе величины: a и b. Верхний и нижний пределы кинетической энергии электрона при заданном импульсе ядра отдачи получаются в виде

$$T_{e\ \text{мин}} = \frac{(\delta - p_я - m_e)^2}{2(\delta - p_я)} \qquad (26.23)$$

и

$$T_{e\ \text{макс}} = \frac{(\delta + p_я - m_e)^2}{2(\delta + p_я)}. \qquad (26.24)$$

Приведенное рассмотрение — пример анализа кинематики взаимодействий с образованием трех частиц путем вывода разных экстремальных соотношений сведением к разным частным случаям попарных комбинаций двух частиц. Подобным способом получены максимальная энергия ядра отдачи и пределы для кинетической энергии β-частиц при данной энергии ядра.

Если масса одной из частиц пренебрежимо мала по сравнению с массой других вторичных частиц, то максимальный импульс $p_{\text{макс}}$ переходит в p_k^*, определяемые соотношением (9.8). Поэтому описанный в гл. 3 метод анализа не позволяет сделать однозначного заключения о том, обусловлена ли исследуемая совокупность распадом на две частицы или распадом на три частицы, из которых по крайней мере одна обладает массой, пренебрежимо малой по сравнению с массой других частиц. Известную осмотрительность необходимо также проявлять при анализе допустимых углов ψ. Аналогичная неоднозначность может возникнуть при анализе компланарности следов первичной и двух заряженных вторичных частиц (см. гл. 3).

Действительно, можно доказать следующее положение: если масса одной из двух вторичных заряженных частиц (например, m_2) близка к массе первичной частицы m_0 и скорость последней $\beta_0 \approx 1$, то пути обеих заряженных и первичной частиц почти компланарны. Для доказательства этого утверждения умножим обе части равенства $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ скалярно на единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к векторам $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_1$, и получим

$$(\mathbf{n}\mathbf{p}_2) = -(\mathbf{n}\mathbf{p}_3). \tag{26.25}$$

Так как в данном случае $p_2 \approx \gamma\beta_c E_2^* \gg \gamma\,(p_3^* + \beta_c E_3^*) \approx p$, то

$$|\cos\vartheta_2| = \frac{p_3}{p_2}|\cos\vartheta_3| \ll 1, \tag{26.26}$$

где ϑ_2 и ϑ_3 — соответственно углы между векторами $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{n}$; следовательно, вектор $\mathbf{n}$ близок к нормали к импульсу p_2. Таким образом, если частица распадается на две заряженные (причем $m_2 \approx m_0$) и одну нейтральную, то векторы $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ почти компланарны.

В заключение необходимо отметить, что пороговые соотношения также являются предельными соотношениями. Здесь мы не будем касаться этого вопроса, поскольку он подробно освещен в § 10.

§ 27. УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ ЧАСТИЦ В СТРУЯХ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

В § 27—31 рассмотрим некоторые стороны анализа ливней (или струй) высокой энергии — элементарных актов неупругого взаимодействия частиц при энергиях $E_0 \gtrsim 50$—100 *Гэв*, в которых образуется большое число ($n \gg 1$) вторичных частиц, в основном π-мезонов, разлетающихся в *Л*-системе более или менее коллимированным пучком. Пока что единственным источником сведений о взаимодействиях при столь больших энергиях остаются исследования в космических лучах, но в будущем такие работы станут возможны и с ускорителями (встречные пучки, проектирование ускорителей на энергии в сотни гигаэлектронвольт). Существующие экспериментальные методы регистрации ливней (фотоэмульсии, камеры Вильсона, искровые камеры) позволяют измерять импульсы вторичных частиц, не превышающие в лучшем случае 10—20 *Гэв/с*, поэтому при очень высоких энергиях импульсы большинства вторичных частиц определить не удается, и практически единственными надежно измеренными характеристиками вторичных частиц в струях высокой энергии оказываются углы вылета. В связи с этим были разработаны методы анализа угловых распределений — представления их в особых координатах, которые позволяют только по угловым распределениям получить определенную информацию об элементарном акте взаимодействия. В дальнейшем предполагается азимутальная изотропия ливней и речь идет о полярных углах вылета ϑ в *Л*-системе и ϑ^* в *Ц*-системе, отсчитываемых относительно направления движения первичной частицы.

Координаты Ландау η и λ. В гидродинамической теории Ландау [34] вместо угла ϑ^* введена удобная переменная[1]

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \ln \operatorname{tg}\frac{\vartheta^*}{2}; \\ d\eta &= \frac{d\vartheta^*}{\sin\vartheta^*}. \end{aligned}\right\} \tag{27.1}$$

Обратное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \vartheta^* &= 2\operatorname{arctg} e^{\eta}; \\ d\vartheta^* &= \frac{2e^{\eta}\,d\eta}{1+e^{2\eta}} = \frac{d\eta}{\operatorname{ch}\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{27.2}$$

Соотношение между ϑ^* и η полезно записать также в виде

$$\cos\vartheta^* = -\operatorname{th}\eta. \tag{27.3}$$

В экспериментальных работах обычно используется аналогичная величина, определяемая непосредственно в *Л*-системе:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lg \operatorname{tg}\vartheta; \\ d\lambda &= \frac{2\lg e}{\sin 2\vartheta}\,d\vartheta; \end{aligned}\right\} \tag{27.4}$$

[1] Фактически в работе [34] эта величина определяется с обратным знаком $\eta = -\ln \operatorname{tg}\frac{\vartheta^*}{2}$, что отнюдь не носит принципиального характера.

обратные преобразования

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \operatorname{arctg} 10^{\lambda} = \operatorname{arctg} e^{\frac{\lambda}{\lg e}}; \\ d\vartheta &= \frac{10^{\lambda}}{1+10^{2\lambda}} \cdot \frac{d\lambda}{\lg e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{\lg e}\right)} \cdot \frac{d\lambda}{\lg e}. \end{aligned}\right\} \qquad (27.5)$$

В отличие от выражения (27.1) в формуле (27.4) логарифм десятичный, что вовсе не обязательно и не принципиально, но более часто употребляется на практике; в связи с этим в дальнейшем в формулах часто фигурирует множитель $\lg e = 1/\ln 10 = 0{,}4343$ или $1/\lg e = \ln 10 = 2{,}303$. В струях высокой энергии углы в $Л$-системе малы

$$\vartheta \ll 1, \qquad (27.6)$$

поэтому переменная λ всегда отрицательна, т. е.

$$\lambda < 0 \qquad (27.7)$$

и не возникает вопрос о смысле выражения (27.4) при $\vartheta > \pi/2$ [в противном случае следовало бы как-то модифицировать определение (27.4), например $\lambda = \lg|\operatorname{tg}\vartheta|$].

При больших энергиях хорошим приближением для кинематических формул служат формулы в ультрарелятивистском случае, когда (см. § 5) отношение скоростей

$$\frac{\beta_c}{\beta^*} = \varkappa = 1. \qquad (27.8)$$

Связь между углами определяется в этом случае формулой (5.8):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma_c} \operatorname{tg}\frac{\vartheta^*}{2}, \qquad (27.9)$$

и, следовательно,

$$\eta = \ln(\gamma_c \operatorname{tg}\vartheta) \qquad (27.10)$$

или

$$\lambda = -\lg\gamma_c + \lg e \cdot \eta. \qquad (27.11)$$

Соотношение (27.11) выражает важное свойство координат η и λ: построенное экспериментально в $Л$-системе распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda}$ по существу сразу же дает и распределение в $Ц$-системе $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\eta}$, необходимо лишь сместить начало отсчета по оси абсцисс влево на $\lg\gamma_c$ и уменьшить масштаб по этой оси в 2,303 раза [причем последняя операция, как уже отмечалось, не носит принципиального характера и обусловлена различием оснований логарифмов в определениях

(27.1) и (27.4)]. Другими словами, форма распределения по λ оказывается релятивистски инвариантной характеристикой.

Пусть в $Ц$-системе угловое распределение в обычных координатах

$$\frac{1}{N^*}\cdot\frac{dN^*}{d\cos\vartheta^*} = f(\vartheta^*) \qquad (27.12)$$

симметрично относительно плоскости, перпендикулярной к направлению движения первичной частицы (симметрия «вперед — назад»):

$$f(\vartheta^*) = f(\pi - \vartheta^*). \qquad (27.13)$$

Распределение (27.12) в координатах η имеет вид

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\eta} = f[\vartheta^*(\eta)]\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta} = \varphi(\eta). \qquad (27.14)$$

Для получения последнего уравнения проще всего продифференцировать соотношение (27.3). Если рассматривать $f[\vartheta^*(\eta)] = f_1(\eta)$ как функцию от η, то условие симметрии (27.13) запишется как

$$f_1(\eta) = f_1(-\eta) \qquad (27.15)$$

и, следовательно,

$$\varphi(\eta) = \varphi(-\eta), \qquad (27.16)$$

т. е. распределение $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\eta} = \varphi(\eta)$ представляет собой симметричную кривую, причем

$$\overline{\eta} = 0. \qquad (27.17)$$

Соответственно распределение

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} = \frac{1}{\lg e} f\left[\vartheta^*\left(\frac{\lambda+\lg\gamma_c}{\lg e}\right)\right]\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\lambda+\lg\gamma_c}{\lg e}\right)} \qquad (27.18)$$

также симметрично и

$$\overline{\lambda} = -\lg\gamma_c. \qquad (27.19)$$

Последняя формула служит основой для определения энергии первичной частицы по угловому распределению вторичных частиц (подробнее см. § 28).

Ввиду простой связи между координатами η и λ в дальнейшем ограничимся обсуждением непосредственно наблюдаемого на опыте распределения в координатах λ. Если угловое распределение не только симметрично, но и изотропно

$$f(\vartheta^*) = \frac{1}{2}, \qquad (27.20)$$

то

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\lambda+\lg\gamma_c}{\lg e}\right)}\cdot\frac{1}{\lg e}=$$

$$=\frac{2}{\left[10^{\lambda+\lg\gamma_c}+10^{-(\lambda+\lg\gamma_c)}\right]^2}\cdot\frac{1}{\lg e} \qquad (27.21)$$

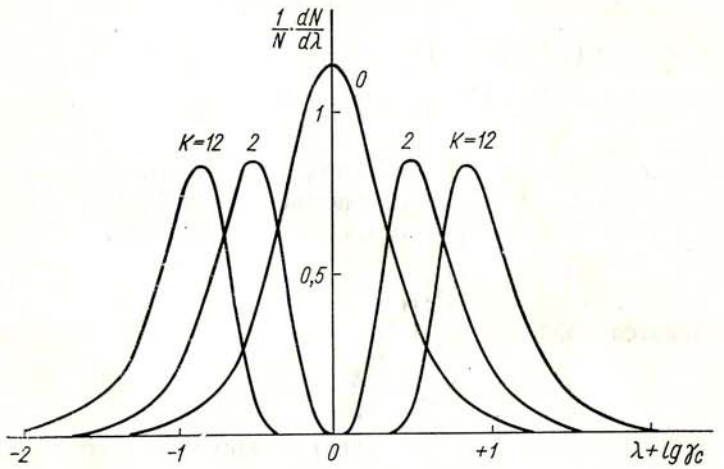


Рис. 44. Распределение по λ, соответствующее угловому распределению в $Ц$-системе $f(\vartheta^*)=\frac{2k+1}{2}\cos^{2k}\vartheta^*$.

представляет собой симметричную колоколообразную кривую (рис. 44), дисперсия * которой

$$\sigma_0^2=\overline{\lambda^2}-\overline{\lambda}^2=\frac{(\lg e)^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2\,dz}{\mathrm{ch}^2 z}=\frac{\pi^2}{12}(\lg e)^2=(0{,}394)^2. \qquad (27.22)$$

Распределение (27.21) с хорошей точностью может быть аппроксимировано функцией Гаусса:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r}e^{-\frac{(\lambda+\lg\gamma_c)^2}{2\sigma_r^2}}. \qquad (27.21')$$

Полуширину аппроксимирующей кривой Гаусса можно выбрать несколькими различными способами (см., например, работу [6]); часто ее полагают равной $\sigma_r=\sigma_0\approx 0{,}39$, однако оптимальной аппроксимацией следует считать несколько меньшее значение $\sigma_r\approx$ $\approx 0{,}35$—$0{,}37$.

Если угловое распределение в $Ц$-системе анизотропно, например типа

$$f(\vartheta^*)=\frac{2k+1}{2}\cos^{2k}\vartheta^*, \qquad (27.23)$$

то

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda}=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{\mathrm{th}^{2k}\left(\frac{\lambda+\lg\gamma_c}{\lg e}\right)}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\lambda+\lg\gamma_c}{\lg e}\right)}\cdot\frac{1}{\lg e}. \qquad (27.24)$$

Дисперсия распределения (27.24) [6]

$$\sigma_k^2=\frac{2k+1}{2}(\lg e)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2\,\mathrm{th}^{2k}z}{\mathrm{ch}^2 z}\,dz=(\lg e)^2\left[\frac{\pi^2}{12}+\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{2j-1}\right)\right] \qquad (27.25)$$

и растет с увеличением степени анизотропии k (рис. 45). Последнее свойство характерно для координат λ и в общем случае: чем сильнее коллимированы вторичные частицы в $Ц$-системе (при симметричном разлете), тем шире распределение по λ. Качественно форма распределения (27.24) характеризуется его экстремумами.

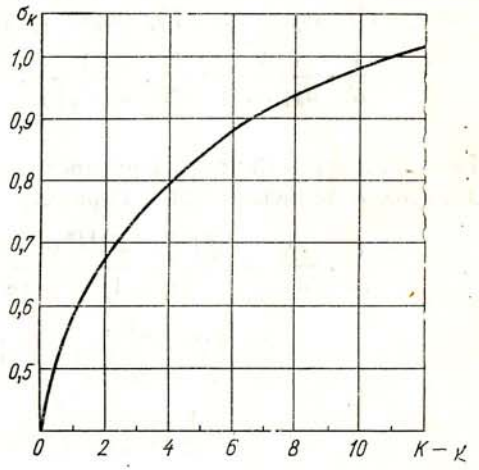


Рис. 45. Зависимость полуширины σ_k распределения по λ, соответствующего угловому распределению в $Ц$-системе $f(\vartheta^*)=\frac{2k+1}{2}\cos^{2k}\vartheta^*$, от показателя k.

Функция (27.24) обладает (см. рис. 44) тремя минимумами, где она обращается в нуль, в точке

$$\lambda=\overline{\lambda}=-\lg\gamma_c \qquad (27.26)$$

и в асимптотических точках

$$\lambda=\pm\infty, \qquad (27.27)$$

а также двумя максимумами в точках

$$\lambda_\pm=-\lg\gamma_c\pm\lg e\cdot\mathrm{arcsh}\sqrt{k}=-\lg\gamma_c\pm\lg\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right). \qquad (27.28)$$

Высота максимумов в этих точках

$$\left.\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_\pm}=\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{1}{\lg e} \qquad (27.29)$$

* Для вычисления интеграла в равенстве (27.22) см. в книге [19] формулу 3.527 (5).

фактически очень слабо зависит от k: по формуле (27.29) при $k = 1$ она равно 0,862, при $k = 2$ — 0,853, а при $k \gg 1$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_\pm} \approx \frac{1}{\mathrm{e}\lg \mathrm{e}} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = 0{,}848 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right). \quad (27.29')$$

Поскольку распределение (27.24) нормировано на единицу и, следовательно, площадь под каждым максимумом при любом k одна и та же, то и полуширина каждого из двух максимумов практически слабо зависит от k и равна примерно 0,27—0,28 [6]. Следовательно, указанный рост дисперсии с величиной k реализуется так, что с увеличением k два максимума кривой (27.24) сдвигаются в разные стороны, почти не меняясь по форме (см. рис. 44).

Еще раз подчеркнем, что простота приведенных соотношений обусловлена предположением (27.8), которое служит хорошим приближением и не вносит существенных искажений. Для иллюстрации влияния этого предположения рассмотрим, как изменятся формулы (27.21) и (27.22) для изотропного (в $Ц$-системе) распределения, если предположить, что вместо приближения (27.8) импульсное распределение вторичных частиц в $Ц$-системе описывается формулой Бозе — Планка [см. § 13, формулу (13.34)]:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N}{dp^* \, d\Omega^*} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{m^3 F_2(z)} \cdot \frac{p^{*2}}{\mathrm{e}^{\frac{zE^*}{m}} - 1} = \frac{1}{4\pi} \omega(p^*). \quad (27.30)$$

Полученное в § 13 угловое распределение в $Л$-системе (13.39) в координатах λ записывается в параметрическом виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\lambda} &= \frac{\gamma_c^2 (\gamma_c^2 - a^2)^{1/2} (a^2 - 1)}{(\gamma_c^2 - 1)^{3/2} \, a \lg \mathrm{e}} \cdot \frac{1}{F_2(z)} \times \\ &\times \left\{ \left(2 - \frac{a^2}{\gamma_c^2}\right) F_2(za) + \left(1 - \frac{a^2}{\gamma_c^2}\right) F_1(za) \right\}; \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \lg \frac{\gamma_c^2 - a^2}{a^2 - 1}, \end{aligned}\right\} \quad (27.31)$$

где в качестве параметра используется величина a [см. формулу (12.19)]. Для примера на рис. 46 построено распределение (27.31) при $\gamma_c = 17{,}5$ и $z = 1$, там же для сравнения нанесена и кривая (27.21). Дисперсия распределения (27.31) зависит от γ_c и z (рис. 47).

F-график Даллера — Уокера. Другой распространенный метод анализа угловых распределений в струях высокой энергии основан на использовании интегрального углового распределения в $Л$-системе

$$F(\leqslant \vartheta) = \int_0^\vartheta \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\cos\vartheta}\right) \sin\vartheta \, d\vartheta, \quad (27.32)$$

т. е. доли частиц, летящих в пределах заданного угла ϑ.

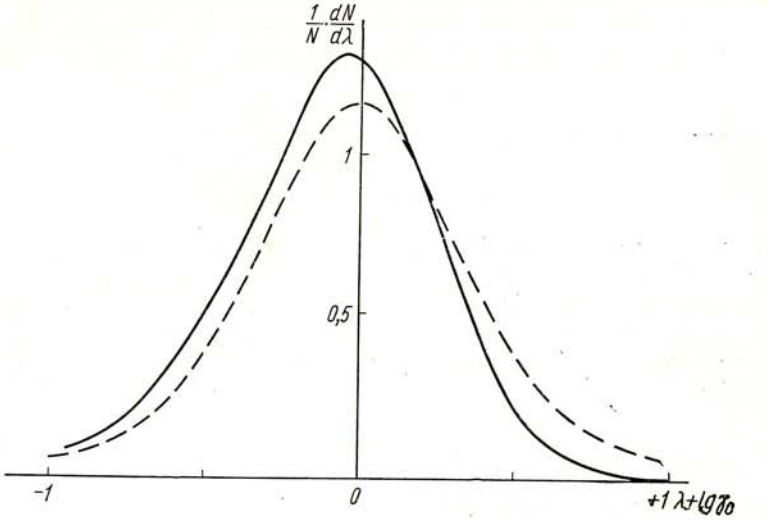


Рис. 46. Распределение по λ при изотропном распределении в $Ц$-системе для случая, когда $\beta_c/\beta^* = 1$ (пунктирная кривая), и для случая, когда спектр вторичных π-мезонов в $Ц$-системе описывается функцией Бозе — Планка (сплошная кривая).

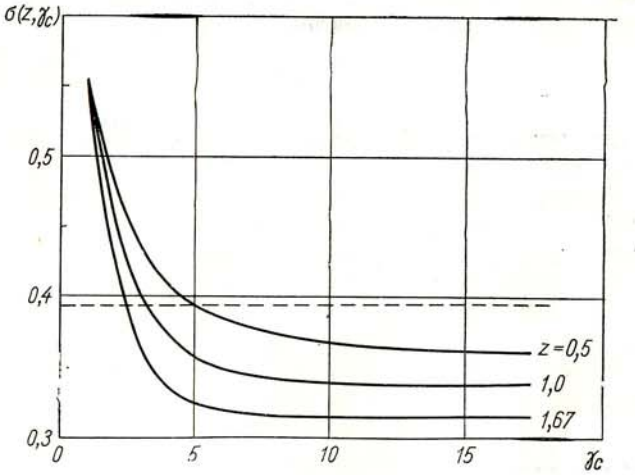


Рис. 47. Полуширина $\sigma(\gamma_c, z)$ распределения по λ для случая, когда в $Ц$-системе дифференциальное распределение $\frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 N^*}{dp^* d\gamma_1^*} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{m^3 F_2(z)} \cdot \frac{p^{*2}}{\mathrm{e}^{\frac{zE^*}{m}} - 1}$.

Диаграммой, или F-графиком Даллера — Уокера [59], называется представление экспериментальных данных в прямоугольной системе координат, где по оси абсцисс отложена переменная

$$\lambda = \lg \operatorname{tg} \vartheta,$$

а по оси ординат величина

$$y = \lg \frac{F(\leqslant \vartheta)}{1 - F(\leqslant \vartheta)}. \qquad (27.33)$$

Рассмотрим свойства F-графика, по-прежнему используя ультрарелятивистское приближение (27.8). В этом случае связь между углами в $Л$-системе и $Ц$-системе однозначная (см. § 5) и, определяя по выражению (27.9) угол ϑ^*, соответствующий заданному углу ϑ, $F(\leqslant\vartheta)$ можно выразить через величины в $Ц$-системе [см. формулу (27.12)]:

$$F(\leqslant \vartheta) = \int_0^{\vartheta^*} f(\vartheta^*) \sin \vartheta^* \, d\vartheta^*. \qquad (27.34)$$

При изотропии в $Ц$-системе

$$F(\leqslant \vartheta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta^*) = \sin^2 \frac{\vartheta^*}{2}. \qquad (27.35)$$

Преобразуя это равенство к виду

$$y = \lg \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta^*}{2} = -2 \lg e \cdot \eta = 2 \lg \gamma_c + 2\lambda, \qquad (27.36)$$

убеждаемся, что изотропное распределение изобразится на F-графике прямой с тангенсом угла наклона

$$\frac{dy}{d\lambda} = 2, \qquad (27.37)$$

которая пересекает ось абсцисс в точке $\lambda = -\lg \gamma_c$ (рис. 48). Отклонение экспериментальных точек от этой прямой указывает на наличие анизотропии в $Ц$-системе. Качественно это отклонение носит следующий характер: если вторичные частицы коллимированы в направлении «вперед — назад», то в определенном интервале углов $F(\leqslant\vartheta)$ слабо меняется с углом ϑ и соответствующий участок F-графика изображается отрезком прямой, параллельным оси абсцисс.

Для анизотропного распределения (27.23)

$$F(\leqslant \vartheta) = \frac{1}{2}(1 - \cos^{2k+1} \vartheta^*) \qquad (27.38)$$

и соответственно

$$y = \lg \frac{1 - \cos^{2k+1} \vartheta^*}{1 + \cos^{2k+1} \vartheta^*} = \lg \frac{1 + \operatorname{th}^{2k+1}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c}{\lg e}\right)}{1 - \operatorname{th}^{2k+1}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c}{\lg e}\right)}. \qquad (27.39)$$

Производная

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{2(2k+1)\operatorname{th}^{2k}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c}{\lg e}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c}{\lg e}\right)\left[1 - \operatorname{th}^{(2k+1)2}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c}{\lg e}\right)\right]} \qquad (27.40)$$

обращается в нуль при $\lambda = -\lg \gamma_c$ (точка перегиба), а при $\lambda \to \pm\infty$ стремится к 2, и функция (27.39) обладает двумя асимптотами

$$y = 2\lambda + 2 \lg \gamma_c \pm \lg(2k+1), \qquad (27.41)$$

расстояние между которыми вдоль оси абсцисс растет со степенью анизотропии k (см. рис. 48):

$$d = \lg(2k+1). \qquad (27.42)$$

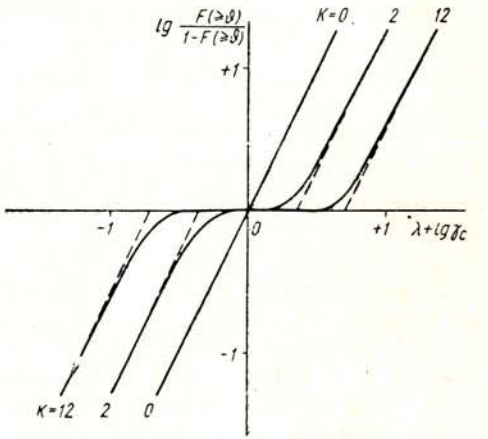


Рис. 48. График Уокера-Даллера в случае углового распределения в $Ц$-системе $f(\vartheta^*) = \frac{2k+1}{2}\cos^{2k}\vartheta^*$.

Как уже отмечалось, отклонение от предположения (27.8) в реальных условиях для струй высокой энергии невелико и не приведет к существенному искажению F-графика Даллера — Уокера.

§ 28. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Энергия и импульс первичных частиц являются важнейшими характеристиками ядерных реакций. При сравнительно умеренных энергиях имеются некоторые разработанные методы определения этих величин для заряженных частиц (измерение отклонения в магнитном поле, счет зерен в фотоэмульсии, измерение рассеяния). Однако с увеличением энергии трудности измерения энергии — импульса резко возрастают, а при энергиях свыше $5 \cdot 10^{10} - 10^{11}$ *эв* традиционные методы становятся непригодными*. Но как раз для столь быстрых частиц был разработан приближенный метод определения энергии, основанный на кинематическом подходе: измере-

* Лишь в последние годы широкое распространение получил ионизационный калориметр для определения энергии быстрых частиц, разработанный Н. Л. Григоровым и др. [60]. Однако и в настоящее время кинематический метод определения энергии первичных частиц — основной при анализе данных, полученных в фотоэмульсиях.

нии углового распределения вторичных частиц, образованных при столкновении частиц, энергию которых необходимо определить [61—63]. Дополнительное преимущество этого метода — возможность измерения энергии нейтральных первичных частиц. В этом случае нужно определить дополнительно направление ее движения, отождествляя его с осью ливня. Определение оси ливня естественно вносит дополнительную ошибку в величину энергии (сравнительно с определением энергии заряженных частиц).

В основе метода лежит соотношение (8.11), которое при условиях $E_{01} \gg m_{01}$ и $E_{01} \gg m_{02}$ имеет форму

$$\gamma_c^2 = \frac{E_{01}}{2m_{02}}. \tag{28.1}$$

С другой стороны, величина γ_c входит в соотношение (5.18), определяющее преобразование углов вылета при переходе от *Ц*-системы к *Л*-системе.

Для определения значения γ_c из соотношений (8.11) и (5.18) необходимо найти β^* и ϑ^* (величина ϑ определяется на опыте), что едва ли можно выполнить. Однако, и в этом состоит сущность метода, в наиболее важном случае очень быстрых частиц можно положить $\varkappa = \beta_c/\beta^* = 1$, и тогда можно использовать соотношение (5.8), уже не зависящее от скоростей частиц в *Ц*-системе.

Из выражений (28.1) и (5.8) следует

$$E_{01} \approx \frac{2m_{02}}{\vartheta^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta^*}{2}. \tag{28.2}$$

Формула (28.2) является основой для определения энергии по угловому распределению. Обычно ее применяют к частицам, образовавшим струи с малым (<3—4) числом медленных частиц. Хотя есть некоторые основания сомневаться в том, что эти ливни являются результатом столкновения нуклона с нуклоном, однако обычно для подобных ливней масса m_{02} принимается равной массе нуклона. Примем пока это допущение *, а в дальнейшем оценим возможную погрешность, вытекающую отсюда. Таким образом, остается определить угол ϑ^*. Как уже упоминалось (см. § 27), при столкновении двух частиц естественно принять, что имеется азимутальная симметрия, а в случае столкновения двух нуклонов можно допустить еще более высокую степень симметрии (27.13).

Предположим вначале, что каждой частице с импульсом $\mathbf{p}^*$ соответствует частица с импульсом $-\mathbf{p}^*$. Тогда легко получить соотношение, которым пользуются весьма часто.

Пусть ϑ_F, ϑ_{1-F} — углы, содержащие F и $1-F$ доли всех частиц. Тогда из предположения о симметрии в *Ц*-системе $\vartheta^*_{1-F} = \pi - \vartheta^*_F$ и, следовательно, на основании соотношения (5.8)

$$\gamma_c^2 \approx \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta_F \operatorname{tg}\vartheta_{1-F}} \tag{28.3}$$

* О кинематическом критерии нуклон-нуклонных столкновений см. § 30.

или

$$E_0 \approx \frac{2m}{\vartheta_F \vartheta_{1-F}}. \tag{28.4}$$

В частности, если $F = 1/2$, то

$$E_0 \approx \frac{2m}{\vartheta^2_{1/2}}. \tag{28.5}$$

Примем теперь во внимание, что условие существования двух частиц, движущихся под дополнительными углами (ϑ^* и $180° - \vartheta^*$), выполняется только в среднем. В этом случае необходимо уже задаваться некоторой конкретной формой функции $\Phi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{ns})$ корреляции углов испускания частиц. Найдем наиболее вероятное значение энергии при заданной функции Φ, предполагая, что углы испускания частиц статистически независимы [62, 63]. В настоящее время нет экспериментальных данных, которые бы подтвердили это предположение. Его следует принять как наиболее простое, имея в виду необходимость опытной проверки степени его справедливости*. В этом случае вероятность Φ наблюдения частиц, вылетающих под углами $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n_s}$ [62],

$$\Phi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n_s}) = \prod_{i=1}^{n} \Phi(\vartheta_i), \tag{28.6}$$

где ϑ_i, $d\vartheta_i$ связаны с ϑ_i^*, $d\vartheta_i^*$ следующими соотношениями [см. выражение (5.8)]:

$$\cos\vartheta^* = \frac{1-\gamma_c^2 \operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\gamma_c^2 \operatorname{tg}^2\vartheta}; \tag{28.7}$$

$$d\vartheta^* = \frac{2\gamma_c \sec^2\vartheta}{1+\gamma_c^2 \operatorname{tg}^2\vartheta}\, d\vartheta. \tag{28.8}$$

Тогда наиболее вероятное значение $\gamma_c^{(\text{вер})}$ (а следовательно, и энергии E_0) определяется уравнением

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma_c}\Phi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)\right\}_{\vartheta_i=\text{const}} = \left\{\frac{\partial}{\partial\gamma_c}\lg\Phi(\vartheta_i)\right\}_{\vartheta_i=\text{const}}. \tag{28.9}$$

Дилуорс и др. [62] вычисляли $\gamma_c^{(\text{вер})}$ в предположении, что $f(\vartheta_i^*) \sim |\cos\vartheta_i^*|^{2k} \sin\vartheta_i^*$. Тогда $\gamma_c^{(\text{вер})}$ находим из уравнения

$$\frac{n}{2\gamma_c^{(\text{вер})2}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos^2\vartheta_i + \gamma_c^{(\text{вер})2}} - k\left\{\frac{1}{1+\gamma_c^{(\text{вер})2}\operatorname{tg}^2\vartheta_i} - \frac{1}{1+\gamma_c^{(\text{вер})2}\operatorname{tg}^2\vartheta_i}\right\}\right]. \tag{28.10}$$

* Это предположение довольно естественно при условии, что число частиц велико и среди них нет существенно выделенных вторичных.

Найдем далее дисперсию величины γ_c. Запишем выражение (27.11) для i-й частицы:

$$-\lg \gamma_c = \lambda_i + \lg e \cdot \eta_i. \qquad (28.11)$$

Усредняя по следам всех вторичных заряженных частиц, получаем

$$-\lg \gamma_c = \frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i + \lg e \sum_{i=1}^{n_s} \eta_i. \qquad (28.12)$$

В данном случае n_s — число вторичных заряженных частиц в ливне. Для дальнейшего существенного упрощения воспользуемся основной предельной теоремой теории вероятности, согласно которой сумма N одинаковых случайных величин при $N \to \infty$ является также случайной величиной, распределение которой представляется функцией Гаусса с дисперсией $\sigma^2 N$, где σ^2 — дисперсия первичной случайной величины*. Поэтому формулу (28.12) можем представить в виде

$$-\lg \gamma_c = \frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n_s}}, \qquad (28.13)$$

где

$$\sigma^2 = \int \eta^2 \varphi(\eta)\, d\eta, \qquad (28.14)$$

а функция $\varphi(\eta)$ — нормированное распределение величин η в $Ц$-системе.

Естественно, что величина σ зависит от степени анизотропии углового распределения в $Ц$-системе, однако для грубо ориентировочных расчетов ее можно принять равной единице. Недавно экспериментальные исследования дисперсии показали, что для столкновения пионов с энергией 16 *Гэв* с ядрами фотоэмульсии $\sigma/\sqrt{n_s} = 1{,}15$ при $n_s > 4$. Для протонов с энергией 25 *Гэв*, взаимодействующих в фотоэмульсии, $\sigma/\sqrt{n_s} \approx 1{,}6$, для космических частиц с энергией около 100 *Гэв*—$\sigma/\sqrt{n_s} \geqslant 1{,}35$. Данные, полученные с помощью ионизационного калориметра ($E_{01} \sim 10^{11}$—10^{12} *эв*), привели к грубому определению значения $\sigma/\sqrt{n_s} \sim 1{,}6$. Все эти данные взяты из работы [64].

Как указывалось, описанные здесь методы определения энергии пригодны для случая, когда отношение $\beta_c/\beta^* = \varkappa$ близко к единице. Практически это означает, что энергия первичной частицы велика,

* При выводе этой теоремы предполагается, что дисперсия σ^2 существует. Кроме того, получающаяся функция Гаусса смещена относительно нуля; эта функция симметрична относительно нуля в одном важном частном случае, когда функция $\Phi(\vartheta^*$ симметрична, т. е. выполняется условие $\Phi(\vartheta^*) = \Phi(\pi - \vartheta^*)$. Это и является вторым условием применимости (28.13).

а следовательно, и число вторичных частиц велико по сравнению с единицей. Точную границу метода дать нельзя, однако можно надеяться, во всяком случае, что его можно применять при энергиях $E_{01} \gtrsim 10^{11}$ *эв*.

Оценку ошибки, обусловленную тем, что скорости вторичных частиц не удовлетворяют этому условию, можно произвести несколькими путями, однако все равно остается трудным пункт, связанный с малостью числа вторичных частиц. Наметим здесь некоторые подходы к оценке указанной выше ошибки.

Во-первых, так же как в § 27, можно воспользоваться аппроксимацией импульсного спектра в $Ц$-системе функцией Бозе — Планка (27.30), которая дает для распределения по λ выражение (27.31). Как видно из рис. 46, распределение (27.31) несимметрично и соответственно $\bar{\lambda} \neq -\lg \gamma_c$. Величину $\bar{\lambda}$ проще вычислить не по формуле (27.31), а непосредственно, используя распределение (27.30). Из обычной формулы релятивистского преобразования углов (5.3) следует, что

$$\bar{\lambda} = -\lg \gamma_c + \frac{\lg e}{2}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{+1} \ln\left|\frac{\sin\vartheta^*}{\varkappa(p^*) + \cos\vartheta^*}\right| \omega(p^*)\, dp^*\, d\cos\vartheta^* = -\lg \gamma_c + \alpha(z, \gamma_c). \qquad (28.15)$$

Интегрирование по $\cos\vartheta^*$ выполняется сравнительно просто:

$$\alpha(z, \gamma_c) = -\lg e \int_0^{\infty} \left\{\frac{\varkappa(p^*)+1}{2}\ln\frac{\varkappa(p^*)+1}{2} - \frac{\varkappa(p^*)-1}{2}\ln\frac{\varkappa(p^*)-1}{2}\right\} \omega(p^*)\, dp^*. \qquad (28.16)$$

Дальнейшее интегрирование по p^* выполнить в квадратурах не удается. Результаты численных расчетов по формуле (28.16) приведены на рис. 49[1*].

Во-вторых, можно использовать метод последовательных приближений, положив в первом приближении $\varkappa = 1$, и определить таким образом некоторое γ_{c0}, затем по формуле (3.12) оценить β^*, а потом снова проделать все вычисления. Естественно, что при этом нужно независимо определить импульс и массу некоторых вторичных частиц. Третьим способом определения энергии для случая, когда известны импульс и массы некоторых вторичных частиц, является симметризация углового распределения. Этот метод сводится

1* Вопросом о поправках к определению γ_c, связанных с учетом спектра вторичных частиц, занимались авторы этого метода [65]. С помощью некоторой аппроксимации в интеграле (28.16) они получили для первичной энергии 27 *Гэв* при $z = 1$ значение $|\alpha| \sim 0{,}05$—$0{,}06$, что достаточно хорошо совпадает с кривой на рис. 49.

к определению в соответствии с формулой (8.11) такого значения γ_c что в системе координат, которая соответствует этому значению, угловое распределение обладает наибольшей симметрией относительно плоскости, перпендикулярной к направлению движения.

Дополнительным важным источником ошибок может быть распределение падающих частиц по энергии. В этом случае (как это имеет место в космических лучах), когда энергетический спектр частиц, вызывающих ливни, представляется быстро падающей функцией, флуктуации в распределении измеренной энергии относительно истинного ее значения могут привести к большой ошибке. Причина заключается в том, что падающие частицы малых энергий представлены в спектре гораздо богаче и, следовательно, регистрируются с большей вероятностью, чем частицы больших энергий. Поэтому метод в описанной выше форме дает заведомо хорошие результаты лишь в случае, когда спектр падающих частиц постоянен или почти постоянен. Для исследования в космических лучах необходимо помимо влияния спектра принять во внимание связь между полным числом частиц в звезде и величиной энергии и энергетическим спектром первичных частиц. Все эти вопросы рассматривались сравнительно давно [66], но остались незамеченными. Лишь недавно, в связи с важным замечанием о роли энергетического «порога» при установлении связи между измеренными и истинными энергетическими характеристиками [64], к этому кругу вопросов возник значительный интерес.

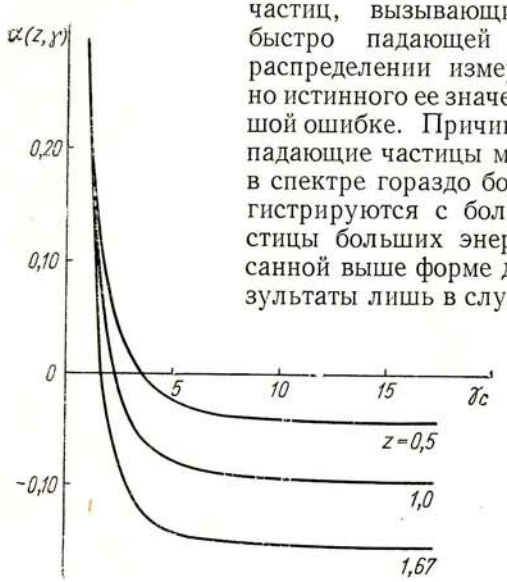


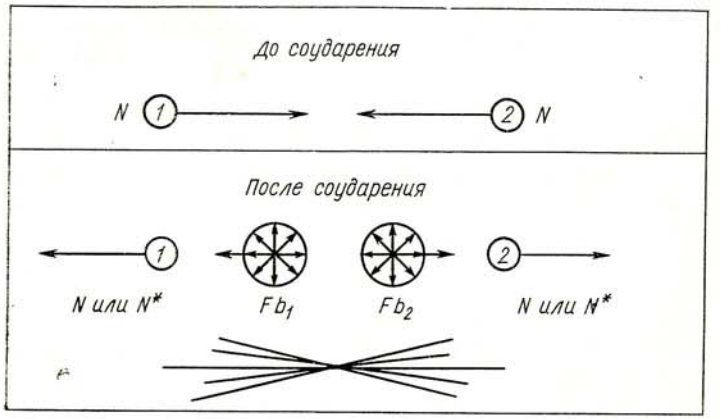
Рис. 49. Зависимость величины поправки к формуле Кастаньоли $\alpha(\gamma_c, z)$ от γ_c и z.

Суть этого замечания в следующем: обычно физические приборы имеют нижний предел измерения истинного значения энергии («порог»). Тогда вблизи порога экспериментальное значение дисперсии σ, т. е. значение σ для данной установки, испытывает резкое изменение, что существенно сказывается на измерении некоторых характеристик (особенно энергетических спектров).

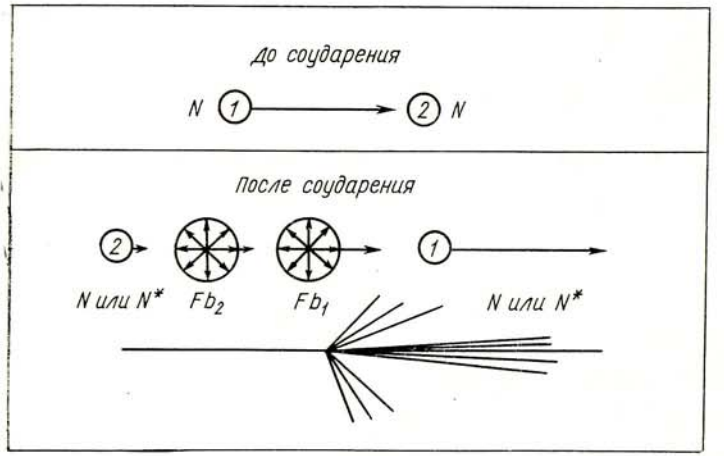
В заключение отметим, что совместное определение энергии описанным здесь кинематическим методом и с помощью ионизационного калориметра может пролить свет на характер асимметрии в угловом распределении вторичных частиц, возникающих в множественных процессах [67].

§ 29. КИНЕМАТИКА ФАЙРБОЛЬНОЙ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

Для описания струй высокой энергии ввиду отсутствия последовательной теории сильных взаимодействий было предложено несколько феноменологических моделей. В частности, довольно широкое распространение получила так называемая двухцентровая (или файрбольная) модель [68—76]. По этой модели в результате соударения двух нуклонов при высоких энергиях сначала образуются



а



б

Рис. 50. Схематическая картина элементарного акта ядерного взаимодействия при высокой энергии согласно двухцентровой модели в Ц-системе (а) и в Л-системе (б).

четыре тела (рис. 50): два бариона*, разлетающихся в $Ц$-системе в противоположных направлениях, и два мезонных сгустка (файрбола) с барионным зарядом, равным нулю, которые также разлетаются в $Ц$-системе в противоположных направлениях, но со скоростями, меньшими, чем скорости нуклонов после соударения. Затем файрболы распадаются изотропно в своей системе покоя, испуская в основном π-мезоны. Вопрос о физическом обосновании двухцентровой модели и реальном существовании файрболов лежит вне рамок этой книги (см., например, работы [73—76]), и в дальнейшем остановимся лишь на кинематических следствиях двухцентровой модели, опираясь в основном на работы польских авторов [6, 73].

Введем следующие обозначения: M_1, M_2 — массы файрболов; $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ — лоренц-факторы файрболов относительно $Ц$-системы; $\gamma_1^{(Fb)}$, $\gamma_2^{(Fb)}$ — лоренц-факторы файрболов относительно $Л$-системы, причем индекс 1 относится к файрболу, вылетающему в $Ц$-системе в переднюю полусферу (в $Л$-системе быстрый файрбол), а индекс 2 — к файрболу, вылетающему в $Ц$-системе в заднюю полусферу (в $Л$-системе медленный файрбол).

Рассмотрим сначала простейший случай симметричной двухцентровой модели, когда массы обоих файрболов равны между собой ($M_1 = M_2 = M$), при распаде каждого файрбола возникает одно и то же число вторичных частиц ($n_1 = n_2 = n_\pi/2$) и файрболы движутся в $Ц$-системе с одинаковыми скоростями ($\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}$) в направлениях, колинеарных направлению движения первичного нуклона. В этом случае [см. формулы (4.9) и (4.9′)]

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^{(Fb)} &= \gamma_c \bar{\gamma} + \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}; \\ \gamma_2^{(Fb)} &= \gamma_c \bar{\gamma} - \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (29.1)$$

или при $\gamma_c \gg 1$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^{(Fb)} &\approx \gamma_c \left(\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right); \\ \gamma_2^{(Fb)} &\approx \gamma_c \left(\bar{\gamma} - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (29.1')$$

Полезно иметь и обратные формулы, т. е. выразить γ_c и $\bar{\gamma}$ через $\gamma_1^{(Fb)}$ и $\gamma_2^{(Fb)}$:

$$\gamma_c^2 \approx \gamma_1^{(Fb)} \gamma_2^{(Fb)}; \qquad (29.2)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_1^{(Fb)} + \gamma_2^{(Fb)}}{2\gamma_c} \approx \frac{\gamma_1^{(Fb)} + \gamma_2^{(Fb)}}{2\sqrt{\gamma_1^{(Fb)} \gamma_2^{(Fb)}}}. \qquad (29.3)$$

* В дальнейшем для простоты будем считать их нуклонами, хотя в принципе барионы могут быть любые (например, барионные резонансы — изобары).

Как обычно при анализе струй высокой энергии, в дальнейшем будем считать, что для каждого файрбола с хорошей степенью приближенности справедливо соотношение (27.8), т. е. скорости вторичных частиц в системе файрбола равны скорости самого файрбола относительно $Л$-системы. Очевидно, что по чисто кинематическим причинам двухцентровой модели присуще анизотропное угловое распределение в $Ц$-системе. Это распределение в координатах λ в силу простых трансформационных свойств распределений по λ (см. § 27) равно сумме двух распределений (27.21), где вместо γ_c следует подставить лоренц-факторы файрболов

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} = \frac{1}{4\lg e}\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\lambda + \lg \gamma_1^{(Fb)}}{\lg e}\right)} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\lambda + \lg \gamma_2^{(Fb)}}{\lg e}\right)}\right\}. \qquad (29.4)$$

Центры распределений, составляющих (29.4), сдвинуты относительно друг друга по оси абсцисс на расстояние

$$2\delta = \lg \gamma_1^{(Fb)} - \lg \gamma_2^{(Fb)} \approx \lg e \cdot \ln \frac{\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}}{\bar{\gamma} - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = 2 \lg e \cdot \mathrm{Arch}\, \bar{\gamma}. \qquad (29.5)$$

Из разложения [см., например, книгу [19], формулу 1.642 (2)]

$$\mathrm{Arch}\, \bar{\gamma} = \ln 2\bar{\gamma} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\bar{\gamma}^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{4\bar{\gamma}^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{6\bar{\gamma}^6} - \ldots \qquad (29.6)$$

следует, что уже при $\bar{\gamma} \gtrsim 2 - 3$ можно с точностью около 5% ограничиться только первым членом

$$\delta \approx \lg 2\bar{\gamma}. \qquad (29.7)$$

Подставляя выражение (29.5) в формулу (29.1′), получаем

$$\left.\begin{aligned} \lg \gamma_1^{(Fb)} &\approx \lg \gamma_c + \delta; \\ \lg \gamma_2^{(Fb)} &\approx \lg \gamma_c - \delta, \end{aligned}\right\} \qquad (29.8)$$

и распределение (29.4) можно переписать в виде

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} = \frac{1}{4\lg e}\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\lambda + \lg \gamma_c + \delta}{\lg e}\right)} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\lambda + \lg \gamma_c - \delta}{\lg e}\right)}\right\}. \qquad (29.9)$$

Для записи углового распределения в координатах λ в двухцентровой модели часто используется также аппроксимация изотропного распределения функцией Гаусса (27.21′)

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\Gamma}\left\{e^{-\frac{(\lambda + \lg \gamma_c + \delta)^2}{2\sigma_\Gamma^2}} + e^{-\frac{(\lambda + \lg \gamma_c - \delta)^2}{2\sigma_\Gamma^2}}\right\}; \qquad (29.9')$$

$$\sigma_\Gamma \approx 0{,}35 \div 0{,}37.$$

Производная функции (29.9) обращается в нуль в точке $\lambda = -\lg\gamma_c$ и в точках

$$\lambda = -\lg\gamma_c \pm \frac{\lg e}{2}\,\mathrm{Arch}\,\frac{\mathrm{sh}^2\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)-1}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)}, \qquad (29.10)$$

причем точки (29.10) существуют при условии

$$\frac{\mathrm{sh}^2\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)-1}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)} \geqslant 1 \qquad (29.11)$$

или

$$\delta \geqslant \frac{\lg e}{2}\,\mathrm{Arch}\,2 \approx 0{,}286. \qquad (29.11')$$

Следовательно, распределения от обоих файрболов складываются таким образом (рис. 51), что суммарное распределение (29.9) при $\delta < 0{,}286$ обладает одним максимумом, а при $\delta > 0{,}286$ двумя максимумами, расстояние между которыми вдоль оси абсцисс

$$2\delta' = \lg e \cdot \mathrm{Arch}\,\frac{\mathrm{sh}^2\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)-1}{\mathrm{ch}\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right)} \qquad (29.12)$$

несколько меньше, чем 2δ, но стремится к этой величине с ростом δ.

Анизотропия углового распределения в первом приближении * характеризуется дисперсией, которая экспериментально определяется по формуле

$$\sigma^2_{\text{эксп}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_s}(\lambda_i + \lg\gamma_c)^2}{n_s - 1}. \qquad (29.13)$$

Напомним, что здесь n_s — число заряженных вторичных частиц. В дальнейшем принимается естественное допущение, что распределение (29.4) или (29.9) применимо не только ко всем вторичным частицам, но и к одним заряженным, которые фактически наблюдаются в экспериментах. Дисперсия углового распределения (29.4), предсказываемого двухцентровой моделью,

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{12}(\lg e)^2 + \frac{1}{4}\lg^2\frac{\gamma_1^{(Fb)}}{\gamma_2^{(Fb)}} = \sigma_0^2 + \delta^2 \approx$$

* Для более детальной информации о форме анизотропного углового распределения необходимо знание моментов более высокого порядка, чем второй.

$$\approx \sigma_0^2 + \lg^2 e \cdot \mathrm{Arch}^2\,\bar{\gamma} = 0{,}155 + 0{,}189\,\mathrm{Arch}^2\,\bar{\gamma}, \qquad (29.14)$$

а при $\bar{\gamma} > 2$ [см. выражение (29.6)]

$$\sigma^2 \approx 0{,}155 + \lg^2 2\bar{\gamma}. \qquad (29.14')$$

Формула (29.14) устанавливает связь между несколько формальной характеристикой σ и физическим параметром $\bar{\gamma}$ (графически связь между σ и $\bar{\gamma}$ приведена в виде двух шкал по оси ординат на рис. 51).

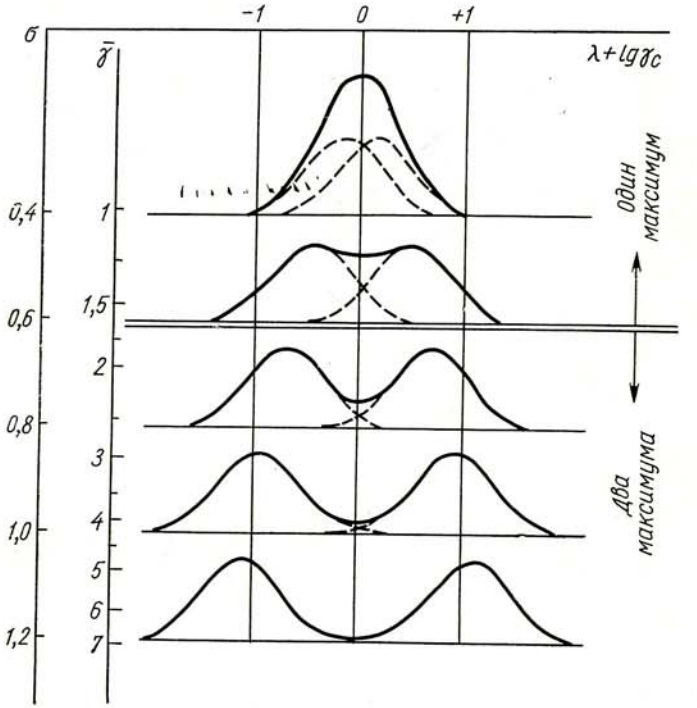


Рис. 51. Распределение по λ, предсказываемое двухцентровой моделью [73].

Согласно критерию (29.11'), распределение по λ становится двухмаксимумовым при

$$\sigma > 0{,}487. \qquad (29.15)$$

В экспериментальной практике для более надежного выделения провала между максимумами в качестве границы принято использовать несколько большее значение $\sigma = 0{,}6$.

По мере роста σ распределение двухцентровой модели все больше отклоняется от нормального распределения Гаусса, которым аппроксимируется распределение по λ при малых значениях $\bar{\gamma}$. В рабо-

тах польских физиков [70] в качестве меры отклонения экспериментального распределения от нормального с тем же значением σ был введен параметр

$$D = \frac{n_s^{(e)} - n_s^{(i)}}{n_s^{(e)} + n_s^{(i)}} = \frac{n_s^{(e)} - n_s^{(i)}}{n_s}, \qquad (29.16)$$

где $n^{(i}$ — число вторичных заряженных частиц, у которых значения $(\lambda + \lg \gamma_c)$ лежат в интервале от $-0{,}674\ \sigma$ до $0{,}674\ \sigma$; $n_s^{(e)}$ — число вторичных заряженных частиц, у которых значения

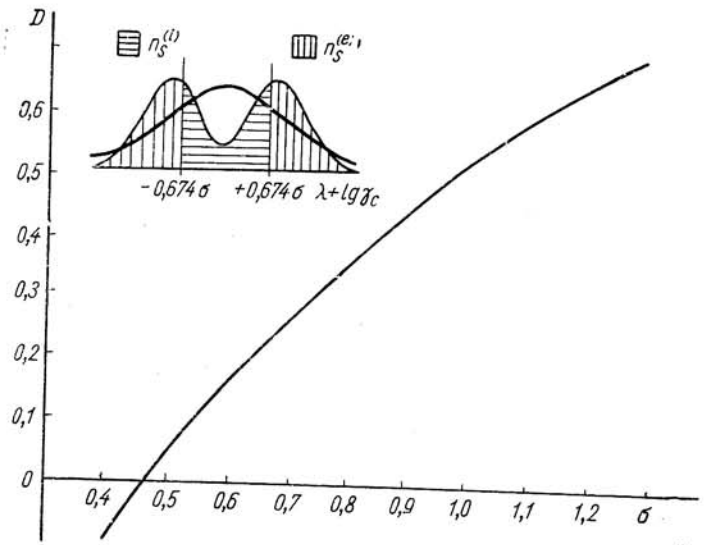


Рис. 52. Определение параметра D (на врезке) и его зависимость от σ.

$(\lambda + \lg \gamma_c)$ лежат вне этого интервала (рис. 52). Границы интервала выбраны исходя из условия, что для нормального распределения $D \equiv 0$ (рис. 52).

Проинтегрировав выражение (29.9) в указанном выше интервале, получим, что согласно двухцентровой модели

$$D = 1 - \mathrm{th}\left(\frac{0{,}674\,\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \sigma_0^2}}{\lg e}\right) - \mathrm{th}\left(\frac{0{,}674\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \sigma_0^2}}{\lg e}\right). \qquad (29.17)$$

Из графика зависимости D от σ (см. рис. 52) видно, что в двухцентровой модели $D > 0$, начиная с $\sigma > 0{,}48$, и растет с увеличением σ.

Если угловое распределение в координатах λ аппроксимируется, как это часто делается на практике, суперпозицией двух нормальных распределений (29.9′), то

$$D = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{0{,}674\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \sigma_0^2}}{\sqrt{2}\,\sigma_r}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{0{,}674\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \sigma_r^2}}{\sqrt{2}\,\sigma_r}\right), \qquad (29.18)$$

где

$$\mathrm{erf}\, z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt \qquad (29.19)$$

—обычный интеграл вероятности.

Для дальнейшего изложения введем важную характеристику соударения — коэффициент неупругости K, определив его как долю кинетической энергии сталкивающихся нуклонов, трансформирующуюся в полную энергию образовавшихся в результате соударения новых частиц*. Очевидно, что коэффициент неупругости не является в общем случае релятивистским инвариантом и его значение зависит от выбранной системы координат. Если суммарный импульс нуклонов после соударения в $Ц$-системе равен нулю, то коэффициент неупругости в $Л$-системе **

$$K^{(Л)} = \frac{T_{01} - (T_1 + T_2)}{T_{01}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_\pi} E_j}{T_{01}} \qquad (29.20)$$

и коэффициент неупругости в $Ц$-системе

$$K^* = \frac{(T_{01}^* + T_{02}^*) - (T_1^* + T_2^*)}{T_{01}^* + T_{02}^*} = \frac{\sum_{j=1}^{n_\pi} E_j^*}{T_{01}^* + T_{02}^*} \qquad (29.20')$$

связаны простым соотношением

$$K^{(Л)} = \frac{\gamma_c}{\gamma_c + 1} K^*, \qquad (29.21)$$

которое выводится на основе преобразований Лоренца. Как видно из соотношения (29.21), при $\gamma_c \gg 1$

$$K^{(Л)} \approx K^*. \qquad (29.21')$$

Различные характеристики ливня в двухцентровой модели связаны между собой определенными корреляциями, обусловленными за-

* Определение K имеет смысл в том случае, когда феноменологически процесс соударения происходит так, что сталкивающиеся частицы (в данном случае нуклоны) в результате соударения не меняются по своей природе и могут быть отождествлены среди вторичных частиц.

** В формулах (29.20) и (29.20′) индексы 01 и 02 относятся к нуклонам до соударения, индексы 1 и 2 — к нуклонам после соударения, индексы j — к генерированным в соударении вторичным частицам (π-мезонам).

коном сохранения энергии. С точки зрения файрбольной модели в ее простейшем варианте все вторичные частицы возникают в результате распада файрболов, и их суммарная полная энергия равна

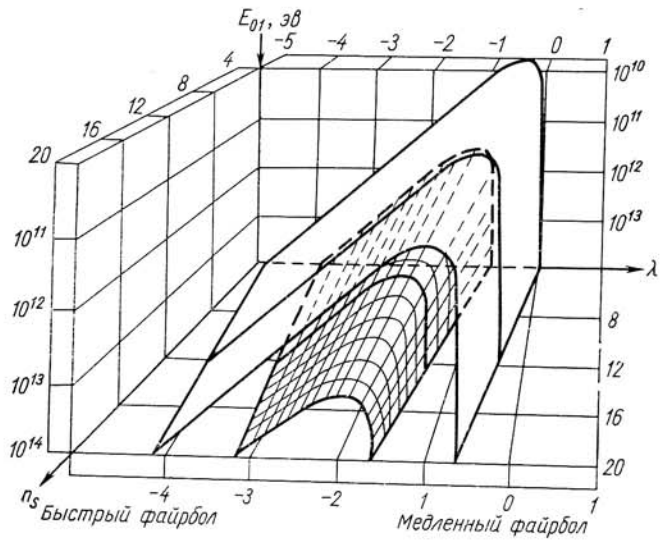


Рис. 53. Положение обоих максимумов распределения по λ, предсказываемое двухцентровой файрбольной моделью как функция первичной энергии E_{01} и множественности n_s. Белая поверхность соответствует коэффициенту неупругости $K^{(Л)} = 1$; заштрихованная поверхность — коэффициенту неупругости $K^{(Л)} = 0{,}1$ [73].

полной энергии файрболов. Считая далее, что файрболы дают при распаде только π-мезоны, полное число которых $n_\pi = 3n_s/2$, можно на основе закона сохранения энергии в Ц-системе записать

$$2M\bar{\gamma} = \frac{3}{2} n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)} \bar{\bar{\gamma}} = 2K^* m_N (\gamma_c - 1) \approx 2K^* m_N \gamma_c, \quad (29.22)$$

где $\varepsilon_\pi^{(Fb)}$ — средняя энергия π-мезонов в системе покоя файрбола. Как показывает сравнение файрбольной модели с экспериментом, $\varepsilon_\pi^{(Fb)}$ следует считать практически не зависящей от γ_c:

$$\varepsilon_\pi^{(Fb)} = \text{const} \approx 0{,}5 \ \textit{Гэв}. \quad (29.23)$$

Из этого соотношения следует, что

$$\bar{\gamma} = \frac{4K^* m_N}{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}} (\gamma_c - 1) \approx \frac{4K^* m_N}{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}} \gamma_c. \quad (29.24)$$

Подставляя далее последнее выражение в формулу (29.1) или (29.1′), получаем зависимость $\gamma_1^{(Fb)}$ и $\gamma_2^{(Fb)}$ от γ_c, n_s и K^*, приведенную на рис. 53. Качественно характер этой зависимости можно оценить, воспользовавшись приближенными формулами (4.11) и (4.12), справедливыми при $\bar{\gamma} \gtrsim 2$, тогда

$$\gamma_1^{(Fb)} \approx 2\gamma_c \bar{\gamma} = \frac{8K^* m_N}{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}} \gamma_c^2 \approx \frac{4K^*}{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}} E_{01} \quad (29.25)$$

и

$$\gamma_2^{(Fb)} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_c}{\bar{\gamma}} + \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4K^* m_N}{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}} + \frac{3n_s \varepsilon_\pi^{(Fb)}}{4K^* m_N}\right). \quad (29.26)$$

Из соотношений (29.25) и (29.26) видно, что при $n_s = \text{const}$ и $K^* = \text{const}$ лоренц-фактор быстрого файрбола растет пропорционально энергии E_{01} бомбардирующего нуклона, а лоренц-фактор медленного файрбола не зависит от E_{01} и определяется только значениями n_s и K^*. Соответственно в координатах λ расстояние между двумя максимумами логарифмически возрастает с энергией E_{01}, причем таким образом, что максимум, обусловленный быстрым нуклоном, сдвигается, а положение максимума, обусловленного медленным файрболом, остается неизменным. Из соотношений (29.25) и (29.26) вытекает также, что при $E_{01} = \text{const}$ и $K^* = \text{const}$ расстояние между максимумами возрастает при уменьшении множественности n_s. Таким образом, наиболее ярко характерные черты двухцентровой модели проявляются в струях большой энергии с малой множественностью.

Для двухцентровой модели F-график Уокера — Даллера (см. § 27) имеет вид

$$y = \lg \frac{F(\leqslant \vartheta)}{1 - F(\leqslant \vartheta)} = \lg \frac{2 + \left[\text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_1^{(Fb)}}{\lg e}\right) + \text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_2^{(Fb)}}{\lg e}\right)\right]}{2 - \left[\text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_1^{(Fb)}}{\lg e}\right) + \text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_2^{(Fb)}}{\lg e}\right)\right]} \approx$$

$$\approx \lg \frac{2 + \left[\text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c + \delta}{\lg e}\right) + \text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c - \delta}{\lg e}\right)\right]}{2 - \left[\text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c + \delta}{\lg e}\right) + \text{th}\left(\frac{\lambda + \lg \gamma_c - \delta}{\lg e}\right)\right]}. \quad (29.27)$$

Производная $dy/d\lambda$ в точке пересечения с осью абсцисс $(\lambda = \bar{\lambda} = -\lg \gamma_c)$ равна

$$\left.\frac{dy}{d\lambda}\right|_{\lambda = -\lg \gamma_c} = \frac{2}{\text{ch}^2\left(\frac{\delta}{\lg e}\right)} \approx \frac{2}{\bar{\gamma}^2}, \quad (29.28)$$

а при $\lambda \to \pm\infty$

$$\left.\frac{dy}{d\lambda}\right|_{\lambda\to\pm\infty} = 2, \tag{29.29}$$

и F-график обладает двумя асимптотами, уравнение которых

$$y = 2\lambda + 2\lg\gamma_c \pm \lg\operatorname{ch}\left(\frac{2\delta}{\lg e}\right) = 2\lambda + 2\lg\gamma_c \pm \lg\left(2\bar{\gamma}^2 - 1\right). \tag{29.30}$$

Расстояние между асимптотами вдоль оси абсцисс

$$d_\delta = \lg\left(2\bar{\gamma}^2 - 1\right). \tag{29.31}$$

Таким образом, вид F-графика для двухцентровой модели весьма схож с видом F-графика для анизотропного распределения типа $\cos^{2k}\vartheta^*$ [см. формулу (27.23)], приведенного на рис. 48, если подобрать k, например, так, чтобы асимптоты обоих распределений совпадали, т. е. [см. выражения (27.42) и (29.31)]

$$k = \bar{\gamma}^2 - 1. \tag{29.32}$$

Для экспериментальной проверки изотропии в системе файрболов часто строится F-график отдельно для частиц, попадающих в область одного максимума. Естественно, что такая процедура возможна лишь для тех струй, у которых в распределении по λ четко разделяются два максимума, т. е. при $\sigma > 0{,}9$ (см. рис. 51).

Отметим теперь, как изменятся качественно характеристики симметричной двухцентровой модели, если файрболы разлетаются в $Ц$-системе не колинеарно направлению движения сталкивающихся нуклонов, а под некоторым углом α^*. При этом предполагается, что углы вылета вторичных частиц в $Л$-системе по-прежнему отсчитываются от направления движения первичного нуклона. Лоренц-факторы файрболов в $Л$-системе

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1^{(Fb)} &\approx \gamma_c\left(\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\cos\alpha^*\right);\\ \gamma_2^{(Fb)} &\approx \gamma_c\left(\bar{\gamma} - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\cos\alpha^*\right),\end{aligned}\right\} \tag{29.33}$$

и их отношение $\gamma_1^{(Fb)}/\gamma_2^{(Fb)}$ уменьшается с ростом α^*. Следовательно, в координатах λ расстояние 2δ между центрами распределений от обоих файрболов меньше, чем при колинеарном разлете. Можно показать [73] также, что ширина распределения от отдельного файрбола при этом меньше, чем σ_0.

Обратимся теперь к несимметричной двухцентровой модели, когда файрболы обладают различными массами ($M_1 \neq M_2$) и лоренц-факторами в $Ц$-системе ($\bar{\gamma}_1 \neq \bar{\gamma}_2$) и распадаются на различное число вторичных частиц ($n_1 \neq n_2$); направление движения файрболов по-прежнему будем считать колинеарным направлению движения первичного нуклона. Лоренц-факторы файрболов в $Л$-системе:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1^{(Fb)} &= \gamma_c\bar{\gamma}_1 + \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \approx \gamma_c\left(\bar{\gamma}_1 + \sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}\right);\\ \gamma_2^{(Fb)} &= \gamma_c\bar{\gamma}_2 - \sqrt{\gamma_c^2 - 1}\sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1} \approx \gamma_c\left(\bar{\gamma}_2 - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right).\end{aligned}\right\} \tag{29.34}$$

В координатах λ распределения от отдельных файрболов сдвинуты относительно друг друга по оси абсцисс на расстояние [ср. уравнение (29.5)]

$$\lg\gamma_1^{(Fb)} - \lg\gamma_2^{(Fb)} \approx \lg e\cdot\ln\frac{\bar{\gamma}_1 + \sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}}{\bar{\gamma}_2 - \sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1}} =$$

$$= \lg e\,\operatorname{Arch}\bar{\gamma}_1 + \lg e\,\operatorname{Arch}\bar{\gamma}_2 = \delta_1 + \delta_2 \tag{29.35}$$

и суммарное распределение вместо выражений (29.9) и (29.9′) имеет вид

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} = \frac{1}{2\lg e}\left\{\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{\lambda+\lg\gamma_c+\delta_1}{\lg e}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n_2}{n_1+n_2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{\lambda+\lg\gamma_c-\delta_2}{\lg e}\right)}\right\}; \tag{29.36}$$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{d\lambda} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_r}\left\{\frac{n_1}{n_1+n_2}\,e^{\frac{(\lambda+\lg\gamma_c+\delta_1)^2}{2\sigma_r^2}} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\,e^{\frac{(\lambda+\lg\gamma_c-\delta_2)^2}{2\sigma_r^2}}\right\}. \tag{29.36′}$$

Вычисляя стандартным методом дисперсию распределения (29.36), получаем [ср. уравнение (29.14)]

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{12}(\lg e)^2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}\lg^2\frac{\gamma_1^{(Fb)}}{\gamma_2^{(Fb)}} = \sigma_0^2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}(\delta_1+\delta_2)^2 \approx$$

$$\approx \sigma_0^2 + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}\lg^2 e\left(\operatorname{Arch}\bar{\gamma}_1 + \operatorname{Arch}\bar{\gamma}_2\right)^2. \tag{29.37}$$

В несимметричной двухцентровой модели импульсы нуклонов в $Ц$-системе после соударения не равны между собой. Коэффициент неупругости (29.21) в этом случае имеет смысл, пользуясь тем, что $T_{01}^* = T_{02}^*$, преобразовать к виду

$$K^* = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{01}^* - T_1^*}{T_{01}^*} + \frac{T_{02}^* - T_2^*}{T_{02}^*}\right) = \frac{1}{2}\left(K_1^* + K_2^*\right), \tag{29.38}$$

где K_1^* и K_2^* — коэффициенты неупругости отдельных нуклонов, участвующих в соударении. Если нуклоны после соударения остаются в $Ц$-системе быстрыми частицами ($\beta_1^*, \beta_2^* \approx 1$), что обычно и имеет

место, то с помощью преобразований Лоренца можно легко показать [аналогично выражению (29.21)], что тогда

$$\left.\begin{aligned} K_1^* &\approx K^{(Л)}; \\ K_2^* &\approx K^{(З)}, \end{aligned}\right\} \tag{29.39}$$

где $K^{(З)}$ — коэффициент неупругости в зеркальной (антилабораторной) системе координат (З-системе).

Выражение для γ_c через $\gamma_1^{(Fb)}$ и $\gamma_2^{(Fb)}$ зависит теперь от соотношения между K_1^* и K_2^*. Запишем законы сохранения энергии и импульса в $Ц$-системе:

$$\left.\begin{aligned} &M_1\bar{\gamma}_1 + M_2\bar{\gamma}_2 = 2K^*(\gamma_c - 1)m_N \approx (K_1^* + K_2^*)\gamma_c m_N; \\ &M_1\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} - M_2\sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1} = p_2^* - p_1^* \approx T_2^* - T_1^* = \\ &\qquad = (K_1^* - K_2^*)\gamma_c m_N. \end{aligned}\right\} \tag{29.40}$$

Складывая и вычитая равенства (29.40), получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} M_1\left(\bar{\gamma}_1 + \sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}\right) + M_2\left(\bar{\gamma}_2 - \sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1}\right) &= 2K_1^*\gamma_c m_N; \\ M_1\left(\bar{\gamma}_1 - \sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}\right) + M_2\left(\bar{\gamma}_2 + \sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1}\right) &= 2K_2^*\gamma_c m_N, \end{aligned}\right\} \tag{29.41}$$

из которых с учетом выражения (29.34) следует

$$\gamma_c^2 = \frac{K_2^*}{K_1^*}\gamma_1^{(Fb)}\gamma_2^{(Fb)}\frac{M_1\gamma_1^{(Fb)} + M_2\gamma_2^{(Fb)}}{M_1\gamma_2^{(Fb)} + M_2\gamma_1^{(Fb)}}. \tag{29.42}$$

Заметим, что зависимость γ_c^2 от масс файрболов сводится к зависимости от отношения M_1/M_2, которое в силу предположения о постоянстве средней энергии π-мезонов в системе файрбола [см. выражение (29.23)] можно заменить отношением чисел вторичных частиц

$$\frac{M_1}{M_2} \approx \frac{n_1}{n_2}. \tag{29.43}$$

Если файрболы движутся в $Ц$-системе достаточно быстро ($\bar{\gamma}_1,\ \bar{\gamma}_2 \gtrsim 2$), а их массы различаются не очень сильно, то соотношения (29.41) упрощаются:

$$\left.\begin{aligned} M_1\bar{\gamma}_1 &\approx K_1^*\gamma_c m_N \approx T_{01}^* - T_1^*; \\ M_2\bar{\gamma}_2 &\approx K_2^*\gamma_c m_N \approx T_{02}^* - T_2^*. \end{aligned}\right\} \tag{29.44}$$

Из соотношения (29.44) видно, что в этом случае каждый файрбол генерируется за счет энергии «одноименного» с ним нуклона, движущегося в том же направлении.

Предельным случаем несимметричной файрбольной модели является генерация лишь одного файрбола [75]. В этом случае лоренц-фактор файрбола в $Л$-системе

$$\gamma^{(Fb)} \approx \gamma_c\left(\bar{\gamma} \pm \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right), \tag{29.45}$$

где верхний знак соответствует вылету файрбола в $Ц$-системе вперед, а нижний знак — вылету файрбола назад (направление движения файрбола по-прежнему полагаем коллинеарным направлению движения первичного нуклона). Характерная особенность углового распределения в $Ц$-системе состоит в асимметричном разлете частиц. В координатах λ это распределение имеет ту же форму, что и изотропное распределение ($\sigma = \sigma_0$), но смещено относительно точки $-\lg\gamma_c$ так, что

$$\bar{\lambda} = -\lg\gamma^{(Fb)} = -\lg\gamma_c \mp \lg e\,\mathrm{Arch}\,\bar{\gamma} \tag{29.46}$$

[правило употребления знаков то же, что и в равенстве (29.45)]. Заметим, что в этом случае $\gamma^{(Fb)}$ совпадает с тем значением лоренц-фактора, которое определяется методом Кастаньоли (см. § 28).

Рассмотрим далее для определенности файрбол, вылетающий вперед в $Ц$-системе. Полагая в выражении (29.41) $M_1 = M$, $M_2 = 0$, $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}$ и используя равенство (29.45), получаем

$$\left.\begin{aligned} K_1^* &\approx K^{(Л)} \approx \frac{M_1}{2\gamma_c m_N}\left(\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right); \\ K_2^* &\approx K^{(З)} \approx \frac{M_1}{2\gamma_c m_N}\left(\bar{\gamma} - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29.47}$$

Из этих соотношений следует, что уже при $\bar{\gamma} \gtrsim 1{,}5$ коэффициенты неупругости в $Л$- и З-системах существенно различаются между собой:

$$\frac{K^{(З)}}{K^{(Л)}} \approx \frac{\bar{\gamma} - \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}}{\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \approx \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \ll 1, \tag{29.48}$$

причем нуклон-мишень теряет очень малую долю своей энергии

$$K^{(З)} \ll 1. \tag{29.49}$$

В случае файрбола, вылетающего в $Ц$-системе назад, в формулах (29.47) — (29.49) коэффициенты неупругости меняются своими местами ($K^{(Л)} \rightleftarrows K^{(З)}$).

Из соотношений (29.47) можно получить также полезные формулы, выражающие характеристики файрбола через $K^{(Л)}$ и $K^{(З)}$:

$$\bar{\gamma} = \frac{K^{(Л)} + K^{(З)}}{2\sqrt{K^{(Л)}K^{(З)}}}; \tag{29.50}$$

$$M = 2m_N\gamma_c\sqrt{K^{(Л)}K^{(З)}}. \tag{29.51}$$

§ 30. МАССА МИШЕНИ

Часто возникает необходимость определить массу частицы, покоящейся перед столкновением (масса мишени m_{02}). При упругих соударениях решение этой задачи сводится к тривиальному равенству

$$E_{01} + m_{02} = E_1 + E_2, \tag{30.1}$$

где E_1, E_2 — энергия обеих частиц после столкновения.

Если после столкновения известны энергия и трехмерный импульс $\mathbf{p}_2$ частицы-мишени, то величина m_{02} определяется столь же просто:

$$E_2^2 - p_2^2 = m_{02}^2. \tag{30.2}$$

Иная ситуация возникает при очень больших энергиях, когда доминируют множественные процессы. Хотя и легко записать соотношение, аналогичное (30.1), например

$$E_{01} + m_{02} = \sum_{i=1}^{n} E_i, \tag{30.3}$$

но на практике его трудно использовать по следующим двум причинам: 1) при больших энергиях нелегко определить величину E_0 и 2) в процессе соударения возникают нейтральные частицы, энергию которых также трудно измерить.

Для того чтобы обойти первую трудность, Н. Г. Биргер и Ю. А. Смородин [77, 78] предложили вызвавший оживленную дискуссию кинематический способ определения величины m_{02}.

Закон сохранения продольных компонент импульсов можно записать в форме

$$p_{01} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cos \vartheta_i, \tag{30.4}$$

где ϑ_i — угол вылета i-й частицы относительно вектора $\mathbf{p}_{01}$. Тогда

$$E_{01} - p_{01} + m_{02} = \sum_{i=1}^{n} (E_i - p_i \cos \vartheta_i). \tag{30.5}$$

Если E_{01} достаточно велико, то*

$$\left.\begin{aligned} E_{01} - p_{01} &\sim \frac{m_{01}^2}{2E_{01}} \ll m_{02}; \\ m_{02} &\sim \sum_{i=1}^{n} (E_i - p_i \cos \vartheta_i). \end{aligned}\right\} \tag{30.6}$$

* Полезно подчеркнуть, что соотношения (30.6) релятивистски неинвариантны и выполняются для систем координат, где $E_{01} \gg m_{01}$.

Таким образом, измерение E_{01} в данном случае сводится к определению величин p_i и $\cos \vartheta_i$. Углы измеряются на опыте; величины p_i вычисляются по значениям E_i при предположении, что все вторичные частицы пионы. Сумма величин $(E_i - p_i \cos \vartheta_i)$ для нейтральных частиц учитывается умножением аналогичной суммы для заряженных частиц на фактор 3/2. К сожалению, такой простой метод учета нейтральных частиц даст лишь нижнюю границу суммы, так как недостаточно учитывает роль медленных нейтральных барионов после соударений, которые, несмотря на свою малочисленность, вносят серьезный вклад в выражение (30.6). К аналогичному выводу приводят также и возможные просчеты для медленных заряженных барионов и неоднозначность их идентификации. Поэтому использование соотношений (30.6) даст определенный результат, если $m_{02} \geqslant m_N$ (m_N—масса нуклона). Менее однозначны выводы, когда $m_{02} < m_N$. Определение m_{02} в соответствии с соотношениями (30.6) принципиально весьма прозрачно, если полагать покоящуюся частицу свободной, т. е. если для нее выполняется $E_{02}^2 - p_{02}^2 = m_{02}^2$. Более проблематично представление, в котором под массой мишени понимается масса части некоторой покоящейся системы, участвующей в столкновении*. Если энергия связи U на много порядков меньше массы каждой части, то их можно считать квазисвободными и практически не учитывать энергию связи. Простейший пример подобного рассмотрения — вычисление характеристик δ-процесса в атомах. В этом случае $U/m_e \sim 10^{-5}$ (m_e — масса электрона) и поэтому с хорошей точностью при вычислении энергии δ-электронов их полагают свободными.

Уже иная ситуация возникает, когда мишенью является сложное ядро. В этом случае $U/m_N \sim 10^{-2}$ и здесь нужно соблюдать определенную осторожность. Для этого случая было предложено обобщение соотношений (30.6)

$$m_t + T_н - p_н \cos \vartheta_н - U_н + \alpha = \sum_{i=1}^{n} (E_i - p_i \cos \vartheta_i). \tag{30.7}$$

Здесь $T_н$, $p_н$, $U_н$ — кинетическая энергия, импульс и энергия связи нуклона в ядре; α — импульс отдачи ядра. По смыслу вывода (30.7) ясно, что здесь $m_t = m_N$. Еще более спорна попытка использовать соотношения (30.6) или (30.7) для определения массы «части» нуклонов, участвующих в столкновении, полагая, например, что соударение происходит с пионом, связанным в нуклоне. Дело в том, что многие смелые попытки, восходящие еще к основополагающим работам Юкавы, трактовать нуклон как систему, где пион слабо связан, окончились неудачей. Нельзя также утверждать, что взаимодействие пиона описывается потенциалом. Вероятно, аналогия между атомом и нуклоном в основных чертах не оправдывается. Грубо можно сказать, что пион очень сильно связан в нуклоне и

* Чтобы отличить массу, понимаемую в таком смысле, от реальной массы свободной частицы обозначим определенную выше массу через m_t.

поэтому формулы (30.6)—(30.7) мало при одны, чтобы использовать их в качестве зонда для определения «структуры» нуклонов. Анализ этого вопроса проводился во многих работах. Например, в работе [79, 80] определялась связь между четырехмерным передаваемым импульсом в одномезонных диаграммах и величиной m_t':

$$m_t' \sim -\Delta_0 + \boldsymbol{\Delta}\cos\vartheta_\Delta, \tag{30.8}$$

где Δ_0, $\boldsymbol{\Delta}$ — компоненты 4-импульса виртуального пиона в $Л$-системе; m_t' обозначает сумму (30.6) за вычетом нуклона отдачи.

Из выражений (30.8) следует, что $m_t' \sim m_\pi$ (масса пиона), лишь если $\boldsymbol{\Delta} = 0$, $\Delta_0 = -m_\pi$, т. е. в весьма частном и малоправдоподобном случае статического пиона в нуклоне.

Заметим в заключение, что сумма (30.6) приблизительно пропорциональна коэффициенту неупругости в зеркальной системе координат, а именно

$$K^{(3)} = \frac{\Sigma'(E_i - p_i\cos\vartheta_i)}{m_{02}}. \tag{30.9}$$

Здесь суммирование проводится по всем i, относящимся к вновь образованным частицам. Во втором члене суммы (30.9) скорость

$$\beta_3 \approx 1 - {}^1\!/_2\left(\frac{m_{01}}{E_0}\right)^2$$

полагается равной единице, β_3 — скорость зеркальной системы относительно $Л$-системы.

§ 31. КВАДРАТ ПЕРЕДАВАЕМОГО 4-ИМПУЛЬСА В СТРУЯХ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

При исследовании ядерных взаимодействий весьма важно измерить квадрат 4-импульса Δ^2, передаваемого той или иной группе вторичных частиц. Эта релятивистски инвариантная характеристика множественного процесса существенно зависит от его динамики, поэтому экспериментальное изучение распределений по Δ^2 и сопоставление их с различными теоретическими моделями позволяет получить ценную информацию о природе сильных взаимодействий.

Рассмотрим для конкретности нуклон-нуклонное соударение, приняв для простоты, что все генерированные частицы—π-мезоны. Разобьем все вторичные частицы произвольным образом на две группы, включив в каждую из них один вторичный нуклон. Пусть, таким образом, первую группу составляют нуклон с 4-импульсом $\mathcal{P}_1$ и π-мезоны с 4-импульсами $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$, ..., $\mathcal{P}_k$, а вторую группу—нуклон с 4-импульсом $\mathcal{P}_2$ и π-мезоны с 4-импульсами $\mathcal{P}_{k+1}$, $\mathcal{P}_{k+2}$, ..., $\mathcal{P}_n$. Обычно деление на группы производится в порядке возрастания углов ϑ_i или координаты λ_i. По определению (см. § 18) квадрат переданного 4-импульса

$$\Delta^2 = \left(\mathcal{P}_{01} - \mathcal{P}_1 - \sum_{i=3}^{k}\mathcal{P}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_{02}\right)^2 =$$

$$= \left(E_{01} - E_1 - \sum_{i=3}^{k}E_i\right)^2 - \left(\mathbf{p}_{01} - \mathbf{p}_1 - \sum_{i=3}^{k}\mathbf{p}_i\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=k+1}^{n}E_i + E_2 - E_{02}\right)^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{02}\right)^2. \tag{31.1}$$

Рассматривая каждую группу как частицы с эффективными массами $m_1^2 = s_1$ и $m_2^2 = s_2$, при больших энергиях согласно формуле (18.6) получаем

$$\Delta^2 \approx \frac{(s_1 - m_N^2)(s_2 - m_N^2)}{s} + s\sin^2\frac{\theta^*}{2}, \tag{31.2}$$

где θ^*—угол рассеяния в $Ц$-системе, т. е. угол между импульсом первичного нуклона $\mathbf{p}_{01}^*$ и суммарным импульсом первой группы $\mathbf{p}_1^* + \sum_{i=3}^{k}\mathbf{p}_i^*$. К сожалению, использовать формулу (31.2) непосредственно для обработки экспериментальных результатов практически не удается, поскольку для этого необходимо с большой точностью измерить углы и импульсы вторичных частиц с тем, чтобы найти s_1 и s_2 и угол θ^*, который входит в коэффициент при большой величине s. В связи с этим обычно вместо Δ^2 анализируется величина $\Delta_\parallel^2$, которая определяется как

$$\Delta_\parallel^2 = \Delta^2 - \Delta_\perp^2 = \boldsymbol{\Delta}_\parallel^2 - \Delta_0^2, \tag{31.3}$$

где $\boldsymbol{\Delta}_\perp$ и $\boldsymbol{\Delta}_\parallel$ — поперечная и продольная компоненты трехмерного импульса $\boldsymbol{\Delta}$. Очевидно, что $\boldsymbol{\Delta}_\parallel^2$ — также релятивистски инвариантная величина. Из уравнения с формулами § 18, где под $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ теперь следует понимать суммарные 4-импульсы первой и второй групп, видно, что $\Delta_\parallel^2$ совпадает с определенной в § 18 величиной $\Delta_{\text{мин}}^2$, т. е.

$$\Delta^2 \geqslant \Delta_\parallel^2. \tag{31.4}$$

Путем простых, но несколько громоздких выкладок $\Delta_\parallel^2$ можно выразить через величины, измеряемые в $Л$-системе [81, 82]:

$$\Delta_\parallel^2 = \left\{\sum_{i=3}^{k}p_{\perp i}\operatorname{ctg}\vartheta_i\left[\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta_i\left(1+\frac{m_\pi^2}{p_{\perp i}^2}\right)}-1\right]+\frac{p_{\perp 1}^2+m_N^2K^{(Л)}}{2E_{10}(1-K^{(Л)})}\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=k+1}^{n}p_{\perp i}\operatorname{ctg}\vartheta_i\left[\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta_i\left(1+\frac{m_\pi^2}{p_{\perp i}^2}\right)}+1\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\sqrt{E_2^2-p_{\perp 2}^2-m_N^2}+E_2-m_N\right]\right\}, \tag{31.5}$$

где энергию нуклона отдачи E_2 можно приближенно записать в виде

$$E_2 = \frac{m_N (1 - K^{(3)})}{2} \left[1 + \frac{p_{\perp 2}^2 + m_N^2}{m_N^2 (1 - K^{(3)})^2} \right]. \qquad (31.6)$$

Члены в выражении (31.6), относящиеся к нуклонам (вторые члены в каждой фигурной скобке), не зависят от характера разбиения π-мезонов по группам, и если число π-мезонов в каждой группе не слишком мало (практически достаточно, чтобы оно было $\gtrsim 2$—3), то указанными членами можно пренебречь, тем более что $\widetilde{\Delta}_{\parallel}^2$ представляет собой нижнюю границу значения Δ^2 и поэтому небольшое уменьшение $\Delta_{\parallel}^2$ не сказывается на многих выводах. Пренебрегая указанными членами и полагая, что углы вылета вторичных π-мезонов в $Л$-системе малы ($\vartheta_i \ll 1$), получаем упрощенную формулу

$$\Delta_{\parallel}^2 = \left\{ \sum_{i=3}^{k} p_{\perp i} \operatorname{tg} \vartheta_i \left(1 + \frac{m_\pi^2}{p_{\perp i}^2} \right) \right\} \left\{ \sum_{i=k}^{n} p_{\perp i} \operatorname{ctg} \vartheta_i \right\}. \qquad (31.7)$$

Если импульсы вторичных частиц не измерены, то можно прибегнуть к часто используемому предположению о постоянстве поперечного импульса

$$\bar{p}_\perp \approx 0{,}4 \div 0{,}5 \, Гэв/с, \qquad (31.8)$$

тогда

$$\Delta_{\parallel}^2 \approx \bar{p}_\perp^2 \left[\sum_{i=3}^{k} \operatorname{tg} \vartheta_i \right] \left[\sum_{i=k+1}^{n} \operatorname{ctg} \vartheta_i \right]. \qquad (31.9)$$

Практически формула (31.9) применяется только к заряженным π-мезонам

$$\Delta_{\parallel}^2 \approx \left(\frac{3}{2} \right)^2 \bar{p}_\perp^2 \left(\sum_{j=1}^{n_s^{(1)}} \operatorname{tg} \vartheta_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n_s^{(2)}} \operatorname{ctg} \vartheta_k \right), \qquad (31.10)$$

где $n_s^{(1)}$ и $n_s^{(2)}$ — числа заряженных частиц соответственно в первой и во второй группах. Естественно, что формула (31.10) очень приближенная, но ее достоинство заключается в том, что для ее использования нужно знать лишь углы вылета.

Интересный метод анализа взаимодействий, основанный на изучении Δ^2, предложен в работе [83].

Часть II

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В этой части книги для рассмотрения выводов о ядерных реакциях, вытекающих из общих свойств пространства — времени, применим квантовую механику. Эти следствия значительно богаче, чем в классической механике. Важно с самого начала подчеркнуть, что здесь мы будем заниматься только теми свойствами реакций, которые основаны на общих и хорошо установленных законах природы. Такое выделение чрезвычайно продуктивно. Оно позволяет свести изучение сложных характеристик ядерных реакций к измерению небольшого числа действительных параметров (обобщенный фазовый анализ), связать совершенно различные, на первый взгляд, процессы, кроме того, контролировать эксперименты и, наконец, определять основные характеристики новых частиц (спин, четность и т. д.).

Анализ экспериментальных данных на основе только общих кинематических соотношений приобретает все большее значение. Это происходит не только вследствие несовершенства или отсутствия динамических теорий ядерных реакций, но и вследствие того, что появляются новые возможности исследования ядерных реакций, нуждающиеся в специальном кинематическом рассмотрении. Здесь мы имеем в виду исследования ядерных реакций с пучками поляризованных частиц, реакций на ориентированных мишенях, исследование двух и даже трех кратных столкновений.

Свое изложение мы будем строить на основе фундаментального понятия S-матрицы. Свободное обращение с этим понятием стало необходимым для каждого квалифицированного экспериментатора, занимающегося исследованиями по ядерной физике, на которого в основном и рассчитана книга. Знание квантовой механики у читателя предполагается в объеме университетского курса или книг [1, 3]. Главным образом используется формулировка квантовой механики в терминах теории преобразований, введенной Дираком. Эта терминология и обозначения наиболее точно соответствуют квантовой механике и особенно удобны для наших целей. Различные коэффициенты и сложные выражения, описывающие кинематические соотношения, получают очень простую и единообразную интерпретацию через функции преобразования. Использование теории преобразований Дирака позволяет избежать теоретикогрупповой

терминологии. Мы не предполагаем у читателя знание теории групп, хотя по существу будем пользоваться некоторыми элементами ее аппарата.

В основном в книге используется нерелятивистская квантовая механика. Однако введение понятия спиральности (проекция спина на импульс) сделало рассмотрение релятивистской кинематики ядерных реакций очень простым и, более того, использование этого понятия позволило существенно упростить и нерелятивистскую кинематику. Вместе с тем мы не сочли целесообразным строить изложение только на основе проектирования спинов на импульсы и приводим оба способа параметризации S-матрицы. Сначала излагается более простой для понимания, но более громоздкий аппарат, в котором все моменты участвующих в реакции частиц проектируются на одно направление. В некоторых случаях это рассмотрение оказывается и более удобным. В последней главе приведен аппарат спиральностей и разобраны наиболее типичные его применения; для справочных целей приведены наиболее часто встречающиеся на практике кинематические характеристики ядерных реакций (угловые распределения, поляризации и т. д.) и рассмотрена связь различных параметризаций S-матрицы, включая релятивистски инвариантную параметризацию. Математический аппарат во второй части книги иногда дается с большими подробностями, чем требуется для вывода основных формул. Это сделано для того, чтобы книга оказалась полезной более широкому кругу лиц. Например, упрощение сумм произведений коэффициентов векторного сложения (см. § 43) нужно не только людям, интересующимся кинематикой ядерных реакций. Эти математические подробности при первом чтении книги рекомендуем опустить.

Глава 5

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

§ 32. S-МАТРИЦА

Обычная постановка задачи для ядерной реакции заключается в сопоставлении свойств частиц и параметров, которыми описывается состояние их движения до реакции, с параметрами и свойствами продуктов реакции. В случае, когда взаимодействие и движение частиц можно описать при помощи классической механики, говорят о сопоставлении начальных и конечных координат, импульсов частиц и каких-либо переменных, характеризующих их внутреннее состояние. В квантовой механике необходимо говорить о сопоставлении начального и конечного состояний системы. Состояние же, как известно, задается набором квантовых чисел. Таким образом, необходимо найти правило, по которому сопоставляются квантовые числа, описывающие начальное и конечное состояния системы. Например, в задаче рассеяния бесспиновой частицы силовым полем можно говорить о правиле, связывающем квантовые числа, которые характеризуют орбитальный момент l, его проекцию m на некоторое направление и энергию E в начальном и конечном состояниях. Отметим, что состояние движения бесспиновой частицы можно задавать также ее импульсом p. При взаимодействии двух бесспиновых частиц можно задавать следующие наборы квантовых чисел: l_1, l_2, m_1, m_2, E_1, E_2 или p_1, p_2. Если частицы обладают спином, то в соответствующие наборы необходимо включить числа s и μ, характеризующие величину спина и его проекцию. Если в результате столкновения могут рождаться другие частицы или изменяться внутреннее состояние сталкивающихся частиц (такие столкновения принято называть неупругими), то в число переменных нужно включить еще квантовые числа, характеризующие структуру частиц, их внутреннее состояние. Так как в нашу задачу не входит изучение структуры частиц, то все последние характеристики данной системы будем обозначать одним индексом α.

Согласно квантовой механике, состояние системы описывается волновой функцией $\psi_n(x)$, где n — индекс состояния, т. е. краткое обозначение набора упомянутых выше квантовых чисел, задающих состояние системы; x — индекс представления, т. е. набор переменных, от которых зависит волновая функция. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера *

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \tag{32.1}$$

Уравнение (32.1), определяющее приращение Ψ за некоторый малый интервал времени Δt, можно записать следующим образом:

$$\Psi(t+\Delta t) = \Psi(t) - i\int_t^{t+\Delta t} \hat{H}\Psi(t)\,dt. \tag{32.2}$$

Основываясь на этом равенстве, введем оператор $\hat{U}(t+\Delta t, t) = 1 - i\hat{H}\Delta t$, который переводит значение волновой функции от момента времени t к моменту времени $t+\Delta t$. Можно ввести и интегральный оператор $\hat{U}(t, t_0)$, преобразующий $\Psi(t_0)$ в $\Psi(t)$, где $t - t_0$ — конечная величина. Нетрудно показать [4], что

$$i\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U}. \tag{32.3}$$

Рассмотрим реакцию типа

$$I + II \to 1 + 2, \tag{32.4}$$

---

* Крышки над буквами означают, что соответствующие величины являются операторами. Здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$.

т. е. в результате столкновения частицы I с частицей II возникают частицы 1 и 2, имеющие совсем другие характеристики и даже другую природу.

Уравнение (32.1) описывает весь интересующий нас процесс, т. е. существует такое его решение Ψ, которое при $t \to -\infty$ переходит в волновую функцию $\Psi_i(x)$, описывающую две не взаимодействующие частицы I и II с заданными характеристиками движения и внутреннего состояния — Ψ_i, а при $t \to +\infty$ — в волновую функцию Ψ_f двух невзаимодействующих частиц 1 и 2. Так как на опыте регистрируются состояния невзаимодействующих частиц до и после столкновения, т. е. при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, то нас будет интересовать оператор, превращающий $\Psi(-\infty)$ в $\Psi(+\infty)$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to +\infty}} \hat{U}(t, t_0) = \hat{S}; \\ &\Psi_f(+\infty) = \hat{S}\Psi_i(-\infty). \end{aligned}\right\} \qquad (32.5)$$

Оператор $\hat{S}$ называется S-матрицей.

Как видно из наших рассуждений, чтобы найти $\hat{U}$ или $\hat{S}$, необходимо не только знать оператор $\hat{H}$ (обычно оператор $\hat{H}$ для взаимодействия ядерных частиц, конечно, неизвестен), но и уметь решать с этим $\hat{H}$ уравнение Шредингера. На первый взгляд мы нисколько не упростили задачу. Целесообразность введения оператора $\hat{S}$ заключается в том, что матричные элементы $\hat{S}$, с одной стороны, очень просто связаны с наблюдаемой характеристикой процесса — вероятностью перехода, а с другой — следствия общих законов природы непосредственно выражаются в виде свойств оператора $\hat{S}$. Таким образом, с помощью S-матрицы можно решить задачу, сформулированную во введении: выделить среди всех свойств реакций те, которые являются следствиями уже установленных законов природы.

В соответствии с определением предмета нашей книги главное внимание уделим законам сохранения. В этой связи следует отметить, что из нашего рассмотрения выпадают так называемые аналитические свойства S-матрицы, используемые в дисперсионной теории и имеющие большое значение в современной теории ядерных реакций. Хотя некоторые из аналитических свойств могут быть выведены из очень общих законов физики (таких, например, как принцип причинности), эти свойства нельзя отнести к кинематике. Однако, обсуждая целесообразность введения понятия S-матрицы и роль этого понятия в ядерной физике, нельзя не упомянуть свойства аналитичности, ибо существует довольно распространенная точка зрения, что на основе этих свойств S-матрицы можно построить полную динамическую теорию ядерных реакций. Можно не соглашаться с этой точкой зрения, но нельзя не признать, что на основе аналитических свойств S-матрицы было получено очень много важных результатов (см. например [52]). Оставляя в стороне эти важные вопросы теории ядерных реакций, займемся установлением некоторых общих свойств S-матрицы.

Покажем, что квадраты матричных элементов S-матрицы определяют вероятность обнаружить то или иное значение динамических переменных в конечном состоянии, если они заданы для начального состояния. Разложим $\Psi_i(-\infty)$ и $\Psi_f(+\infty)$ по собственным функциям оператора $\hat{Q}$, описывающего какую-нибудь динамическую переменную (момент, спин и т. п.):

$$\hat{Q}\,\Psi_q = q\Psi_q,$$

где q — собственные значения $\hat{Q}$,

$$\Psi_i(-\infty) = \sum_q C_q^i \Psi_q; \quad \Psi_f(+\infty) = \sum_q C_q^f \Psi_q.$$

Подставляя эти разложения в равенство (32.5), получаем

$$C_q^f = \sum_q S_{q'q} C_q^i.$$

Пусть в начальном состоянии величина q имела определенное значение q_0, т. е. $C_q^i = \delta_{qq_0}$*, тогда

$$C_{q'}^f = S_{q'q_0}.$$

Но, согласно общим положениям квантовой механики, $|C_{q'}^f|^2$ — вероятность обнаружить величину $q = q'$ в состоянии f; поэтому $|S_{q'q}|^2$ определяет вероятность перехода из состояния q_0 в состояние q'.

§ 33. УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Напомним, что матрица называется унитарной, если она обладает свойствами

$$\sum_n S_{n\alpha}^* S_{n\beta} = I_{\alpha\beta}; \quad \sum_\alpha S_{m\alpha} S_{n\alpha}^* = I_{mn},$$

или, короче, в символической записи:

$$\hat{S}^+\hat{S} = \hat{I} \quad \text{и} \quad \hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I} \qquad (33.1)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение, плюс — эрмитовское сопряжение); $\hat{I}$ здесь и в дальнейшем — единичная диагональная

* δ_{qq_0}, как обычно, означает символ Кронекера:

$$\delta_{qq_0} = \begin{cases} 1 \text{ при } q = q_0 \\ 0 \text{ при } q \neq q_0 \end{cases}$$

Для простоты мы рассматриваем здесь величину с дискретным спектром. Рассмотрение случая непрерывного спектра q — очевидное обобщение.

матрица. Это свойство вытекает из ортогональности и нормированности волновых функций

$$(\Psi_m, \Psi_n) = I_{mn}. \tag{33.2}$$

Под скалярным произведением понимаем (как обычно) суммирование и интегрирование по всем индексам, от которых зависит волновая функция —x (индексам представления); I_{mn} — сокращенная запись произведения δ-функций от квантовых чисел с непрерывным спектром и символов Кронекера от квантовых чисел с дискретным спектром. Соотношение (33.2) сохраняется с течением времени*:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi, \Psi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \Psi\right) + \left(\Phi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = i(\Phi, \hat{H}\Psi) - i(\Phi, \hat{H}\Psi) = 0.$$

Рассмотрим следствия, вытекающие из выражений (33.2), для введенного выше оператора $\hat{U}(t, t_0)$:

$$\Psi_\alpha(t) = \sum_n U_{\alpha n}(t, t_0)\, \Psi_n(t_0);$$

$$\Psi^*_\beta(t) = \sum_m U^*_{\beta m}(t, t_0)\, \Psi^*_m(t_0);$$

$$(\Psi_\beta \Psi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} = \sum_n U^*_{\beta n} U_{\alpha n} = \sum_n U^+_{n\beta} U_{\alpha n} = (\hat{U}\hat{U}^+)_{\alpha\beta}.$$

При $t_0 \to -\infty$ и $t \to +\infty$ получаем очень важный результат

$$\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I}.$$

Это равенство имеет простой физический смысл. Действительно, беря диагональные элементы от обеих его частей, получаем

$$\sum_n |S_{\alpha n}|^2 = 1. \tag{33.3}$$

Так как $|S_{\alpha n}|^2$ характеризует вероятность перехода из состояния n в состояние α, то равенство (33.3) просто означает, что сумма вероятностей всех переходов равна единице. Отсюда ясно, что, пропуская в сумме (33.3) какое-либо состояние, мы занижаем ее значение. Уравнения (33.1) накладывают строгие ограничения на S-матрицу различных процессов. Из этих ограничений вытекает несколько соотношений между сечениями различных процессов, изучением которых мы займемся ниже.

* Подчеркнем, что здесь использована эрмитовость $\hat{H}$.

§ 34. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Интегралами движения в квантовой механике называются динамические переменные, операторы которых $\hat{Q}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + [\hat{H}\hat{Q}] = 0.$$

Если $\hat{Q}$ явно не зависит от времени, то это уравнение сведется к условию коммутативности $\hat{Q}$ с гамильтонианом. Нетрудно понять, что такие операторы $\hat{Q}$ коммутируют и с оператором $\hat{S}$. В самом деле, оператор $\hat{S}$, согласно нашему определению, состоит из бесконечно большого числа бесконечно малых операторов, каждый из которых пропорционален $\hat{H}$, т. е.

$$[\hat{S}\hat{Q}] = 0. \tag{34.1}$$

Но коммутирующие операторы могут быть одновременно приведены к диагональному виду*. Поэтому если в качестве индексов α и n выберем интегралы движения (момент, импульс, энергия, изотопический спин и т. д.), то S-матрица будет диагональной по этим индексам**:

$$(q'\,\alpha' \mid S \mid \alpha q) = (\alpha' \mid S^q \mid \alpha)\, \delta_{q'q}, \tag{34.2}$$

где α — все прочие квантовые числа, за исключением q. Это соотношение лежит в основе теории корреляций в угловых распределениях и других важных явлений. Индекс q означает, что значение $(\alpha' \mid S^q \mid \alpha)$ зависит от q.

Следует подчеркнуть, что не все интегралы движения коммутируют между собой (например, момент и импульс, различные проекции момента). Это означает, с одной стороны, что нельзя одновременно выбрать в качестве индексов n все интегралы движения, с другой стороны, оператор $\hat{S}$ просто не зависит от некоторых квантовых чисел. Покажем, например, что S-матрица не зависит от квантового числа, характеризующего проекцию полного момента. Оператор $\hat{S}$ коммутирует со всеми операторами проекции полного момента:

$$\left.\begin{aligned} [\hat{J}_x \hat{S}] &= 0; \\ [\hat{J}_y \hat{S}] &= 0; \\ [\hat{J}_z \hat{S}] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34.3}$$

* См. книгу [1], стр. 94.

** Мы будем записывать матричные элементы согласно обозначениям Дирака: $S_{q'q} \equiv (q' \mid S \mid q)$.

Обозначим квантовое число проекции момента на ось z через M и запишем первое равенство (34.3) в матричном виде. Учитывая, что $\hat{J}_x \Psi_M = \text{const}\, \Psi_M$, получаем

$$\sum_{M''} (M' \mid J_x \mid M'')\,(M'' \alpha' \mid S \mid \alpha M) = \sum_{M''} (M' \alpha' \mid S \mid \alpha M'')\,(M'' \mid J_x \mid M).$$

Но согласно равенству (34.2) S-матрица диагональна по M:

$$(M' \mid J_x \mid M)\,(\alpha' \mid S^M \mid \alpha) = (\alpha' \mid S^{M'} \mid \alpha)\,(M' \mid J_x \mid M), \quad M' \neq M.$$

Отсюда следует, что $(\alpha' \mid S^M \mid \alpha)$ от M не зависит. Этот результат непосредственно вытекает из свойства изотропии пространства, следствием которой является закон сохранения момента. В самом деле, как было показано выше, $|S_{\alpha n}|^2$ характеризует вероятность перехода и не может зависеть от выбора системы отсчета, а квантовое число M (проекция момента) изменяется простым поворотом системы координат.

Поскольку не все интегралы движения коммутируют между собой то мы имеем некоторую свободу в выборе исходного представления S-матрицы, т. е. в выборе в качестве индексов qq' в формуле (34.2) совокупности собственных значений коммутирующих между собой интегралов движения.

Основными интегралами движения, с которыми придется иметь дело ниже, являются импульс-энергия и момент количества движения. Сохранение этих величин — строгое следствие инвариантности теории по отношению к преобразованиям координат псевдоевклидова пространства — времени. Эта инвариантность соответствует фундаментальному принципу физики — одинаковости законов природы во всех инерциальных системах отсчета. Теоретикогрупповое обсуждение релятивистской квантовой теории выходит за рамки настоящей книги (см. например [5, 6, 8]).

Для вывода кинематических соотношений нам понадобятся лишь хорошо известные из курса элементарной квантовой механики [1—3] свойства операторов момента и импульса и некоторые сведения из теории неприводимых представлений группы вращений, которые изложим ниже. Причем в целях упрощения мы не будем пользоваться терминологией теории групп.

Операторы проекций момента не коммутируют между собой, но каждый из них коммутирует с оператором квадрата момента системы $\hat{J}^2$, поэтому состояние момента задается собственными значениями операторов J^2 и J_z. Оператор импульса $\mathbf{P}$ не коммутирует с оператором момента количества движения. Соответствующие величины могут быть измерены одновременно только в системе центра инерции, когда $\mathbf{P} = 0$. В других инерциальных системах $\mathbf{P}$ можно измерить одновременно только с проекцией момента на импульс

$\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/|P|$. Проекция момента системы на ее импульс называется спиральностью и имеет большое значение в кинематике реакций.

Помимо релятивистской инвариантности, приводящей к законам сохранения момента, ниже мы рассмотрим некоторые следствия так называемых дискретных симметрий — инвариантности по отношению к отражению пространства $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, обращению времени и сопряжению частица — античастица.

Преобразованию отражения пространства можно сопоставить оператор (часто называемый оператором пространственной четности) $\hat{P}$, который действует на волновую функцию, описывающую состояние системы (см. [2] § 30). Дважды примененная операция отражения пространства является тождественным преобразованием. Следовательно, $\hat{P}^2$ — просто число, которое всегда можно положить равным единице. Иначе говоря, спектр собственных значений новой динамической переменной ограничивается ± 1. Собственное значение оператора $\hat{P}$ называется четностью системы.

Как показали эксперименты, оператор $\hat{P}$ не является строгим интегралом движения. В процессах слабого взаимодействия (например, в процессах β-распада) четность не сохраняется. Нарушение четности означает, что при преобразовании $\hat{P}$ система переходит в физически не реализуемое (не существующее в природе) состояние. Однако для очень большого класса процессов эффекты несохранения четности имеют ничтожно малое значение. Для этих процессов применение закона сохранения четности дает много важных выводов. Оператор $\hat{P}$ не коммутирует с оператором импульса, а состояния с определенным значением $\mathbf{P}$ не являются собственными состояниями оператора четности, за исключением случая $\mathbf{P} = 0$.

Особой оговорки требует применение понятия четности к системам с полуцелым значением момента. Если проделаем преобразование $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, а затем сделаем поворот $\hat{R}(2\pi n)$ вокруг любой из осей на угол $2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. § 49), то для пространства Евклида комбинация этих преобразований остается преобразованием четности. Для состояний с целым значением момента

$$\hat{P}\,\hat{R}\,(2\pi n)\,|\eta\rangle = \hat{P}\,|\eta\rangle = \eta\,|\eta\rangle,$$

где η — собственное значение оператора четности; $|\eta\rangle$ — собственная функция состояния с определенным значением η и целым значением момента, тогда как для состояний с полуцелым значением момента преобразования $\hat{P}$ и $\hat{P}\,\hat{R}\,(2\pi n)$ отличаются на $(-1)^n$-фазу, приобретаемую волновой функцией, описывающей систему с полуцелым спином при повороте на $2\pi n$. Это означает, что для состояний с полуцелым значением спина четность можно определить с точностью до знака. Однако относительная четность имеет смысл. В частности, имеет смысл утверждение, что четности электрона и позитрона имеют противоположный знак.

Выводы из инвариантности по отношению к обращению времени $t \to -t$ (этой операции сопоставляется оператор $\hat{T}$), как будет показано в следующем параграфе, сильно отличаются от выводов из инвариантности по отношению $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. В частности, введение понятия временно́й четности оказывается невозможным, а условие на S-матрицу — отличным от условия (34.2).

После того как Дирак ввел понятие античастицы и был открыт позитрон, возникла фундаментальная гипотеза: для любой системы существует система, обладающая теми же самыми физическими свойствами, но с противоположными знаками всех зарядов. Иначе основные уравнения, описывающие элементарные частицы, должны быть симметричны относительно преобразования частиц в античастицы. Иногда это преобразование называют зарядовым сопряжением. Аналогично оператору $\hat{P}$ вводится оператор $\hat{C}$, который коммутирует с операторами, описывающими преобразование пространственно-временных координат (момента, импульса, энергии) и антикоммутирует с операторами заряда

$$\hat{C}^{-1}\hat{Q}\hat{C} = -\hat{Q}; \quad \hat{C}^{-1}\hat{B}\hat{C} = -\hat{B};$$

$$\hat{C}^{-1}\hat{L}\hat{C} = -\hat{L}; \quad \hat{C}^{-1}\hat{Y}\hat{C} = -\hat{Y},$$

где $\hat{Q}$, $\hat{B}$, $\hat{L}$ — соответственно электрический, барионный и лептонный заряды; $\hat{Y}$ —гиперзаряд.

Дважды примененная операция $\hat{C}$ возвращает систему в исходное состояние, в связи с чем $\hat{C}^2 = \hat{I}$. Собственные значения оператора $\hat{C}$ при удобной нормировке $\gamma = \pm 1$ и называются зарядовой четностью системы. Ввиду того что система должна находиться в состоянии с определенным зарядом, оператор C не принадлежит к полному набору сохраняющихся операторов. Только для систем с зарядами, равными нулю (истинно нейтральных систем), оператор C может быть включен в полный набор сохраняющихся операторов, что приведет, согласно выражению (34.2), к определенному правилу отбора. Однако таких систем немного, в связи с этим основное применение закона сохранения C-четности в виде (34.2) заключается в получении соотношений между амплитудами перехода для заряженных систем. Так же как и $\hat{P}$-инвариантность, $\hat{C}$-инвариантность нарушается слабыми взаимодействиями. Поэтому для процессов, в которых слабые взаимодействия имеют определяющее значение, свойство (34.2) к интегралу движения $\hat{C}$ неприменимо. Однако для огромного большинства процессов столкновения частиц это нарушение дает лишь ничтожно малые поправки.

В связи с обнаружением нарушения $\hat{C}$- и $\hat{P}$-инвариантности была высказана гипотеза, что истинным интегралом движения является их произведение $\hat{C}\hat{P}$, так называемая комбинированная инверсия.

Смысл этого утверждения можно пояснить на примере нейтрино. В β-распаде нейтрино, испускаемое вместе с электроном, обладает спиральностью $\lambda = +1/2$, а нейтрино, испускаемое с позитроном, обладает спиральностью $\lambda = -1/2$*. Операция $\hat{P}$ меняет только знак спиральности (проекция спина на импульс является скалярным произведением псевдовектора — спина и истинного вектора — импульса) и, следовательно, переводит нейтрино в состояние, не реализуемое в природе. Операция $\hat{C}$ переводит нейтрино в антинейтрино, но не меняет знака спиральности, т. е. также дает состояние, не реализуемое в природе. Совместное же действие операций $\hat{C}$ и $\hat{P}$ переводит нейтрино с отрицательной спиральностью в антинейтрино с положительной спиральностью. Иначе говоря, операция $\hat{C}\hat{P}$ переводит одно физически реализуемое состояние в другое, также физически реализуемое.

Однако гипотеза о том, что комбинированная инверсия — точный интеграл движения, продержалась недолго. Хотя произведение $\hat{C}\hat{P}$ является и значительно более строгим интегралом движения по сравнению с $\hat{C}$ и $\hat{P}$ в отдельности и имеет довольно широкую область применимости, тем не менее в последние годы получены серьезные экспериментальные результаты, показывающие, что комбинированная инверсия также не является строгим интегралом движения. Некоторые моды распада нейтральных K-мезонов, которые строго запрещены сохранением $\hat{C}\hat{P}$-инвариантности, наблюдались. Хотя эффект и очень мал, тем не менее он ставит несколько фундаментальных вопросов, исследование которых в момент написания книги было одной из самых актуальных задач физики.

Большое значение в физике элементарных частиц имеет комбинация преобразований $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$. Инвариантность теории по отношению к этой комбинации преобразований вытекает из самых общих принципов квантовой механики и теории относительности. Так как эта комбинация включает преобразование $\hat{T}$, то она не имеет смысла динамической переменной или интеграла движения. Поэтому $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-инвариантность не является объектом применения соотношения (34.2), хотя из нее можно получить целый ряд важных соотношений. В частности, нарушение $\hat{C}\hat{P}$-инвариантности означает нарушение $\hat{T}$-инвариантности.

Помимо отмеченных интегралов движения большое значение имеют еще интегралы движения, которые в существующей теории являются динамическими переменными, совершенно не зависящими от динамических переменных, определенных в обычном пространстве — времени. Среди этих интегралов прежде всего следует отметить строгие интегралы движения: электрический заряд и барионный заряд. Сохранение этих величин установлено с огромной

* Свойства состояний, характеризуемых квантовым числом и спиральностью λ, изложены ниже, в § 53.

точностью. Кроме того, весьма вероятно, что точными являются законы сохранения лептонных зарядов — мюонного и электронного. Эти законы сохранения на основе соотношения (34.2) приводят к простым правилам отбора. Несколько более сложные правила отбора возникают при применении этого соотношения к приближенным интегралам движения — изотопическому спину, странности (или гиперзаряду) или обобщающей эти законы сохранения унитарной симметрии. Ниже мы уделим этим законам сохранения довольно небольшое место, так как их обсуждение несколько выводит нас за рамки нашей скромной цели.

Вскоре после открытия нейтрона физики обратили внимание на одинаковость его свойств с протоном и было предложено рассматривать нейтрон и протон как два зарядовых состояния одной и той же частицы — нуклона. При этом волновая функция нуклона содержит дополнительную — изотопическую — переменную, которая может принимать по аналогии с проекцией обычного спина два значения. Аналогия со спином оказалась очень глубокой. Если рассмотреть группу нуклонов и с изотопической переменной поступать так же, как со спиновой переменной: ввести изотопический спин этой группы по законам сложения моментов количества движения и предположить, что полный изотопический спин является интегралом движения,— то можно вывести некоторые следствия, получившие блестящее подтверждение в эксперименте. Исходя из этой аналогии, можно определить оператор изотопического спина как оператор, описывающий бесконечно малый поворот в некотором фиктивном изотопическом пространстве (именно так наиболее последовательно определяется оператор момента количества движения — см., например, [2]). Такое определение изотопического спина как интеграла движения неизбежно приводит к выводу, что все частицы (или поля), испытывающие сильное взаимодействие с нуклоном, должны подчиняться этой симметрии. Это и было предположено вскоре после введения в теорию π-мезонов. Открытие π-мезонов и изучение их взаимодействий блестяще подтвердило гипотезу изотопической инвариантности. А при последующих открытиях новых частиц и резонансов изотопический спин этих частиц фигурировал наряду со спином в числе основных характеристик.

Изотопический спин большое значение имеет в теории легких атомных ядер. В последние годы выявилась возможность использования этого понятия и для тяжелых ядер. Поскольку математический аппарат изотопического спина совпадает с аппаратом момента количества движения, то изложенные ниже результаты, относящиеся к обычному моменту, непосредственно переносятся на изотопический спин. Следует помнить, что в отличие от обычного момента изотопический спин — приближенный интеграл движения. Еще более сильно нарушенной оказалась упомянутая унитарная симметрия, особенно в связи с применением к ядерным реакциям. Эти нарушения настолько велики, что нецелесообразно подробно останавливаться на этой симметрии в настоящей книге.

§ 35. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ*

Если система не находится во внешнем поле, то все моменты времени для такой системы равноправны так же, как и все направления пространства. В классической и квантовой механике из этого обстоятельства вытекает закон сохранения энергии. Кроме того, в классической механике уравнения движения инвариантны по отношению к замене $t \to -t$. Пусть, например, имеем решение уравнений Ньютона, описывающих движение системы материальных точек. В момент времени $t = t_1$ радиусы-векторы точек и их скорости равны $\mathbf{r}_i(t_1)$, $\mathbf{v}_i(t_1)$ и по истечении некоторого промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ в момент t_2 эти величины принимают значения $\mathbf{r}_i(t_2)$, $\mathbf{v}_i(t_2)$. Инвариантность уравнений по отношению к замене $t \to -t$ означает, что существует также решение, характеризующееся тем, что радиусы-векторы и скорости материальных точек, равные $\mathbf{r}_i(t_2)$, $-\mathbf{v}_i(t_2)$, переходят за тот же произвольно выбранный промежуток времени в величины $\mathbf{r}_i(t_1)$, $-\mathbf{v}_i(t_1)$. Такой симметрией обладают не все системы. Примером может служить система заряженных частиц в магнитном поле. В этом случае, как известно (см., например, книгу [11]), в операцию обращения времени необходимо включить изменение направления магнитного поля на противоположное. Если же этого не сделать, то для системы обратимости во времени не существует.

Поскольку классическая механика — предельный случай квантовой механики, то следует ожидать, что обратимость во времени найдет свое отражение и в квантовой механике. Пусть рассматриваемая квантовомеханическая система консервативна, т. е. гамильтониан не зависит от времени. Уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(t) \tag{35.1}$$

при замене $t \to -t$ переходит в уравнение вида

$$-\mathrm{i}\frac{\partial \Psi(-t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(-t). \tag{35.2}$$

Последнее уравнение не совпадает с уравнением Шредингера. Это не позволяет назвать $\Psi(-t)$ обращенным во времени решением уравнения (35.1). Чтобы найти решение уравнения (35.1), рассмотрим уравнение, комплексно сопряженное с уравнением (35.2):

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi^*(-t)}{\partial t} = \hat{H}^*\Psi^*(-t). \tag{35.3}$$

Из эрмитовости $\hat{H}$ следует, что $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$ имеют одни и те же собственные значения (но, вообще говоря, различные собственные функции); это означает, что существует такой унитарный оператор $\hat{V}$, что

* Для изучения этого параграфа следует ознакомиться с §§ 36 и 41.

$$\hat{V}\hat{H}^*\hat{V}^+ = H. \tag{35.4}$$

Из выражения (35.3) при помощи соотношения (35.4) получим

$$i\frac{\partial[\hat{V}\Psi^*(-t)]}{\partial t} = \hat{H}\left[\hat{V}\Psi^*(-t)\right]. \tag{35.5}$$

Сравнивая последнее соотношение с уравнением (35.1), видим, что $\hat{V}\Psi^*(-t)$ естественно назвать решением, обращенным во времени. Таким образом, преобразование обращения времени носит необычный для квантовой механики характер: оно содержит комплексное сопряжение

$$\hat{T}\Psi(t) = \hat{V}\hat{K}\Psi(-t). \tag{35.6}$$

Здесь $\hat{T}$ — оператор обращения времени; $\hat{K}$ —оператор комплексного сопряжения.

Рассмотрим закон преобразования операторов при обращении времени, причем будем считать, что волновые функции при таком преобразовании сохраняют свой вид, а изменяются операторы динамических величин (сравни с переходом от представления Шредингера к представлению Гайзенберга [1]). Такой переход следует из общей формулы квантовой механики

$$\left(\hat{T}\Psi(t),\ \hat{Q}\hat{T}\Psi(t)\right) = \left(\Psi(-t)\widetilde{\hat{Q}}\Psi(-t)\right),$$

где $\widetilde{\hat{Q}}$ — преобразованный (обращенный во времени) оператор. Итак, для не зависящих от времени операторов имеем

$$\hat{V}^+\hat{Q}\hat{V} = \widetilde{\hat{Q}}^T, \tag{35.7}$$

где T означает, что соответствующий оператор транспонированный. Если $\widetilde{\hat{Q}} = \hat{Q}$, как это имеет место для величины $\hat{H}$, согласно выражению (35.4) и свойству эрмитовости $\hat{H}$, то будем говорить, что этот оператор инвариантен по отношению к обращению времени $t \to -t$.

Нетрудно показать, что из инвариантности $\hat{H}$ по отношению к операции $t \to -t$ следует также инвариантность S-матрицы:

$$\hat{V}^+\hat{S}\hat{V} = \hat{S}^T. \tag{35.8}$$

Это соотношение называют теоремой взаимности. Оно отражает очень общее свойство S-матрицы. Однако соотношение (35.8) представляет собой мало содержательное утверждение, пока неизвестен явный вид оператора $\hat{V}$. Чтобы найти оператор $\hat{V}$, необходимо задать трансформационные свойства операторов динамических переменных, которые составляют полный набор величин, характеризующих систему. Это определит трансформационные свойства любой другой динамической переменной. Источниками наших знаний об операторах квантовой механики являются только принцип соответствия и опыт. Поэтому наложим оператор на $\hat{V}$ требование, чтобы величины, не меняющие знака при преобразовании $t \to -t$ в классической механике (координата, энергия и т. д.), имели операторы, инвариантные по отношению к преобразованию (35.7). Величины же, меняющие знак при преобразовании $t \to -t$ в классической механике (скорость, импульс, момент, векторный потенциал электромагнитного поля и т. д.), должны иметь операторы, подчиняющиеся условию

$$\hat{V}^+\hat{Q}\hat{V} = -\hat{Q}^T. \tag{35.9}$$

Операторы спина, будучи величинами, аналогичными моменту количества движения, также должны преобразовываться согласно последнему условию. Если существует оператор $\hat{V}$, обладающий перечисленными свойствами, то по определению движение системы обратимо во времени.

Найдем явный вид матрицы оператора $\hat{V}$ для состояний, заданных квантовыми числами любого момента l, l' (например, орбитального момента одной из частиц системы), и его проекции m и m':

$$(l'm'\alpha'|V|lm\alpha),$$

здесь α и α' — остальные квантовые числа.

Воспользуемся условиями, накладываемыми на оператор $\hat{V}$ требованием обратимости во времени и эрмитовости рассматриваемых операторов:

$$\hat{V}^+\hat{l}^2\hat{V} = \hat{l}^2; \tag{35.10}$$

$$\hat{V}^+\hat{l}\hat{V} = -\hat{l}^*. \tag{35.11}$$

Из выражения (35.10) вытекает, что $\hat{V}$ диагонально по квантовому числу l. Зависимость $\hat{V}$ от квантовых чисел m и m' можно установить, решив уравнения (35.11) с использованием явного выражения для матриц проекций оператора момента (см. книгу [2], § 27):

$$(l'm'\alpha'|V|lm\alpha) = (\alpha'|V^l|\alpha)\,\delta_{l'l}\,\delta_{-m'm}\,e^{i\pi m}. \tag{35.12}$$

Если пользоваться представлением, где все остальные динамические переменные — инварианты преобразования (35.7) (квадраты моментов, спинов, импульсов и т. д.), то, учитывая унитарность $\hat{V}$, можно записать выражение (35.12) в виде

$$(l'm'\alpha'|V|lm\alpha) = \delta_{\alpha'\alpha}\,\delta_{l'l}\,\delta_{-m'm}\,e^{i\pi[\beta(\alpha,\ l)+m]},$$

где фаза β произвольна; ее можно выбрать, руководствуясь соображением удобства расчетов. Обычно β выбирают так:

$$(l'm'\alpha'|V|lm\alpha) = \delta_{\alpha'\alpha}\,\delta_{l'l}\,\delta_{-m'm}\,e^{i\pi(l+m)}. \tag{35.13}$$

Первое преимущество такого выбора β заключается в том, что матрица $\hat{V}$ действительна; второе вытекает из рассмотрения сложения моментов (см. § 41):

$$\Psi_{AJM} = \sum_{\mu_1\mu_2}(JM|j_1\mu_1 j_2\mu_2)\,\Psi_{\alpha_1 j_1\mu_1}\Psi_{\alpha_2 j_2\mu_2},$$

где Ψ_{AJM} — волновая функция полного момента. В индекс A этой функции входят $j_1, \alpha_1, j_2 \alpha_2$. Если каждое из состояний $\Psi_{\alpha_1 j_1 \mu_1}$ и $\Psi_{\alpha_2 j_2 \mu_2}$ преобразуется при замене $t \to -t$ при помощи формулы (35.13), то, используя свойство коэффициентов векторного сложения (см. § 41)

$$(J - M \mid j_1 - \mu_1 j_2 - \mu_2) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} (JM \mid j_1 \mu_1 j_2 \mu_2),$$

можно показать, что Ψ_{AJM} также преобразуется по формуле (35.13).

Таким образом, при таком выборе β нет необходимости заботиться о преобразовании фаз — все волновые функции моментов и спинов преобразуются одинаково.

Рассмотрим S-матрицу в представлении, которое определяется полным моментом J, его проекцией M и динамическими переменными, инвариантными по отношению к преобразованию $t \to -t$. Например, для реакций типа $a + X \to b + Y$ (см. предыдущий параграф) будем иметь

$$(s' l' \alpha' \mid S^J \mid sl\alpha)\, \delta_{JJ'}\, \delta_{MM'},$$

здесь s, s' — суммарный спин частиц; l', l — орбитальный момент относительного движения. Подставляя это выражение в формулу (35.8) и используя явный вид матрицы оператора $\hat{V}$ (35.13), находим, что S-матрица в таком представлении симметрична:

$$(B \mid S^J \mid A) = (A \mid S^J \mid B). \tag{35.14}$$

Этот результат отражает одно из фундаментальных свойств S-матрицы, имеющее большое значение в приложениях.

Совершенно аналогично доказывается столь же важное соотношение

$$(\mathbf{p}_f j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 \alpha' \mid S \mid \mathbf{p}_i j_{\mathrm{I}} \mu_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{II}} \mu_{\mathrm{II}} \alpha) = (-1)^{j_{\mathrm{I}} + \mu_{\mathrm{I}} + j_{\mathrm{II}} + \mu_{\mathrm{II}} + j_1 + \mu_1 + j_2 + \mu_2} \times$$
$$\times (-\mathbf{p}_i j_{\mathrm{I}} - \mu_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{II}} - \mu_{\mathrm{II}} \alpha \mid S \mid -\mathbf{p}_f j_1 - \mu_1 j_2 - \mu_2 \alpha'). \tag{35.15}$$

Здесь j_i, μ_i — спины частиц и их проекции; $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ — импульс относительного движения в начальном и конечном состояниях.

Если над функцией Ψ совершается унитарное преобразование $\hat{W}$

$$\Psi' = \hat{W}\Psi, \quad (\hat{T}\Psi)' = \hat{W}\hat{T}\Psi,$$

то из выражения (35.6) и равенства

$$(\hat{T}\Psi)' = \hat{V}'\Psi'^{*}$$

находим

$$\hat{V}' = \hat{W}\hat{V}\hat{W}^{T}, \tag{35.16}$$

т. е. оператор $\hat{V}$ преобразуется из одного представления в другое (см. § 36) не как обычная унитарная матрица, а при помощи транспонированного преобразования.

Поскольку вид оператора V' может следовать из соображений инвариантности, то выбор фаз у оператора $\hat{V}$ означает однозначный выбор фаз у матрицы преобразования $\hat{W}$. Приведем пример. Пусть оператор $\hat{V}$ задается выражением (35.13) и пусть $\hat{W}$ преобразуется из представления lm в представление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{n}$:

$$W = e^{i\gamma_l} Y_{lm}(\mathbf{n}), \tag{35.17}$$

где γ_l — фазовый множитель.

Вектор $\mathbf{n}$ может быть направлен по r (радиусу-вектору частицы) или по p (импульсу частицы). Из требования обратимости времени ($\hat{V}^{+}\hat{\mathbf{p}}\hat{V} = -\hat{\mathbf{p}}^{*}$; $\hat{V}^{+}\hat{\mathbf{r}}\hat{V} = \hat{\mathbf{r}}$) имеем

$$(\mathbf{p}' \mid V \mid \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}); \quad (\mathbf{r}' \mid V \mid \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{35.18}$$

Преобразуем с учетом (35.17) оператор $\hat{V}$, имеющий вид (35.13), согласно формуле (35.16)

$$(\mathbf{n}' \mid V \mid \mathbf{n}) = \sum_{lm\, l'm'} e^{i\gamma_{l'}} Y_{l'm'}(\mathbf{n}')\, \delta_{l'l}\, \delta_{-m'm}\, e^{i\pi(l+m)}\, e^{i\gamma_l} Y_{lm}(\mathbf{n}) =$$

$$= \sum_{lm} e^{2i\gamma_l + i\pi l} Y^{*}_{lm}(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) = \begin{cases} \delta(\mathbf{n}' + \mathbf{n}) & \text{при } \gamma_l = 0 \\ \delta(\mathbf{n}' - \mathbf{n}) & \text{при } \gamma_l = \dfrac{\pi l}{2}. \end{cases}$$

Сравнивая эту формулу с выражением (35.18), видим, что выбору фаз в выражении (35.13) отвечают волновые функции орбитального момента в p-представлении $Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right)$, а в r-представлении — $-e^{i\frac{\pi l}{2}} Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = i^{l} Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$.

§ 36. ФУНКЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы выяснили важнейшие свойства S-матрицы. Теперь необходимо установить, каким образом эти свойства связаны с экспериментально наблюдаемыми величинами, например сечениями, угловыми распределениями и т. д.

Выше было показано, что квадраты матричных элементов S-матрицы определяют вероятности переходов из определенного начального состояния, заданного набором квантовых чисел i, в конечное состояние, характеризуемое набором f. Это означает, что если в качестве квантовых чисел выберем углы θ, φ, определяющие направление движения частицы, то квадрат S-матрицы будет давать плотность

вероятности обнаружить частицы летящими в данном направлении. Если же выберем квантовые числа l, m, то получим вероятность обнаружить частицы с данными величиной и проекцией момента количества движения.

Займемся теперь преобразованием S-матрицы, заданной через один набор квантовых чисел, в S-матрицу, заданную через другой набор. Такие преобразования будут чрезвычайно полезны в дальнейшем. Приведем пример. Законы сохранения накладывают ряд ограничений на вид S-матрицы. Если в наборы квантовых чисел α и n входят квантовые числа интегралов движения, то по ним S-матрица диагональна. Если мы будем интересоваться ограничениями, накладываемыми законами сохранения, например, на угловые распределения, то должны перевести S-матрицу из представления, заданного квантовыми числами интегралов движения, в представление, задаваемое углами.

Согласно общим принципам квантовой механики [1—3], для того чтобы найти вероятность обнаружения в заданном состоянии величины q, надо разложить $\Psi_n(x)$ по собственным функциям оператора этой величины $\hat{Q}$

$$\Psi_n(x) = \sum_q C_q^n \Psi_q(x) \qquad (36.1)$$

и взять квадрат модуля коэффициента разложения C_q^n. Набор коэффициентов C_q^n является волновой функцией в q-представлении.

Выражение (36.1) в обозначениях Дирака запишется так:

$$(x \mid n) = \sum_q (x \mid q)(q \mid n). \qquad (36.2)$$

Отсюда следует, что собственная функция оператора $\hat{Q}$: $\Psi_q(x) \equiv (x \mid q)$—функция преобразования из представления q в представление x.

Удобство обозначений Дирака заключается в том, что они наиболее точно и в наиболее общем виде отражают основные законы квантовой механики. В частности, обозначение функций преобразования $(x \mid q)$ подчеркивает некоторую симметрию между индексами представления x и индексами состояния q. Кроме того, эта система обозначений позволит в простой форме пояснить смысл различных коэффициентов, встречающихся в теории угловых распределений, корреляций и в других задачах.

Нетрудно показать, что $(x \mid q)^*$ равно $(q \mid x)$, т. е. функции, совершающей обратное преобразование. В самом деле, умножим $(x \mid n)$ на $(x \mid q')^*$ и проинтегрируем по x. Тогда в силу ортогональности и нормировки функций $(x \mid q)$ получим

$$\int (x \mid q')^* (x \mid n)\, dx = (q' \mid n),$$

откуда по определению функции преобразования: $(x \mid q')^* = (q' \mid x)$. Из изложенного ясно, что, например, в случае дискретных спектров

величин x и q функция $|(x \mid q)|^2$ является одновременно вероятностью найти величину q в состоянии x и вероятностью найти x в состоянии q.

Приведем примеры хорошо известных волновых функций квантовой механики, которые имеют большое значение как функции преобразования. Собственная функция оператора импульса в координатном представлении есть плоская волна

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\mathbf{pr}} \equiv (\mathbf{r} \mid \mathbf{p}),$$

а комплексно сопряженная функция $(\mathbf{r} \mid \mathbf{p})^* = (\mathbf{p} \mid \mathbf{r})$ есть собственная функция $\mathbf{r}$ в $\mathbf{p}$-представлении.

Собственная функция оператора момента в импульсном представлении имеет вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv (\vartheta\varphi \mid lm),$$

где ϑ, φ — полярные углы импульса.

Известно следующее разложение:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\mathbf{pr}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(pr)}{\sqrt{pr}}\, i^l Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi),$$

где θ и Φ — полярные углы вектора $\mathbf{r}$; $J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя. Его можно записать так:

$$(\mathbf{r} \mid \mathbf{p}) = \sum_{lm} (\theta\Phi \mid lm)(r \mid p)_l (lm \mid \vartheta\varphi).$$

Здесь мы полсжили с учетом результатов § 35:

$$(\theta\Phi \mid lm) = i^l Y_{lm}(\theta, \Phi);$$

$$(r \mid p)_l = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(pr)}{\sqrt{pr}}.$$

Эти функции ортогональны и нормированы и являются важными примерами функций преобразования:

$$\sum_{l,\, m} (\mathbf{n}' \mid lm)(lm \mid \mathbf{n}) = (\mathbf{n}' \mid \mathbf{n}) = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}').$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — единичные векторы, направление которых определяется соответственно углами $\vartheta\varphi$ и $\vartheta'\varphi'$:

$$\int (l'm' \mid \mathbf{n})\, d\Omega_{\mathbf{n}}\, (\mathbf{n} \mid lm) = \delta_{l'l}\, \delta_{m'm};$$

$$\int (p' \mid r)_l\, r^2\, dr\, (r \mid p)_l = \frac{1}{p^2}\, \delta(p' - p).$$

Заметим, что $\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})=\delta(\mathbf{n}'-\mathbf{n})\frac{1}{p^2}\delta(p'-p)$.

Преобразование матриц операторов из одного представления в другое является очевидным следствием изложенного:

$$(\eta'|P|\eta)=\sum_{\xi\xi'}(\eta'|\xi')(\xi'|P|\xi)(\xi|\eta),$$

т. е. переход осуществляется при помощи тех же функций преобразования. Это, очевидно, относится и к оператору $\hat{S}$.

Зная вид S-матрицы в представлении, где за переменные ξ и ξ' приняты интегралы движения, и зная функции преобразования от этого представления в представление, соответствующее условиям опыта, $(\xi|\eta)$, нетрудно получить S-матрицу в нужном представлении, а следовательно, и связанные с ней экспериментально наблюдаемые величины. Для более полного ознакомления с функциями преобразования и их свойствами читателю следует обратиться к стройному изложению квантовой механики в книге Дирака [7].

§ 37. СВЯЗЬ S-МАТРИЦЫ С ЭФФЕКТИВНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Как уже отмечалось, квадрат матричного элемента S-матрицы определяет вероятность обнаружить в конце процесса то или иное состояние системы. Зная эту вероятность, вычислим эффективное сечение процесса. До сих пор мы рассматривали задачу о столкновении частиц в очень общем виде, понимая под начальным i- и конечным f-состояниями разнообразные состояния многих частиц.

Рассмотрим теперь задачу о столкновении двух частиц. Пусть до столкновения (при $t\to-\infty$) частица I имела спин j_{I} и проекцию спина μ_{I}, частица II—спин j_{II} и проекцию спина μ_{II}; частицы двигались, не взаимодействуя, с импульсом p в системе центра инерции. Зададим также индекс канала * α-величину, определяющую тип частиц I и II (мезоны, нейтроны, протоны и т. д.). Под состоянием f пока можно понимать любое состояние любого числа частиц, которые могут возникнуть в результате столкновения частиц I и II. Эффективное поперечное сечение определяется отношением числа событий данного типа в единицу времени, приходящееся на одну частицу мишени, к потоку налетающих частиц через единицу поверхности. Согласно этому определению необходимо найти не просто вероятность осуществления в результате взаимодействия состояния f, а вероятность возникновения этого состояния в единицу времени.

* Мы придерживаемся здесь обычной в ядерной физике терминологии. Каналами реакций называют различные пути (в смысле свойств продуктов реакции), которыми может идти реакция. В понятие канала часто включают не только квантовые числа, характеризующие внутреннее состояние частиц, но и суммарный спин частиц и орбитальный момент.

Выделим для этой цели среди индексов S-матрицы в явном виде энергию начального состояния и воспользуемся тем, что энергия является одним из интегралов движения:

$$(f|S|i)=(f_0|S^E|i_0)\,\delta(E_f-E_i), \tag{37.1}$$

где f_0 и i_0— квантовые числа, характеризующие начальные и конечные состояния, исключая энергию E.

Возведем это выражение в квадрат и получим

$$|(f|S|i)|^2=|(f_0|S^E|i_0)|^2\cdot|\delta(E_f-E_i)|^2=$$

$$=\lim_{t\to\infty}|(f_0|S^E|i_0)|^2\,\delta(E_f-E_i)\int_{-t}^{t}\frac{1}{2\pi}\,e^{i(E_f-E_i)t}\,dt.$$

Интегрируя это выражение по всем E_f, найдем

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{2\pi}|(f_0|S^E|i_0)|^2\,\Delta t,$$

откуда следует, что вероятность перехода в единицу времени равна

$$\frac{1}{2\pi}|(f_0|S^E|i_0)|^2. \tag{37.2}$$

О матрице $(f_0|S^E|i_0)$ иногда говорят как о заданной на поверхности энергии.

Найдем поток частиц в состоянии $|i_0)$. Начальное состояние зададим набором $|\alpha j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}\mathbf{p})$. Так как в этом состоянии импульс имеет определенное значение, то поток, как известно [1], равен $v/(2\pi)^3$. Состояние же $|i_0)$ задается не квантовым числом p, а квантовым числом энергии относительного движения частиц E.

Нетрудно показать, что волновые функции $|\alpha j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}\mathbf{p})$ и $|i_0)$ этих состояний связаны простым соотношением:*

* Докажем это соотношение. Пусть $\Psi_{\mathbf{p}}=\Psi_{p\,\mathbf{n}}$ есть волновая функция, нормированная согласно условию:

$$\int\Psi^*_{p\,\mathbf{n}}\Psi_{p'\,\mathbf{n}}\,d\tau=\delta(p-p')=\frac{1}{p^2}\delta(p-p')\,\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}')=\frac{1}{p^2\left(\frac{dp}{dE}\right)}\delta(E-E')\,\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}').$$

Здесь n—единичный вектор по направлению p. Сравнивая это с условием нормировки для $\Psi_{E\,\mathbf{n}}$

$$\int\Psi^*_{E\,\mathbf{n}}\Psi_{E'\,\mathbf{n}'}\,d\tau=\delta(E-E')\,\delta(\mathbf{n}'-\mathbf{n}),$$

находим

$$\Psi_{E\,\mathbf{n}}=p\sqrt{\frac{dp}{dE}}\,\Psi_{p\,\mathbf{n}}.$$

Замечая, что $dE/dp=v$, получаем формулу (37.3).

$$|i_0) = |\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II}\,\mathbf{p})\frac{p}{\sqrt{v}}. \qquad (37.3)$$

Отсюда находим выражение для потока частиц в состоянии $|i_0)$:

$$\frac{p^2}{(2\pi)^3}. \qquad (37.4)$$

Таким образом, выражение для эффективного сечения примет вид:

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2}|(f_0|S^E|\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II}\,\mathbf{n})|^2. \qquad (37.5)$$

Эту величину σ_{f_0} можно выразить и через матричные элементы S-матрицы в представлении, где за переменные взяты lm вместо n:

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2}\left|\sum_{lm}(f_0|S^E|\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II} lm)(lm|\,\mathbf{n})\right|^2. \qquad (37.6)$$

Из предыдущего параграфа видно, что $(\mathrm{lm}\,|\,\mathbf{n}) = Y^*_{lm}(\mathbf{n})$. Выберем в качестве оси z направление падающего пучка, тогда

$$Y^*_{lm}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{-m0}$$

и выражение (37.6) примет вид

$$\sigma_{f_0} = \pi\lambda^2\left|\sum_l \sqrt{2l+1}\,(f_0|S^E|\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II} l0)\right|^2, \qquad (37.7)$$

где λ — длина волны де Бройля.

Покажем, что найденное выражение для сечения совпадает в предельном случае с выражением, получаемым в классической механике. Пусть система обладает такими свойствами, что реакцию вызывают только частицы с определенным орбитальным моментом $l = l'$. Кроме того, пусть реакция идет с максимальной интенсивностью, т. е. соответствующий квадрат матричного элемента S-матрицы равен единице.

В этом случае из выражения (37.7) находим

$$\sigma_{l'} = \pi\lambda^2(2l'+1).$$

Получим этот результат из квазиклассических соображений. Пусть на мишень падает параллельный пучок частиц. Момент частицы относительно центра мишени равен $p\rho$, где p — импульс; ρ — прицельный параметр; но, с другой стороны, момент количества движения может принимать только дискретные значения $\sqrt{l(l+1)}$, поэтому для $l \gg 1$ будет выполняться приближенное равенство $p\rho \approx l$ или $\rho \approx l\lambda$, т. е. частицы с данной длиной волны и орбитальным моментом l пролетают на довольно определенном расстоянии от начала

координат. Найдем площадь кольца в плоскости, перпендикулярной направлению потока, на которую попадают частицы с заданным моментом l:

$$\sigma_l = \pi\rho^2_{l+1} - \pi\rho^2_l = \pi\lambda^2\left[(l+1)^2 - l^2\right] = \pi\lambda^2(2l+1).$$

Отсюда видно, что полученное выше эффективное сечение при больших l переходит в сечение, определяемое в классической механике как площадь кольца в плоскости, перпендикулярной потоку частиц.

Найденное выражение (37.7) не является наиболее общим выражением сечения любого процесса, идущего при столкновении двух частиц. Мы нашли сечение перехода σ_f из состояния Ψ_i в состояние Ψ_f, беря квадрат матричного элемента оператора $\hat{S}$. В случае упругого рассеяния частиц задача ставится таким образом, что интересуются не просто вероятностью остаться системе в первоначальном канале, а вероятностью того, что в результате взаимодействия система возвратится в исходный канал. Это означает, что из волновой функции Ψ_f надо вычесть волновую функцию Ψ_i:

$$\Psi'_f = \Psi_f - \Psi_i = (\hat{S} - \hat{I})\,\Psi_i,$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица, и для вычисления сечения упругого рассеяния брать квадрат матричного элемента оператора $\hat{S} - \hat{I}$. Матрица $\hat{I}$, как известно (см. книгу [1]), во всех представлениях остается единичной. Поэтому общее выражение сечения, включая и упругие процессы, примет вид

$$\sigma_{f_0} = \pi\lambda^2\left|\sum_l \sqrt{2l+1}\left[(f_0|\,\hat{S} - \hat{I}\,|\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II} l0)\right]\right|^2. \qquad (37.8)$$

Если пучки сталкивающихся частиц не поляризованы, то это выражение надо усреднить по проекциям спинов начальных частиц. Это дает

$$\overline{\sigma}_{f_0} = \frac{1}{(2j_{\rm I}+1)(2j_{\rm II}+1)}\sum_{\mu_{\rm I}\mu_{\rm II}}\sigma_{f_0}. \qquad (37.9)$$

Общее выражение для сечения через матричные элементы S-матрицы в представлении, где за переменные вместо lm взяты $\mathbf{n}$, имеет вид

$$\sigma_{f_0} = \frac{4\pi^2}{p^2}|(f_0|\,\hat{S} - \hat{I}|\alpha j_{\rm I}\mu_{\rm I} j_{\rm II}\mu_{\rm II}\,\mathbf{n})|^2. \qquad (37.10)$$

Полученные выше выражения для сечений справедливы для системы центра инерции — основной системы при изучении ядерных реакций. Однако экспериментальная техника позволяет изучать последовательные двойные и даже тройные столкновения частиц, столкновения встречных и пересекающихся пучков. Эти постановки опытов требуют релятивистски ковариантного определения основных величин, т. е. такого определения, чтобы сечения и матричные элементы S-матрицы можно было с помощью преобразований Лоренца преобразовать из одной системы координат в другую.

S-матрица была выше введена исходя из уравнения Шредингера, т. е. исходя из предположения, что ядерная реакция может быть описана на основе метода Гамильтона. Однако эта гипотеза не обязательна и, более того, широко распространены попытки построения теории элементарных частиц, в которых с самого начала постулируется существование S-матрицы и основные уравнения теории пишутся для ее матричных элементов. Так же как и в этих подходах (их изложение, естественно, не входит в нашу задачу), постулируем, что существует унитарный оператор S (S-матрица), который одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что оператор S коммутирует с операторами $\hat{\Lambda}_i$, представляющими преобразование Лоренца:

$$[S, \hat{\Lambda}_i] = 0. \qquad (37.11)$$

Это выражение можно рассматривать как естественное обобщение (34.1), где под Q следует понимать полный импульс, полный момент количества движения, ибо в релятивистской квантовой механике операторы этих величин вводятся (см., например, книгу [6]) как операторы бесконечно малых преобразований Лоренца.

Прежде чем переходить к релятивистски инвариантному выражению для сечений, обсудим задание конечного состояния f_0, которое пока не было фиксировано. Специфика ядерной физики такова, что в конечном состоянии измеряются только импульсы и заряды частиц. Сведения о спиновых переменных получаются исследованием вторичного рассеяния или распада частиц-продуктов, т. е. опять-таки на основе измерения импульсов (направлений) частиц. В связи с этим среди квантовых чисел, входящих в набор f, обязательно встречаются импульсы частиц продуктов $\mathbf{p}_i$. Поскольку оператор импульса обладает непрерывным спектром, а его собственные функции нормируются на δ-функцию:

$$\langle \mathbf{p}_i' | \mathbf{p}_i \rangle = \delta(\mathbf{p}_i' - \mathbf{p}_i) \text{ и } \int \langle \alpha' | \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \mathbf{p} | \alpha \rangle = \langle \alpha' | \alpha \rangle,$$

то квадрат модуля матричного элемента S-матрицы определяет, как известно из квантовой механики, плотность вероятности; вероятность получается умножением квадрата модуля на дифференциал спектра. В случае, когда f_0 включает импульсы n частиц-продуктов $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, дифференциалом спектра является произведение $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 \ldots d\mathbf{p}_n$. Это произведение часто называют элементом фазового объема.

При переходе к релятивистскому описанию желательно ввести вместо трехмерных импульсов четырехмерные, но при этом необходимо учесть, что квадраты четырехмерных импульсов частиц связаны с их массами $p_i^2 = -m_i^2$. Это достигается следующей нормировкой:

$$\int \langle \alpha | p \rangle \delta(p^2 + m^2) d^4 p \langle p | \alpha \rangle = \langle \alpha' | \alpha \rangle. \qquad (37.12)$$

Здесь p — четырехмерный импульс.

Принимая во внимание, что

$$\delta(p^2 + m^2) = \frac{\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)}{2E},$$

где

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2},$$

видим, что вероятность можно представить в виде двух сомножителей, каждый из которых релятивистски инвариантен

$$|\langle \alpha | p \rangle|^2 \text{ и } \frac{d\mathbf{p}}{E}.$$

Таким образом, элемент фазового объема в релятивистской теории дается выражением $\frac{d\mathbf{p}_1}{E_1} \ldots \frac{d\mathbf{p}_n}{E_n}$, а релятивистски инвариантные матричные элементы операторов по состояниям с определенными импульсами p получаются выделением множителей $\frac{1}{\sqrt{E_i}}$

$$\langle p_1' \ldots p_n' | Q' | p_1 \ldots p_m \rangle = (\sqrt{E_1'} \ldots \sqrt{E_2'}) \langle \mathbf{p}_1' \ldots \mathbf{p}_n' | Q' | \mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_m \rangle \times \\ \times (\sqrt{E_1} \ldots \sqrt{E_m}). \qquad (37.12')$$

Приведенное рассуждение позволяет записать выражение для сечения через релятивистски инвариантную S-матрицу

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{v(2E_\mathrm{I})(2E_\mathrm{II})} \left(\frac{d\mathbf{p}_1}{E_1} \ldots \frac{d\mathbf{p}_n}{E_n} \right) \delta^4(p_f - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) \times$$

$$\times \frac{1}{(2j_\mathrm{I}+1)(2j_\mathrm{II}+1)} \sum_{\mu_\mathrm{I} \mu_\mathrm{II}} \sum_{s_f} |\langle f | \hat{S} - I | \alpha j_\mathrm{I} \mu_\mathrm{I} j_\mathrm{II} \mu_\mathrm{II} \mathbf{p} \rangle|^2; \qquad (37.13)$$

здесь $\sum_{s_f}$ — суммирование по спинам конечных частиц, четырехмерная δ-функция отражает закон сохранения 4-импульса [в отличие от перехода к формуле (37.2) мы не проинтегрировали по E_f и сохранили δ-функцию, выражающую закон сохранения трехмерного импульса]; v — относительная скорость.

Соответствие формул (37.10) и (37.13) легко устанавливается на основе соотношения (34.2) в применении к 4-импульсу и формулы (37.3):

$$(f | S | \alpha' p_\mathrm{I} p_\mathrm{II}) \delta^4(P_f - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) = (f | S | \alpha' \mathbf{p}_\mathrm{I} \mathbf{p}_\mathrm{II}) \sqrt{E_\mathrm{I} E_\mathrm{II}} \delta^4(P_f - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) = \\ = (f | S | i_0) \frac{\sqrt{v}}{p} \sqrt{E_\mathrm{I} E_\mathrm{II}} \delta^4(Pf - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}).$$

Возведение в квадрат трехмерной части δ-функции аналогично переходу от (37.1) к (37.2):

$$[\delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{p}_\mathrm{I} - \mathbf{p}_\mathrm{II})]^2 = \frac{V}{(2\pi)^3}\,\delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{p}_\mathrm{I} - \mathbf{p}_\mathrm{II}).$$

Для принятой нами нормировки плоских волн: $e^{i\mathbf{pr}}/(2\pi)^{3/2}$ нормировочный объем $V=(2\pi)^3$. За исключением первого множителя, выражение (37.13) явно релятивистски инвариантно. Этот множитель имеет одинаковый вид в системе центра инерции и в лабораторной системе

$$\frac{1}{vE_\mathrm{I}E_\mathrm{II}} = \frac{1}{|v_\mathrm{I} - v_\mathrm{II}|\,E_\mathrm{I}E_\mathrm{II}} = \frac{1}{E_\mathrm{II}|\mathbf{p}_\mathrm{I}| + E_\mathrm{I}|\mathbf{p}_\mathrm{II}|} \qquad (37.14)$$

и имеет инвариантное обобщение

$$\frac{1}{\sqrt{(p_\mathrm{I}, p_\mathrm{II})^2 - m_\mathrm{I}^2 m_\mathrm{II}^2}}, \qquad (37.15)$$

где $(p_\mathrm{I}, p_\mathrm{II})$ — скалярное произведение четырехмерных векторов. Таким образом, приходим к релятивистски инвариантному выражению для сечения (формула Мёллера) в его наиболее общем виде:

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{V\sqrt{(p_\mathrm{I}p_\mathrm{II})^2 - m_1^2 m_2^2}}\left[\frac{d\mathbf{p}_1}{E_1}\ldots\frac{d\mathbf{p}_n}{E_n}\right]\delta^4(p_f - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II})\times$$

$$\times\frac{1}{(2I_\mathrm{II}+1)(2I_\mathrm{II}+1)}\sum_{\mu_\mathrm{I}\mu_\mathrm{II}}\sum_{s_f}|\langle f|\hat{S}-1|\alpha j_\mathrm{I}\mu_\mathrm{I}\, j_\mathrm{II}\mu_\mathrm{II}\, p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}\rangle|^2. \qquad (37.16)$$

Рассмотрим важный случай, когда в конечном состоянии имеется только две частицы. Исключим δ-функции, выполняя интегрирование по импульсам конечного состояния

$$\int\frac{d\mathbf{p}_1}{E_1}\int\frac{d\mathbf{p}_2}{E_2}\,\delta^4(p_1 + p_2 - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}). \qquad (37.17)$$

Это легко сделать в системе центра инерции $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$.

Интеграл последнего выражения

$$\int\frac{p^2\,dp\,d\Omega}{E_1E_2}\,\delta(E_1 + E_2 - E_\mathrm{I} - E_\mathrm{II}) = \int\frac{p}{(E_1+E_2)}\,d\Omega.$$

Таким образом, получаем выражение для дифференциального сечения бинарной реакции через релятивистски инвариантную S-матрицу в системе центра инерции:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\pi}{W}\right)^2\left(\frac{p}{p_i}\right)\frac{1}{(2j_\mathrm{I}+1)(2j_\mathrm{II}+1)}\cdot \qquad (37.18)$$

$$\sum_{\mu_\mathrm{I}\mu_\mathrm{II}}\sum_{s_f}|\langle f|S-1|\alpha j_\mathrm{I}\mu_\mathrm{I}\, j_\mathrm{II}\mu_\mathrm{II}p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}\rangle|^2;$$

здесь $W = E_\mathrm{I} + E_\mathrm{II} = E_1 + E_2$ — полная энергия; $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_\mathrm{I} = -\mathbf{p}_\mathrm{II}$ — импульс начального состояния.

Глава 6

ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ S-МАТРИЦЫ

§ 38. СВЯЗЬ СЕЧЕНИЙ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

На основании формулы (37.8) можно сделать несколько общих выводов о свойствах эффективных сечений.

1. Допустим, что взаимодействие частиц осуществляется только в состоянии с определенным орбитальным моментом l_1 (т. е. специфика взаимодействия такова, что отличны от нуля элементы S-матрицы с $l = l_1$); тогда

$$\sigma_{f_0}^{l_1} = \pi\lambda^2\,(2l_1+1)\,|\langle f_0|S|\alpha\, j_\mathrm{I}\mu_\mathrm{I}\, j_\mathrm{II}\mu_\mathrm{II}\, l\ 0\rangle|^2.$$

Эту величину называют парциальным сечением.

Из выражения (33.1) вытекает, что $|\langle f_0|S|i_0\rangle|^2 \leqslant 1$, т. е. парциальное сечение любого неупругого процесса не может превышать $\pi\lambda^2(2l+1)$. Это хорошо согласуется с обсуждавшимся выше результатом классической механики. Унитарность S-матрицы (33.1) при этом выражает тот простой факт, что число актов, в которых возникает состояние f_0, не может превышать число частиц, попадающих на мишень.

2. Не существует неупругих процессов, которые не сопровождались бы одновременно процессом упругого рассеяния. В самом деле, если хотя бы один элемент S-матрицы $\langle f_0|S|i_0\rangle$ отличен от нуля, то в силу свойства унитарности диагональные элементы S-матрицы по модулю меньше единицы, а это означает, что сечение упругого рассеяния согласно выражению (37.8) отлично от нуля.

3. Из полученных выше общих результатов можно очень просто вывести известные выражения эффективных сечений рассеяния бесспиновых частиц. В этом случае, используя выражения (34.1) и (34.2), представим S-матрицу в виде

$$S^l\delta_{ll'}\,\delta_{mm'}(E'-E). \qquad (38.1)$$

Из требования унитарности при отсутствии неупругих процессов следует $S^l S^{l*} = 1$, или

$$S^l = e^{2i\delta_l}. \qquad (38.2)$$

Подставляя это выражение в формулу (37.8), конечное состояние в которой теперь характеризуется определенным моментом l, получаем парциальное сечение

$$\sigma^l = \pi\lambda^2\,|\sqrt{2l+1}\,(e^{2i\delta_l}-1)|^2 = 4\pi\lambda^2(2l+1)\sin^2\delta_l,$$

а суммарное сечение находим суммированием по всем l:

$$\sigma = 4\pi\lambda^2\sum_l(2l+1)\sin^2\delta_l. \qquad (38.3)$$

Здесь δ_l — фаза рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния находим из выражения (37.8), задавая конечное состояние f_0 углами θ, φ и переведя S-матрицу (38.1), (38.2) в это представление с помощью функции преобразования

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta);$$

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4}\left|\sum_l (2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) P_l(\cos\theta)\right|^2 d\Omega^*. \qquad (38.4)$$

Интегрирование выражения (38.4) по углам, как известно, дает соотношение (38.3). Из проделанного вывода формул (38.3) и (38.4) видно, что здесь использованы только общие свойства S-матрицы**.

Рассмотрим теперь случай, когда возможны и неупругие процессы при столкновении бесспиновых частиц. В этом случае из условия унитарности уже нельзя получить простого выражения для S-матрицы, и под l в формуле (38.1) следует понимать суммарный момент частиц, образовавшихся в результате столкновения.

Для упругого рассеяния l — по-прежнему орбитальный момент. Поэтому сечение упругого рассеяния получится из выражения (38.4) заменой $e^{i\delta_l}$ комплексным числом S^l с модулем, меньшим единицы.

$$d\sigma_s = \frac{\lambda^2}{4}\left|\sum_l (2l+1)\left(S^l - 1\right) P_l(\cos\theta)\right|^2 d\Omega.$$

Интегрируя по углам, получаем полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_s = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)|S^l - 1|^2. \qquad (38.5)$$

Полное сечение всех неупругих процессов найдем при помощи формулы (37.8), выбрав в качестве f_0 набор квантовых чисел, включающий полный момент разлетающихся частиц:

$$\sigma_r = \pi\lambda^2 \sum_{n,\,l} (2l+1)\,|(n|S^l|0)|^2.$$

Под суммированием по n понимаем, как обычно, суммирование по всем дискретным переменным, включая перечисление всех типов реакций, и интегрирование по всем непрерывным переменным.

Используем условие унитарности

$$\sum_n |(n|S^l|0)|^2 + |(0|S^l|0)|^2 = 1, \quad (0|S^l|0) = S^l,$$

откуда

$$\sigma_r = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)\,(1 - |S^l|^2). \qquad (386)$$

Пусть $S^l = B_l e^{i\delta_l}$. Тогда парциальное сечение рассеяния можно записать в виде

$$\frac{\sigma_s^l}{\pi\lambda^2(2l+1)} = 1 - 2B_l\cos\delta_l + B_l^2,$$

а парциальное сечение неупругих процессов в виде

$$\frac{\sigma_r^l}{\pi\lambda^2(2l+1)} = 1 - B_l^2.$$

Из этих выражений особенно отчетливо видно, что неупругие процессы всегда сопровождаются упругими. При заданной величине сечения упругого рассеяния существует максимально возможная величина сечения неупругих процессов $\sigma_r^{(\text{макс})}$, причем, когда $\sigma_r = \sigma_r^{(\text{макс})}$, σ_s тоже равно $\sigma_r^{(\text{макс})}$; максимально возможное сечение упругого рассеяния $\sigma_s^{(\text{макс})} = 4\sigma_r^{(\text{макс})}$.

4. Рассмотрим предельный случай, когда неупругие процессы имеют очень большое значение. Пусть имеется очень много открытых каналов и все матричные элементы S-матрицы примерно одного порядка величины, но так как $\sum_{f_0} |(f_0|S|i_0)|^2 = 1$, то каждый элемент $|(f_0|S|i_0)| \ll 1$. Сечение каждого отдельного неупругого процесса очень мало. Однако с учетом выражения (38.6) сумма сечений всех неупругих процессов $\sigma_r \approx \sum_l \pi\lambda^2(2l+1)$.

При суммировании по состояниям f_0 мы воспользовались соотношением $\sum_{f_0 \neq i_0} |(f_0|S|i_0)|^2 = 1 - |(i_0|S|i_0)|^2$ и пренебрегли $|(i_0|S|i_0)|^2$ по сравнению с единицей. Сделаем аналогичное пренебрежение и в сечении упругого рассеяния (38.5)

$$\sigma_s = \sum_l \pi\lambda^2(2l+1).$$

Использованное выражение для матрицы оператора $\hat{S} - \hat{I}$ справедливо не для всех l. Как отмечалось выше, при больших значениях l задачу можно рассматривать квазиклассически, и этим значениям l отвечают большие прицельные параметры $\rho = \lambda l$. Если радиус взаимодействия сталкивающихся частиц равен R (это, очевидно, некоторая эффективная величина, а не обязательно строго определенная), то наибольшее значение l, при которых взаимодействие еще осуществляется, равно $l_0 \approx R/\lambda$. Это означает, что при $l > l_0 \approx R/\lambda$ частицы не взаимодействуют и $\hat{S} = \hat{I}$, т. е. суммирование по l идет от нуля до l_0. Отсюда нетрудно получить $\sigma_r = \sigma_s = \pi R^2$. Иначе

---

* Элемент телесного угла возникает, как обычно, в выражениях, связанных с квантовыми числами, имеющими непрерывный спектр.

** Кроме того, здесь, конечно, использовано предположение, что при $t \to \pm\infty$ частицы можно рассматривать как свободные. Для потенциалов взаимодействия, спадающих на бесконечности как $1/r$ и медленнее, необходимо особое рассмотрение.

говоря, сечение упругого рассеяния будет очень велико — равно суммарному сечению всех неупругих процессов. Наш результат носит на первый взгляд парадоксальный характер. Действительно, суммарное сечение взаимодействия равно $2\pi R^2$, тогда как в классической механике максимальное сечение взаимодействия вдвое меньше — πR^2. Этот парадокс разрешается, если рассмотреть угловое распределение упруго рассеянных частиц. Для этого надо оператор $\hat{S} - \hat{I} \approx -\hat{I}$ перевести в представление углов рассеяния. Функция этого преобразования, как отмечалось выше, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= (\theta\varphi\,|^{lm}); \\ \sum_{l'm'} I_{l'lm'm}(l'm'\,|\,\theta\varphi) &= Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (38.7)$$

Подставим выражение (38.7) в общую формулу сечения рассеяния (37.8); в результате получим

$$d\sigma = \pi\lambda^2 \left| \sum_{l=0}^{l_0 = \frac{R}{\lambda}} \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} P_l(\cos\theta) \right|^2 d\Omega. \qquad (38.8)$$

Можно показать (см. книгу [2], стр. 630), что сумма в последнем выражении равна

$$\frac{J_1\left(\frac{R}{\lambda}\theta\right)}{\left(\frac{\lambda}{R}\right)\theta},$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Таким образом, в том случае, когда интенсивно идут неупругие процессы (происходит интенсивное выбывание частиц из пучка), угловое распределение упруго рассеянных частиц имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2 \left| \frac{J_1\left(\frac{R}{\lambda}\theta\right)}{\theta} \right|^2. \qquad (38.9)$$

Но $J_1\left(\frac{R}{\lambda}\theta\right)$ существенно отлично от нуля только при $R/\lambda\theta \sim 1$ или при $\theta \sim \lambda/R$. Отсюда следует разрешение парадокса: при переходе к классической механике сохраняется соотношение $\sigma_t = \sigma_r + \sigma_s = 2\pi R^2$, однако рассеяние частиц происходит на очень малые углы $\sim \lambda/R$, рассмотрение которых подразумевает применение квантовой механики. Критерий применимости классической механики заключается как раз в том, чтобы можно было пренебречь отношением длины волны частиц к размерам системы. А это означает, что следует вообще пренебречь σ_s и σ_t переходит в

$$\sigma_t = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1) = \pi R^2.$$

Выражение (38.9) в точности совпадает с выражением для дифракции Фраунгофера на абсолютно черном шарике. Это совпадение носит, очевидно, не случайный характер, а является следствием волновой природы частиц. В связи с этой оптической аналогией упругое рассеяние частиц, вызванное сильными неупругими процессами, называют дифракционным рассеянием. Как видно из изложенного, для этого рассеяния характерно резко вытянутое вперед угловое распределение, полуширина которого определяется соотношением между длиной волны де Бройля и эффективным радиусом взаимодействия сталкивающихся частиц.

5. В приведенном примере мы использовали свойство унитарности S-матрицы для доказательства тесной связи упругих и неупругих процессов. Покажем, что между ними существует точное соотношение, не зависящее от тех предположений, которыми мы пользовались при рассмотрении нашего примера. Это соотношение—также следствие фундаментального свойства унитарности S-матрицы.

Выше мы видели, что $\hat{S} - \hat{I}$ является оператором, квадраты матричных элементов которого определяют сечения различных процессов. Вместо оператора $\hat{S} - \hat{I}$ часто вводят оператор $\hat{R}$, определяемый как $i\hat{R} = \hat{S} - \hat{I}$. Операторы $\hat{R}$ и $\hat{S} - \hat{I}$ отличаются лишь несущественным фазовым множителем. Запишем свойство унитарности S-матрицы через операторы $\hat{R}$:

$$\hat{S}\hat{S}^+ = (\hat{I} + i\hat{R})(\hat{I} - i\hat{R}^+) = \hat{I}, \qquad (38.10)$$

откуда

$$i\hat{R} - i\hat{R}^+ + \hat{R}\hat{R}^+ = 0. \qquad (38.11)$$

Рассмотрим матричный элемент операторного равенства (38.11), когда в качестве волновых функций приняты функции

$$\Psi = |\alpha\mu_1\mu_2\mathbf{n}E)\frac{2\pi}{p}.$$

Имеем

$$(\Psi', \hat{R}\Psi) = \frac{2\pi}{p'}(\mathbf{n}'\mu_1'\mu_2'\alpha'\,|\,\hat{R}\,|\,\mathbf{n}\mu_1\mu_{11}\alpha)\frac{2\pi}{p}\delta(E' - E). \qquad (38.12)$$

Как видно из формулы (37.10), квадрат модуля выражения

$$\frac{2\pi}{p'}(\mathbf{n}'\mu_1'\mu_2'\alpha'\,|\,\hat{R}\,|\,\mathbf{n}\mu_1\mu_{11}\alpha), \qquad (38.12')$$

входящего в (38.12), дает дифференциальное сечение упругого рассеяния. Эта величина называется амплитудой упругого рассеяния. Матричный элемент третьего члена в (38.11) запишется в виде

$$(\Psi', \hat{R}\hat{R}^+\Psi) =$$

$$= \sum_N (\mathbf{n}' \mu_1' \mu_2' \alpha' | \hat{R} | N)(N | \hat{R}^+ | \mathbf{n} \mu_I \mu_{II} \alpha) \frac{(2\pi)^2}{p'p} \delta(E' - E). \quad (38.13)$$

Здесь $\sum_N$, как обычно, обозначает суммирование по всем дискретным и интегрирование по всем непрерывным индексам состояний, которые могут возникнуть в результате столкновения частиц I и II. Подстановка выражений (38.12) и (38.13) в соотношение (38.11) дает систему интегральных уравнений для амплитуд процессов. Существование такой системы, как видно из вывода, следует только из требования унитарности S-матрицы. Эти интегральные уравнения имеют особенно простой вид, когда в силу закона сохранения энергии возможен только процесс упругого рассеяния. Нетрудно показать, что при помощи найденной системы интегральных уравнений можно определить фазы амплитуд рассеяния, если известны их модули. Измеряя эффективные сечения, находим квадраты модулей амплитуд рассеяния и с помощью интегральных уравнений — их фазы. В частности, для упругого рассеяния бесспиновых частиц

$$i\left[(\mathbf{n}' | \hat{R}^+ | \mathbf{n}) \frac{2\pi}{p} - (\mathbf{n}' | \hat{R} | \mathbf{n}) \frac{2\pi}{p}\right] \frac{2\pi}{p'} =$$

$$= \int \frac{(2\pi)^2}{pp'} (\mathbf{n}' | \hat{R} | \mathbf{n}'') \, d\Omega'' \, (\mathbf{n}'' | \hat{R}^+ | \mathbf{n})$$

или, вводя обозначение амплитуды рассеяния f, получаем

$$\frac{4\pi}{p} Imf[(\mathbf{n}', \mathbf{n})] = \int f[(\mathbf{n}', \mathbf{n}'')] \, d\Omega'' \, f^*[(\mathbf{n}'' \mathbf{n})], \quad (38.14)$$

где $(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ — скалярное произведение единичных векторов.

Хотя интегральные уравнения типа (38.14) в принципе и позволяют найти фазы амплитуд, решение этих уравнений представляет собой трудную задачу. Рассмотрим только частный случай, когда интегральные уравнения сводятся к простому соотношению. Пусть $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$; $\mu_1' = \mu_I$; $\mu_2' = \mu_{II}$; $\alpha' = \alpha$. Тогда (38.12) будет амплитудой для рассеяния вперед без изменения проекций спинов [обозначим ее $f(0)$], а выражение (38.13) превратится в следующее выражение:

$$\delta(E' - E)\, \sigma,$$

где σ — полное сечение всех процессов, которые могут произойти при столкновении двух частиц с заданными проекциями спинов μ_1 и μ_2. На основании выражения (38.14) найдем

$$\frac{4\pi}{p} \operatorname{Im} f(0) = \sigma. \quad (38.15)$$

Или, иначе говоря, мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному эффективному сечению. Просуммируем левую и правую части соотношения (38.14) по проекциям спинов

сталкивающихся частиц, тогда получим

$$\frac{4\pi}{p} Sp\, I_m f(0) = (2j_I + 1)(2j_{II} + 1)\, \bar{\sigma}, \quad (38.16)$$

где $\bar{\sigma}$, согласно выражению (37.9),—полное сечение столкновения неполяризованных частиц. Соотношения (38.15) и (38.16) составляют содержание так называемой оптической теоремы и часто используются при теоретическом рассмотрении различных процессов столкновения и при анализе экспериментальных данных. В качестве примера можно указать процесс рассеяния γ-квантов в кулоновском поле. С точки зрения квантовой электродинамики — это процесс высокого порядка по e^2; однако, ввиду того что в кулоновском поле происходит довольно интенсивное образование пар (неупругий процесс), будет происходить заметное рассеяние γ-квантов, так называемое дельбрюковское рассеяние. Причем при помощи формулы (38.14), зная сечение образования пар, нетрудно оценить нижнюю границу сечения рассеяния вперед. Важное применение оптическая теорема находит в применениях дисперсионных соотношений [10]. Эту теорему можно применить также для уточнения фазового анализа различных процессов рассеяния, особенно в тех случаях, когда трудно измерить сечение рассеяния под малыми углами.

Из оптической теоремы можно строго без привлечения использованных выше модельных представлений получить основные черты углового распределения упруго рассеянных частиц при высоких энергиях. Рассмотрим для простоты случай рассеяния бесспиновых частиц; тогда из выражения (38.14) следует

$$|f(0)|^2 \geqslant \left(\frac{p\sigma_f}{4\pi}\right)^2,$$

но это означает, что угловое распределение упругого рассеяния частиц при больших p резко вытянуто вперед и в основном сосредоточено в телесном угле: $\Delta\Omega = \pi\theta^2 \leqslant \left(\frac{4\pi}{p\sigma_f}\right)^2 \sigma_s$.

§ 39. СВЯЗЬ СЕЧЕНИЙ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ РЕАКЦИЙ

Рассмотрим две реакции:

$$I + II \rightleftarrows 1 + 2.$$

Сечение прямой реакции, согласно (37.10), запишется в виде:

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega_f} = \frac{4\pi^2}{p_i^2} |(-\mathbf{n}_f \mu_1 \mu_2 | S^E | \mathbf{n}_i \mu_I \mu_{II})|^2. \quad (39.1)$$

Знак минус при единичном векторе $\mathbf{n}_f$ означает, что в состоянии f частицы движутся от начала системы координат. Сечение обратной реакции имеет вид

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_i} = \frac{4\pi^2}{p_f^2} |(-\mathbf{n}_i \mu_I \mu_{II} | S^E | \mathbf{n}_f \mu_1 \mu_2)|^2. \quad (39.2)$$

Сравнивая последние два соотношения с выражением (35.15), видим, что простой связи между сечениями прямых и обратных реакций нет. Существует лишь связь между сечениями прямой реакции и такой обратной реакции, в которой спины начального и конечного состояний ориентированы в противоположном направлении по отношению к ориентации спинов в прямой реакции. Рассмотрим, однако, случай, когда пучки частиц не поляризованы. Тогда необходимо просуммировать сечение по проекциям спинов в конечном состоянии и усреднить по проекциям в начальном состоянии; это дает

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega_f} = \frac{4\pi^2}{p_i^2} \cdot \frac{1}{(2j_{\mathrm{I}}+1)(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum_{\mu_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{II}}\mu_1\mu_2} |(-\mathbf{n}_f \mu_1 \mu_2 | S^E | \mathbf{n}_i \mu_{\mathrm{I}} \mu_{\mathrm{II}})|^2;$$

$$\frac{\overline{d\sigma}_f}{d\Omega_i} = \frac{4\pi^2}{p_f^2} \cdot \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{\mu_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{II}}\mu_1\mu_2} |(-\mathbf{n}_i \mu_1 \mu_{\mathrm{II}} | S^E | \mathbf{n}_f \mu_1 \mu_2)|^2.$$

Если теперь воспользуемся соотношением (35.15) и учтем, что суммирование производится по всем проекциям спинов, то получим равенство

$$\frac{\overline{d\sigma}_{if}}{p_f^2\, d\Omega_f}(2j_{\mathrm{I}}+1)(2j_{\mathrm{II}}+1) = \frac{\overline{d\sigma}_{fi}}{p_i^2\, d\Omega_i}(2j_1+1)(2j_2+1). \qquad (39.3)$$

Как видно из вывода последнего равенства, сравнивать сечения прямого и обратного процессов необходимо строго при одной и той же энергии E. Кроме того, надо помнить, что последнее выражение справедливо лишь для случая, когда сталкивающиеся частицы не поляризованы. В общем случае имеется более сложная связь прямых и обратных процессов, определяемая формулой (35.15). Для реакций с поляризованными пучками частиц можно также вывести несколько полезных соотношений между сечениями прямых и обратных реакций.

Равенство (39.3) часто называют соотношением детального баланса. Это название неточно, так как в классической физике под соотношением детального баланса обычно понимают равенство вероятностей прямого и обратного процессов, а это равенство, как было отмечено выше, отнюдь не имеет места.

Приведем примеры использования соотношения (39.3):

1) определение спина π-мезона. Спин π-мезона был с большой определенностью установлен при изучении реакций

$$p + p \rightleftarrows d + \pi^+. \qquad (39.4)$$

Применение к ним соотношения (39.3) дает

$$\frac{\dfrac{\overline{d\sigma}_{if}}{d\Omega_f}}{\dfrac{\overline{d\sigma}_{fi}}{d\Omega_i}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p_f^2}{p_i^2}(2s+1). \qquad (39.5)$$

Здесь s — спин π-мезона. Из последней формулы видно, что случаи $s = 0$ и $s = 1$ дают отношения сечений, различающиеся между собой в 3 раза. Таким образом, уже довольно грубые измерения дифференциальных сечений реакций (39.4) только под одним углом дают возможность убедиться в том, что спин π-мезона равен нулю.

Ввиду своей общности соотношение (39.3) может послужить и для определения спинов других частиц. Соотношения между сечениями прямых и обратных реакций часто применяются и для реакций с участием фотонов. Однако в этом случае их необходимо несколько видоизменить*. В самом деле, хотя спин фотона и равен единице, число различных его проекций равно не $2j + 1 = 3$, а только двум (возможны только две различные поляризации фотона). Отсюда следует, что видоизменение выражения (39.3) носит тривиальный характер: множитель $(2j + 1)$ для фотона заменяется на 2.

2) большое значение имеет измерение сечения фоторождения π-мезонов на нейтронах:

$$\gamma + n \to p + \pi^-. \qquad (39.6)$$

Однако нейтронных мишеней не существует, и этот процесс приходится изучать при помощи довольно сложной интерпретации процесса $\gamma + d \to 2p + \pi^-$. Но, очевидно, вместо процесса (39.6) можно изучать обратный ему процесс, а для определения сечения прямого процесса применить соотношение (39.3), а с учетом сделанного выше замечания:

$$\frac{\overline{d\sigma}_{\gamma\pi}}{d\Omega_\pi} = \frac{\overline{d\sigma}_{\pi\gamma}}{d\Omega_\gamma} \cdot \frac{p_\pi^2}{p_\gamma^2} \cdot \frac{1}{2};$$

3) в теоретических расчетах реакции фоторасщепления дейтона

$$\gamma + d \to n + p \qquad (39.7)$$

иногда оказывается удобным вычислить сечение обратного процесса, а затем при помощи соотношения (39.3) получить сечение процесса (39.7).

В этом случае соотношение (39.3) запишется в виде:

$$\frac{\overline{d\sigma}_{d,\,pn}}{d\Omega_p} = \frac{\overline{d\sigma}_{pn,\,d}}{d\Omega_\gamma} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p_p^2}{p_\gamma^2}.$$

* Подробнее о реакциях с участием фотонов речь будет идти ниже.

Глава 7

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ, ОБЛАДАЮЩИХ СПИНОМ

§ 40. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА. ПРИМЕРЫ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ S-МАТРИЦЫ

Как было показано выше, из общих свойств матрицы рассеяния можно получить довольно много сведений о сечениях взаимодействия бесспиновых частиц. В частности, из унитарности S-матрицы и законов сохранения следует возможность описать процесс набором действительных параметров — фаз. Специфика взаимодействия сказывается на величине фаз и их зависимости от энергии. Например, в том случае, когда радиус взаимодействия сравним с длиной волны частиц, сечение с большой точностью описывается небольшим числом фаз (это утверждение непосредственно вытекает из проделанного выше перехода к классической механике).

Таким образом, при изучении свойств частиц и их взаимодействий подлежат изучению (теоретическому и экспериментальному) именно эти параметры. Такой подход существенно упрощает дело. Производя фазовый анализ экспериментальных данных, разделяют свойства процессов, которые связаны с общими, хорошо установленными законами природы, и свойства, которые связаны со спецификой столкновения частиц данного сорта.

Всегда ли возможно провести фазовый анализ? Каковы особенности столкновения частиц, обладающих спином? Эти вопросы являются предметом обсуждения настоящей главы. Рассмотрим для начала упругое столкновение частиц со спинами:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \to 1 + 2. \tag{40.1}$$

Отличие этого случая от упругого рассеяния бесспиновых частиц заключается в том, что состояние системы задается не только направлением полета частиц (углами θ, φ), но также еще и значениями проекций спинов частиц μ. S-матрица теперь имеет вид

$$(\theta'\,\varphi'\,\mu_1\,\mu_2\,|\,S^E\,|\,\theta\varphi\mu_{\mathrm{I}}\,\mu_{\mathrm{II}})\,\delta(E'-E), \tag{40.2}$$

а для бесспиновых частиц она имела вид

$$(\theta'\,\varphi'\,|\,S^E\,|\,\theta\varphi)\,\delta(E'-E). \tag{40.3}$$

В случае бесспиновых частиц были введены вместо переменных θ, φ переменные l и m и использованы законы сохранения (34.2). Это привело к тому, что S-матрица имела вид

$$S^l\,\delta_{l'l}\,\delta_{m'm}\,\delta(E'-E). \tag{40.4}$$

Связь выражений (40.3) и (40.4) осуществлялась при помощи функций преобразования $(\theta\varphi\,|\,lm) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\theta'\,\varphi'\,|\,S^E\,|\,\theta\varphi) = \sum_{lm} Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\,S^l\,Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\,P_l(\cos\omega)\,S^l,$$

где ω — угол между направлениями (θ, φ) и (θ', φ');

S^l — комплексные параметры, зависящие от энергии. Использование унитарности давало возможность ввести один действительный параметр — фазу.

В случае частиц со спином использование законов сохранения дает

$$S^J\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta(E'-E), \tag{40.5}$$

но S^J — теперь уже не число, а матрица. В самом деле, это состояние было задано четырьмя квантовыми числами θ, φ, μ_1, μ_2, не считая энергии, а законы сохранения дают возможность делать заключения только о двух квантовых числах J и M. Следовательно, по остальным двум квантовым числам S является матрицей и ее зависимость от этих чисел определяется спецификой взаимодействия*. Отсюда уже ясно, что в случае частицы со спином нельзя так сильно упростить выражение для сечения, как в случае рассеяния бесспиновых частиц (введение фаз). Однако в частных случаях введение фаз все же оказывается возможным. Рассмотрим рассеяние бесспиновых частиц на частицах со спином 1/2 (например, рассеяние π-мезонов на нуклонах или нейтронов на He^4). Состояние характеризуется заданием чисел (E, l, m, μ), причем число μ может принимать два значения: $\pm 1/2$. Если сложим орбитальный момент l и спин частицы и введем полный момент системы J и его проекцию M вместо квантовых чисел m и μ, то наша система будет характеризоваться числами (E, l, J, M). Причем из закона сложения моментов $J = l \pm 1/2$. С учетом законов сохранения момента и энергии S-матрица имеет вид

$$S^J\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta(E'-E),$$

где S^J — двухрядная матрица:

$$\begin{pmatrix} \left(J+\frac{1}{2}\,|\,S^J\,|\,J+\frac{1}{2}\right) & \left(J+\frac{1}{2}\,|\,S^J\,|\,J-\frac{1}{2}\right) \\ \left(J-\frac{1}{2}\,|\,S^J\,|\,J+\frac{1}{2}\right) & \left(J-\frac{1}{2}\,|\,S^J\,|\,J-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{40.6}$$

Учтем еще один закон — закон сохранения четности (см. § 34):

$$\eta_i = (-1)^l\,\eta_{\mathrm{I}}\,\eta_{\mathrm{II}} = (-1)^{l'}\,\eta_1\,\eta_2 = \eta_f,$$

* Количество квантовых чисел, входящих в набор, который задает состояние, определяется числом степеней свободы системы и, очевидно, не зависит от представления. Так, например, для бесспиновых частиц это три числа E, ϑ, φ, или E, l, m и т. д., а для двух частиц со спином — пять чисел E, ϑ, φ, μ_1, μ_2, или E, l, m, μ_1, μ_2. Если сложить спины частиц в один суммарный спин, то вместо μ_1 и μ_2 войдут два новых квантовых числа — суммарный спин s и его проекция μ. При этом состояние будет задаваться числами E, l, m, s, μ. Можно сложить суммарный спин с орбитальным моментом, введя вместо проекций m и μ квантовые числа J — полного момента и M — его проекции: (E, J, M, l, s) — новый набор пяти квантовых чисел. В тексте речь идет, например, о квантовых числах l и s.

где η_i — полная четность начального состояния; η_f — полная четность конечного состояния; $\eta_{I,\,II}$ и $\eta_{1,\,2}$ — внутренние четности частиц*; таким образом, в нашем случае $l' = l + 2n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Но, как следует из закона сохранения полного момента, l' может отличаться от l не больше, чем на единицу; следовательно, недиагональные члены матрицы (40.6) равны нулю и S-матрица диагональна.

Требование унитарности дает

$$S_l^{J*} S_l^J = 1 \quad \text{и} \quad S_l^J = e^{2i\delta_l^J},$$

т. е. в случае, когда одна из частиц бесспиновая, а другая частица имеет спин 1/2, понятие фазы сохраняет свой обычный смысл. Однако фаза зависит не только от l, но еще и от J.

Рассмотрим другой важный пример — упругое рассеяние частиц со спином 1/2 (например, рассеяние нейтронов на протонах). Система характеризуется квантовыми числами E, l, m, μ_1, μ_2. Введем квантовые числа интегралов движения J и M и квантовое число суммарного спина частиц s (оно может принимать значения нуль и единица)

$$(J'M'E's'l' \mid S \mid JMEsl) = (s'l' \mid S^J \mid sl)\, \delta_{J'J}\, \delta_{M'M} \delta (E' - E).$$

Согласно закону сложения моментов

$$l = \begin{cases} J-1 \\ J \\ J+1 \end{cases} \quad \text{при} \quad s = 1 \quad \text{и} \quad l = J \quad \text{при} \quad s = 0.$$

Учет закона сохранения четности дает правило отбора $l' = l + 2n$, где n — целое число. Это означает, что возможны переходы только между $l = J + 1$ и $l = J - 1$ и переходы без изменения l. При заданном полном моменте и заданной четности состояния S-матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

где индексы *1* и *2* нумеруют соответственно состояния ($l = J - 1$; $s = 1$) и ($l = J + 1$; $s = 1$) или состояния ($l = J$; $s = 0$) и ($l = J$; $s = 1$). Матричные элементы $S_{\mu\nu}$ являются, очевидно, комплексными параметрами и могут быть выражены через действительные параметры $r_{\mu\nu}$ и $\delta_{\mu\nu}$:

$$S_{\mu\nu} = r_{\mu\nu} e^{i\delta_{\mu\nu}}.$$

* Мы занимаемся изучением ядерных реакций, и в основном речь идет о сильных взаимодействиях. Нарушения закона сохранения четности обнаружены только в слабых взаимодействиях, обусловливающих распад. В сильных же взаимодействиях четность сохраняется.

Условие унитарности с учетом теоремы взаимности ($S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$) можно записать в виде матричного равенства

$$SS^+ = \begin{pmatrix} r_{11} e^{i\delta_{11}} & r_{12} e^{i\delta_{12}} \\ r_{12} e^{i\delta_{12}} & r_{22} e^{i\delta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} e^{-i\delta_{11}} & r_{12} e^{-i\delta_{12}} \\ r_{12} e^{-i\delta_{12}} & r_{22} e^{-i\delta_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (40.7)$$

Это равенство — краткая запись системы уравнений, которая дает возможность выразить одни параметры через другие. В результате решения этой системы найдем

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - r^2}\, e^{2i\delta} & ire^{i(\delta + \eta)} \\ ire^{i(\delta + \eta)} & \sqrt{1 - r^2}\, e^{2i\eta} \end{pmatrix} \qquad (40.8)$$

Здесь введены три новых параметра: δ, η и r; связь их со старыми параметрами очевидна из сопоставления формул (40.7) и (40.8).

Таким образом, в рассматриваемом случае ввести понятие фазы в обычном смысле этого слова оказалось невозможным. Однако использование общих свойств S-матрицы резко сократило число параметров, которое необходимо определять на опыте. В самом деле, даже после использования законов сохранения момента и четности получим S-матрицу при данных J и четности в виде таблицы, в которую входит четыре комплексных параметра, т. е. восемь независимых действительных параметров. Использование унитарности и теоремы взаимности привело к тому, что при данных J и четности S-матрица выражается всего через три действительных параметра.

Чтобы применить полученные выше результаты к упругому рассеянию нуклонов, необходимо принять во внимание тождественность частиц (для n — p-рассеяния — изотопическую инвариантность). Это приводит, как легко видеть, к запрету синглет-триплетных ($s = 1 \rightleftarrows s = 0$) переходов и дополнительному упрощению структуры матрицы рассеяния. Из изложенных примеров видно, что чем выше спины сталкивающихся частиц, тем сложнее структура матрицы рассеяния. Усложнение структуры матрицы рассеяния — простое следствие того обстоятельства, что в нашем распоряжении имеется лишь небольшое число ограничений на S-матрицу, а с ростом спина увеличивается количество квантовых чисел, от которых зависит S-матрица.

Исследование структуры матрицы рассеяния имеет большое практическое значение. В результате параметризации S-матрицы выделяют небольшое число действительных параметров, величина которых определяется спецификой взаимодействия частиц. Затем исследуют возможные постановки опытов по столкновению частиц, при помощи которых можно получить полную информацию о параметрах S-матрицы. При этом очень многие опыты оказываются излишними — они дают информацию, которую можно получить из данных других опытов.

Необходимо также отметить, что все изложенные соображения применимы, очевидно, не только к упругому рассеянию, а являются весьма общими. В § 48 изложенная выше теория будет применена для

установления связи процессов рассеяния, фоторождения π-мезонов и комптон-эффекта на нуклоне. Эта связь вытекает из тех же соображений, что и были изложены выше, если в число переменных индексов S-матрицы μ и ν включить как независимые индексы индексы открытых каналов.

Можно показать, что использование фундаментальных свойств S-матрицы — унитарности и теоремы взаимности для S-матрицы, заданной в виде квадратной таблицы из N комплексных элементов,— сокращает число независимых действительных параметров с $2N^2$ до $1/2N(N+1)$.

Параметризации S-матриц различных процессов взаимодействия нуклонов, мезонов и ядер и формулировке полных наборов минимального числа опытов посвящено большое число работ. Значительные усилия были предприняты и экспериментаторами для определения вводимых параметров. К сожалению, часто такие исследования проводятся «впрок» на случай, если появится настоящая динамическая теория и ее надо будет проверять экспериментально. Но поскольку теории нет, то неясны и ее запросы. В связи с этим постановка опытов об измерении параметров S-матрицы носит расплывчатый и нечеткий характер: измерять как можно больше параметров с возможно большей точностью. Может оказаться, что большинство этих дорогостоящих, громоздких экспериментов окажутся ненужными для проверки теории.

Значительно более широкое применение кинематика частиц, обладающих спином, получила в связи с определением квантовых чисел вновь открытых частиц и резонансов, исследованием возбужденных состояний атомных ядер, в связи с обнаружением несохранения четности. Эта область применения кинематических соотношений дала целый ряд результатов, оказавших существенное влияние на развитие физики. Как будет показано ниже, угловое распределение продуктов распада нестабильной частицы позволяет найти ее пространственные квантовые числа. Наличие или отсутствие определенного типа корреляций плоскостей образования и распада частиц может служить проверкой сохранения четности. Применение законов сохранения внутренних квантовых чисел — изотопического спина, странности и других интегралов движения, связанных с существованием унитарных симметрий, позволяет расклассифицировать элементарные частицы по мультиплетам.

Связь некоторых законов сохранения с наблюдаемыми на опыте явлениями довольно очевидна (например, сохранение заряда и аналогичных ему величин), в некоторых случаях для обнаружения такой связи требуется некоторое рассуждение, в других необходимы довольно громоздкие расчеты с привлечением специальных функций преобразования, обсуждению которых посвящены §§ 41—44 настоящей главы.

§ 41. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

Из приведенных примеров видно, что при столкновении частиц, обладающих спином, так же как и при столкновении бесспиновых частиц, можно сделать некоторые заключения о структуре S-матрицы, исходя из самых общих свойств пространства — времени и законов квантовой механики.

Теперь предстоит выяснить ограничения, которые накладывают эти свойства матрицы рассеяния на наблюдаемые величины — сечения. Для этого необходимо уметь переводить S-матрицу, заданную в одном представлении, в другие представления, в частности в то, которое соответствует конкретному опыту.

В случае рассеяния бесспиновых частиц достаточно было одной функции преобразования $(\theta\varphi \mid lm)$ — шаровой функции. Как видно из приведенных выше примеров, необходимы функции преобразования, которые осуществляют переход от представления полного момента, в котором S-матрица имеет наиболее простой вид, к представлению составляющих моментов (спинов частиц, орбитальных моментов). От этого представления уже можно перейти к представлению углов и, воспользовавшись общими формулами для сечений (см. § 37), получить угловые распределения и другие характеристики.

Пусть известны собственные функции $\Psi_{j_1\mu_1}$ и $\Psi_{j_2\mu_2}$ операторов моментов j_1 и j_2 и требуется найти собственные функции Ψ_{JM} оператора момента, который является их суммой. Функцию Ψ_{JM}, очевидно можно представить в виде разложения по полной системе функций, составленных из произведений $\Psi_{j_1 m_1}$ и $\Psi_{j_2 m_2}$:

$$\Psi_{JM} = \sum_{m_1 m_2} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2}. \qquad (41.1)$$

Если бы Ψ_{JM} было известно, то $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ нетрудно было бы найти, воспользовавшись ортогональностью функций. В принятых нами обозначениях Дирака равенство (41.1) можно записать так:

$$(x_1 x_2 \mid j_1 j_2 JM) =$$
$$= \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_1 j_2 JM)(x_1 \mid j_1 m_1)(x_2 \mid j_2 m_2).$$

Из этой записи видно, что $(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_1 j_2 JM)$ являются как раз теми функциями преобразования, которые мы ищем; они осуществляют переход от представления слагающих моментов в представление суммарного момента. Своеобразие этих функций заключается в том, что у них как индекс состояния, так и индекс представления — дискретные величины, принимающие конечное число значений. Поэтому коэффициенты $(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_1 j_2 JM)$ представляют собой элементы конечных матриц. Несмотря на простой физический смысл этих коэффициентов, получение их в явном виде связано с довольно громоздкими расчетами. Впервые общее выражение этих коэффициентов дано Вигнером [12]. Для вывода Вигнер использовал изящный математический аппарат теории групп. Позднее Рака [13] показал,

что коэффициенты можно вывести алгебраически без применения методов теории групп. Коэффициенты $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ имеют очень большое и все возрастающее значение в различных приложениях квантовой механики. Для них существуют разнообразные названия и обозначения. Наиболее употребительное название: коэффициенты Клебша — Гордана (по имени авторов важной теоремы в теории неприводимых представлений группы вращений). Называют их также коэффициентами Вигнера, коэффициентами векторного сложения (vector addition coeffitients). Мы будем придерживаться последнего названия. Укажем употребляемые в литературе обозначения коэффициентов векторного сложения:

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM);\ (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM);\ C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2};$$
$$C^{J}_{m_1 m_2};\ C^{j_1 m_1 j_2 m_2}_{JM};\ (-1)^{-J+M}\sqrt{2J+1}\, S_{j_1 m_1 j_2 m_2 J -M}.$$

Наиболее употребительны первые три. Мы будем пользоваться первым.

Читателю, интересующемуся выводами общих выражений для $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$, следует ознакомиться с соответствующими разделами книг [12, 2], где излагается теория неприводимых представлений группы вращений. Для узко практических целей (расчетов угловых распределений, исследования свойств матрицы рассеяния, проблем корреляции частиц и явлений поляризации частиц в ядерных реакциях и др.) достаточно понимать физический смысл коэффициентов $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$ как функций преобразования Дирака, знать их общие свойства и уметь пользоваться таблицами этих коэффициентов. Перейдем к изложению этих вопросов.

Формулы прямого $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ и обратного преобразований $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$, как уже отмечалось, связаны простым соотношением

$$(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)^* = (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM).$$

Обычно используемое в литературе представление таково, что коэффициенты $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ действительны. Это означает, что коэффициенты прямого и обратного преобразований просто равны. Очевидно, что физические результаты не должны зависеть от порядка, в котором мы складывали моменты j_1 и j_2, т. е. коэффициенты $(JM | j_1 m_1 j_2 m_2)$ и $(JM | j_2 m_2 j_1 m_1)$ отличаются только фазовым множителем, так как коэффициенты преобразования, или, что то же самое, волновые функции, описывающие одно и то же физическое состояние, могут различаться лишь фазовыми множителями.

Можно показать, что

$$(JM | j_1 m_1 j_2 m_2) = (-1)^{j_1+j_2-J} (JM | j_2 m_2 j_1 m_1). \qquad (41.2)$$

В квантовой механике доказывается, что при сложении моментов квантовые числа J и M могут принимать значения

$$\left.\begin{aligned} J &= |j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2 + 1|, \ldots, j_1 + j_2; \\ M &= m_1 + m_2 \end{aligned}\right\} \qquad (41.3)$$

Из последнего равенства следует, что по одному из индексов m_1, m_2 сумма в выражении (41.1) носит формальный характер, так как при заданных m_1 и m_2 квантовое число M уже определено равенством (41.3).

Из записи $(j_1 M - m_2 j_2 m_2 | JM)$ видно, что коэффициенты векторного сложения можно представить в виде матрицы, строки которой нумеруются числом J, а столбцы — числом m_2. Число строк равно $2j + 1$, где j — наименьшее из значений j_1 и j_2. Легко видеть, что число столбцов равно тому же числу. Таким образом, число коэффициентов векторного сложения равно $(2j + 1)^2$. В приложении V приводятся таблицы коэффициентов векторного сложения. Операторы $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{j}}_1$ и $\hat{\mathbf{j}}_2$ связаны соотношением $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$, но это соотношение можно записать и так:

$$\hat{\mathbf{j}}_1 = \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{j}}_2; \quad \hat{\mathbf{j}}_2 = \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{j}}_1,$$

т. е. любой из векторов, входящих в тройку $\hat{J}$, $\hat{j}_1$, $\hat{j}_2$ (тройки складываемых векторов часто называют триадами — triads), можно представить как результирующий вектор. Этим соотношениям соответствуют такие свойства коэффициентов векторного сложения:

$$\frac{(-1)^{J-M}}{\sqrt{2J+1}} (JM | j_1 m_1 j_2 m_2) = \frac{(-1)^{j_1-m_1}}{\sqrt{2j_1+1}} (j_1 m_1 | JM j_2 - m_2) =$$
$$= \frac{(-1)^{2j_1}(-1)^{j_2-m_2}}{\sqrt{2j_2+1}} (j_2 m_2 | j_1 - m_1 JM). \qquad (41.4)$$

Полезны также соотношения

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) = (-1)^{j_1+j_2-J} (j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M) =$$
$$= (-1)^{j_1+j_2-J} (j_2 m_2 j_1 m_1 | JM) = (j_2 - m_2 j_1 - m_1 | J - M). \qquad (41.5)$$

Кроме перечисленных свойств, коэффициенты векторного сложения, как любые другие функции преобразования, обладают свойствами ортогональности и нормировки:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} (J'M' | j_1 m_1 j_2 m_2)(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) &= \delta_{J'J}\delta_{M'M}; \\ \sum_{JM} (j_1 m_1' j_2 m_2' | JM)(JM | j_1 m_1 j_2 m_2) &= \delta_{m_1' m_1}\delta_{m_2' m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (41.6)$$

и, согласно свойству симметрии,

$$\sum_{m_1 M} (JM | j_1 m_1 j_2 m_2)(JM | j_1 m_1 j_2' m_2') = \frac{2J+1}{2j_2+1}\delta_{j_2 j_2'}\delta_{m_2 m_2'}. \qquad (41.7)$$

Приведем, наконец, полученное Вигнером [15] явное выражение коэффициентов векторного сложения для произвольных j_1 и j_2:

$$(JM | j_1 m_1 j_2 m_2) =$$

$$= \sqrt{\frac{(J+j_1-j_2)!\,(J-j_1+j_2)!\,(j_1+j_2-J)!\,(J+M)!\,(J-M)!\,(2J+1)}{(J+j_1+j_2+1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_2-m_2)!\,(j_2+m_2)!}} \times$$

$$\times \sum_k \frac{(-1)^{k+j_2+m_2}\,(J+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(J-j_1+j_2-k)!\,(J+M-k)!\,k!\,(k+j_1+j_2-M)!}. \qquad (41.8)$$

§ 42. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве примера применения таблиц и свойств коэффициентов векторного сложения рассмотрим простейший, но важный случай рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином, равным нулю. Согласно общим свойствам S-матрицы (33.1) и (34.1) в рассматриваемом случае она имеет вид

$$e^{2i\delta_l^J}\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta_{l'l}\,\delta(E'-E). \qquad (42.1)$$

Для того чтобы можно было воспользоваться формулой (37.8) и получить сечение, необходимо перевести S-матрицу из представления $JMlE$ в представление μmlE. Соответствующая функция преобразования $(JMsl\,|\,lms\mu)$ есть не что иное, как коэффициент векторного сложения векторов спина $\hat{\mathbf{S}}$ и орбитального момента $\hat{\mathbf{l}}$ в полный момент $\hat{\mathbf{J}}$. Совершая преобразование над выражением (42.1), получаем

$$\sum_{J'M'} e^{2i\delta_l^J}\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta_{l'l}\,\delta(E'-E)\,(J'M'\,|\,s\mu lm) =$$

$$= e^{2i\delta_l^J}\,\delta_{ll'}\,\delta(E'-E)\,(JM\,|\,s\mu lm). \qquad (42.2)$$

Если не будем преобразовывать к другим переменным конечное состояние, а подставим (42.2) в выражение (37.8), то получим сечение столкновения частиц с определенным орбитальным моментом, полным моментом и его проекцией в конечном состоянии и с определенной проекцией спина в начальном состоянии. Это сечение запишется

$$\sigma^{JM}_{l'\mu_1} = \pi\lambda^2\,(2l'+1)\left|1-e^{2i\delta_{l'}^J}\right|^2 |\,(JM\,|\,s\mu_1\,l'0)\,|^2. \qquad (42.3)$$

Просуммируем это выражение по $l'M$ и усредним по начальным поляризациям частиц; последнее означает операцию $\frac{1}{2}\sum_{\mu_1}$. В силу свойства (41.7) коэффициентов векторного сложения в результате получим

$$\sigma^J = \sum_l \pi\lambda^2\,4\sin^2\delta_l^J\,(2J+1)\,\frac{1}{2}.$$

Полное сечение будет иметь вид

$$\sigma = \sum_J \sigma^J = 4\pi\lambda^2 \sum_l \left[(l+1)\sin^2\delta_l^{l+\frac{1}{2}} + l\sin^2\delta_l^{l-\frac{1}{2}}\right]. \qquad (42.4)$$

ряда (положительный, отрицательный, нейтральный) на уклоне Если фаза не зависит от спина $\delta_l^{l+\frac{1}{2}} = \delta_l^{l-\frac{1}{2}}$, то выражение (42.4) переходит в полное сечение рассеяния бесспиновых частиц.

Допустим, что фаза состояния $J = 3/2$, $l = 1$ проходит через $\pi/2$, иначе говоря, это состояние резонирует при тех энергиях, при которых рассматриваем столкновение. Выбранные квантовые числа соответствуют резонансному, или, как его иначе называют, изобарному состоянию взаимодействия π-мезонов с нуклонами. В этом случае парциальное сечение достигает своего максимального значения (геометрического предела) $8\pi\lambda^2$.

Если хотим найти угловые распределения, то надо функцию конечного состояния перевести в представление углов. Для этого необходимо перейти к представлению $lms\mu$ в левой части матрицы рассеяния, применив функцию преобразования $(lms\mu\,|\,JM)$, а с помощью функции $(\theta\varphi\,|\,lm)$ найти S-матрицу в представлении $\theta\varphi$.

Здесь мы не будем проделывать соответствующих выкладок, так как ниже получим общие формулы для угловых распределений при ядерных реакциях. Если интересоваться применением полученных соотношений к рассеянию π-мезонов то в число переменных надо включить изотопический спин. Но, как известно, законы сложения изотопических спинов полностью совпадают с законами сложения обычных моментов, и обобщение изложенной теории на рассеяние частиц, обладающих изотопическим спином, не представляет труда.

Воспользуемся тем, что изотопический спин — интеграл движения и, следовательно, S-матрица имеет вид

$$S_l^{JT}\,\delta_{J'J}\,\delta_{l'l}\,\delta_{M'M}\,\delta_{T'T}\,\delta_{T_3'T_3}\,\delta(E'-E),$$

здесь T и T_3 — соответственно полный изотопический спин системы и его проекция. Требование унитарности дает

$$S_l^{JT} = e^{2i\delta_l^{JT}}.$$

При $l = 0$ возможно только значение $J = 1/2$, при $l \neq 0$ возможны два значения: $J = l \pm 1/2$. Изотопический спин для системы мезон — нуклон может принимать значения 3/2 и 1/2. Отсюда ясно, что s-рассеяние мезонов всех трех знаков как на нейтроне, так и на протоне описывается всего двумя фазами: $\delta_0^{1/2\,1/2}$ и $\delta_0^{1/2\,3/2}$. Рассеяние в состояниях с $l \neq 0$ описывается четырьмя фазами:

$$\delta_l^{l+1/2\;3/2},\quad \delta_l^{l+1/2\;1/2},\quad \delta_l^{l-1/2\;3/2},\quad \delta_l^{l-1/2\;1/2}.$$

Все преобразования, которые были проделаны выше, остаются в силе. Необходимо еще проделать дополнительные преобразования S-матрицы в представление, соответствующее опыту. А именно, на опыте задается, что рассеивается мезон определенного знака за-

ряда (положительный, отрицательный, нейтральный) на нуклоне в определенном состоянии по изотопическому спину (на протоне, нейтроне), т. е. в опыте имеем состояние, где заданы изотопические спины обеих частиц $t = 1$ и $\tau = 1/2$ и их проекции $t_3 = \pm 1$ и 0, $\tau_3 = \pm 1/2$, а свойства S-матрицы известны в представлении, где задан суммарный изотопический спин и его проекция. Функциями преобразования $\left(TT_3 \left| t t_3 \frac{1}{2} \tau_3\right.\right)$, являются те же коэффициенты векторного сложения, ибо $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{t}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}$, а законы сложения изотопических спинов в точности совпадают с законами сложения обычных спинов.

Для процесса рассеяния π^+-мезонов на протонах коэффициент $\left(TT_3 \left| 11 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right.\right)$, согласно таблице в приложении V, равен

$$\begin{cases} 1 \text{ при } T = T_3 = \frac{3}{2}, \\ 0 \text{ при всех остальных } T \text{ и } T_3. \end{cases}$$

Отсюда видно, что рассмотренный пример (без учета изотопического спина) полностью относится к этому случаю. Амплитуда рассеяния процесса $\pi^- + p \to \pi^- + p$ выразится таким образом через амплитуды рассеяния в состояниях изотопического спина $T = 3/2$ и $1/2$:

$$(\pi^- p\alpha' \,|\, R \,|\, \pi^- p\alpha) = \sum_{T' T T_3 T} \left(1 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| T' T_3'\right) \times$$

$$\times (\alpha' \,|\, R \,|\, \alpha)\, \delta_{T'T}\, \delta_{T_3' T_3} \left(TT_3 \,|\, 1 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right),$$

здесь α' и α означают все остальные переменные, кроме переменных изотопического спина. Пользуясь таблицей коэффициентов векторного сложения, найдем

$$(\pi^- p\alpha' \,|\, R \,|\, \pi^- p\alpha) = \frac{1}{3} \left(\alpha' \middle| R^{\frac{3}{2}} \middle| \alpha\right) + \frac{2}{3} \left(\alpha' \middle| R^{\frac{1}{2}} \middle| \alpha\right).$$

В качестве упражнения предлагаем читателю выразить полные сечения и угловые распределения реакций

$$\pi^- + p \to \begin{cases} p + \pi^- \\ n + \pi^\circ \end{cases}$$

через фазы рассеяния. Для полных сечений имеем выражения:

$$\sigma(\pi^- \to \pi^-) =$$

$$= \frac{3\pi}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \left[\sin^2 \delta_{l+}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l+}^{1/2} - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{l+}^{3/2} - \delta_{l+}^{1/2}) \right] + \right.$$

$$\left. + l \left[\sin^2 \delta_{l-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l-}^{1/2} - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{l-}^{3/2} - \delta_{l-}^{1/2}) \right] \right\},$$

$$\sigma(\pi^- \to \pi^\circ) =$$

$$= \frac{8\pi}{9k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \sin^2 (\delta_{l+}^{3/2} - \delta_{l+}^{1/2}) + l \sin^2 (\delta_{l-}^{3/2} - \delta_{l-}^{1/2}) \right\}.$$

Здесь верхние значки у фаз означают изотопический спин, а δ_{l+} и δ_{l-} означают фазы, относящиеся к данному l и моментам соответственно $l + 1/2$ и $l - 1/2$. Формулы для угловых распределений получаются слишком громоздкими, чтобы здесь их приводить.

§ 43. СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

В теории спектров сложных атомов, теории угловых корреляций частиц при распаде и теории угловых распределений возникают громоздкие суммы произведений нескольких коэффициентов векторного сложения. Эти суммы можно сильно упростить и выразить через табулируемые коэффициенты. Техника упрощения была разработана в работах [13, 14]. Ниже изложены основные понятия и правила техники.

Основным элементом этой техники являются $3j$-символы, иногда они называются симметричными коэффициентами Вигнера и связаны с введенными выше унитарными коэффициентами векторного сложения следующим образом:

$$(a\alpha b\beta \,|\, c\gamma) = \sqrt{2c+1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \cdot (-1)^{a-b+c} \cdot (-1)^{c-\gamma}. \quad (43.1)$$

Свойства симметрии (41.4) и (41.5) теперь запишутся:

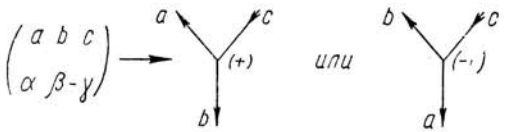
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (43.2)$$

а свойства ортогональности (41.6):

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\alpha\beta}(2c+1)(-1)^{a-\alpha+b-\beta}\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c'\\ -\alpha&-\beta&-\gamma'\end{pmatrix}&=\\
=\delta_{cc'}(-1)^{c-\gamma}\delta_{\gamma\gamma'};&\\
\sum_{c\gamma}(2c+1)(-1)^{c-\gamma}\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\ -\alpha'&-\beta'&-\gamma\end{pmatrix}&=\\
=(-1)^{a-\alpha}\delta_{\alpha\alpha'}(-1)^{b-\beta}\delta_{\beta\beta'}.&
\end{aligned}\right\}\quad(43.3)$$

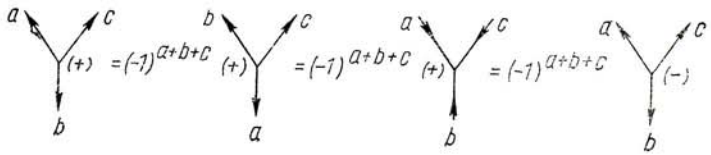
В рассматриваемой технике суммы произведений коэффициентов векторного сложения записываются через $3j$-символы и изображаются графически. Каждому $3j$-символу сопоставляется узел с тремя линиями:



(43.4)

Направление стрелки от узла (к узлу) означает положительный знак (отрицательный знак) магнитного квантового числа. В скобках указан знак узла, плюс означает такое расположение векторов *abc*, что их порядок соответствует обходу узла против часовой стрелки, а минус — обходу по часовой стрелке.

Соотношения (43.2) в графической записи имеют вид:



(43.5)

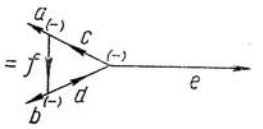
Коэффициенты векторного сложения возникают в задаче сложения двух моментов $\hat{\mathbf{j}}_1$ и $\hat{\mathbf{j}}_2$. Если к результирующему моменту $\hat{J}_{12}$ требуется прибавить еще один момент $\hat{\mathbf{j}}_3$, то можно еще раз воспользоваться законом (41.1). При этом возникает выражение, в которое входит произведение двух коэффициентов векторного сложения, просуммированное по магнитному квантовому числу результирующего момента $\hat{\mathbf{J}}_{12}$:

$$\Psi^{JM}=\sum_{m\mu_3}(J_{12}\,mj_3\,\mu_3\,|\,JM)\sum_{\mu_1\mu_2}(j_1\,\mu_1\,j_1\,\mu_2\,|\,J_{12}\,m)\,\Psi_{j_1\mu_1}\Psi_{j_2\mu_2}\Psi_{j_3\mu_3}.$$

Суммированию по магнитному квантовому числу m в рассматриваемой графической методике сопоставляется соединение линий

с одинаковым j*. Произведение любого числа коэффициентов векторного сложения можно изобразить узлами и соединяющими их линиями суммирования. В качестве поясняющего примера рассмотрим важный частный случай:

$$\sum_{\gamma\delta\varphi}(-1)^{c-\gamma+d-\delta+f-\varphi}\begin{pmatrix}a&c&f\\ \alpha-\gamma&\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&b&f\\ \delta&\beta-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&c&e\\ -\delta&\gamma&\varepsilon\end{pmatrix}=$$



(43.6)

Как видно из последнего выражения, график дает компактное описание довольно громоздкого выражения; линии *fcd* образуют замкнутый контур. О линиях *abe* будем говорить как о свободных концах. Графы могут быть замкнутыми, когда по всем магнитным квантовым числам проведено суммирование, и незамкнутыми, когда имеются свободные концы. Замкнутый граф изображает коэффициент, не зависящий от магнитных квантовых чисел. Техника упрощения сумм коэффициентов векторного сложения имеет своей целью выделить зависимость от магнитных квантовых чисел в виде простейшего множителя, а остальную часть суммы выразить через коэффициенты, изображаемые простейшими замкнутыми графами. В частности, выражение (43.6) можно записать в виде произведения $3j$-символа на величину, не зависящую от магнитных квантовых чисел. Таким образом, в рассматриваемом упрощении большое значение имеют скаляры — величины, независящие от магнитных квантовых чисел и которые изображаются замкнутыми графами.

Рассмотрим простейшие скаляры. Если в каждой свертке фигурируют два симметричных $3j$-символа, то необходимо рассматривать только суммы произведений четного числа $3j$-символов. Свертка двух $3j$-символов в силу ортогональности дает тривиальный результат.

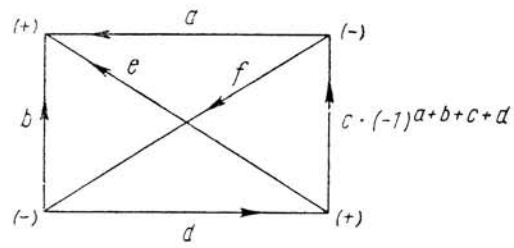
Поэтому наименьшее число сомножителей, приводящее к простейшему скаляру, равно четырем. Этот скаляр определяется следующим образом:

$$\sum_{\text{все }m}(-1)^{a-\alpha+b-\beta+c-\gamma+d-\delta+e-\varepsilon+f-\varphi}\begin{pmatrix}a&b&e\\ -\alpha&-\beta&-\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c&f\\ \alpha&-\gamma&\varphi\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}d&b&f\\ \delta&\beta&-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&c&e\\ -\delta&+\gamma&\varepsilon\end{pmatrix}(-1)^{a+b+c+d}.\qquad(43.7)$$

* При суммировании по магнитному квантовому числу обязательно должен присутствовать множитель $(-1)^{j-m}$ и знаки у магнитных квантовых чисел «свертываемых» коэффициентов векторного сложения должны быть противоположными:

$$\sum_m(-1)^{j-m}\begin{pmatrix}j\ldots\\ m\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j\ldots\\ -m\ldots\end{pmatrix}.$$

Его графическое изображение легко получить, используя приведенные выше правила:



Величины (43.7) являются функциями 6-переменных и носят название коэффициентов Рака или 6j-символов. Они обозначаются так:

$$W(abcd;\ ef). \tag{43.8}$$

Коэффициентами Рака называют более симметричные величины

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = (-1)^{-a-b-c-d} W(abcd;\ ef). \tag{43.9}$$

Исходя из определения (43.7) и свойств симметрии 3j-символов, нетрудно показать, что 6j-символ (43.9) не меняется при любой перестановке его столбцов, причем в каждом из столбцов можно переставить верхний и нижний аргументы.

Коэффициенты $W(abcd;\ ef)$ подобно коэффициентам векторного сложения с точностью до множителя можно определить как функции преобразования, позволяющие переходить от одного представления к другому. Рассмотрим сложение трех моментов $\hat{\mathbf{j}}_1$, $\hat{\mathbf{j}}_2$, $\hat{\mathbf{j}}_3$ в результирующий момент $\hat{\mathbf{J}}$. Эта процедура не является однозначной. Возможны, например, такие два способа: 1) сначала складываем $\hat{\mathbf{j}}_1$ и $\hat{\mathbf{j}}_2$ в суммарный момент $\mathbf{J}_{12}$, а затем складываем $\hat{\mathbf{J}}_{12}$ и $\hat{\mathbf{j}}_3$ в результирующий момент $\hat{\mathbf{J}}$; 2) сначала складываем $\hat{\mathbf{j}}_2$ с $\hat{\mathbf{j}}_3$ в суммарный момент $\mathbf{J}_{23}$, а затем складываем $\hat{\mathbf{J}}_{23}$ и $\hat{\mathbf{j}}_1$ в результирующий момент $\hat{\mathbf{J}}$. Эти способы соответствуют различным наборам динамических переменных, которыми задается состояние системы

$$|JMJ_{12}\rangle = \sum |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{12} m_{12}\rangle \times \times \langle J_{12} m_{12} j_3 m_3 | JM\rangle \tag{43.10а}$$

$$|JMJ_{23}\rangle = \sum |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | J_{23} m_{23}\rangle \times \times \langle j_1 m_1 J_{23} m_{23} | JM\rangle. \tag{43.10б}$$

Переход от одного способа задания к другому осуществляется с помощью функции преобразования $\langle JJ_{12}|JJ_{23}\rangle$, которая легко находится из выражений (43.10а) и (43.10б) по общим правилам:

$$\langle JJ_{12}|JJ_{23}\rangle = \sum_{mm_2} \langle j_1 M - m j_2 m_2 | J_{12} M - m + m_2\rangle \times$$

$$\times \langle j_2 m_2 j_3 m - m_2 | J_{23} m\rangle \langle j_1 M - m J_{23} m | JM\rangle \times$$

$$\times \langle J_{12} M - m + m_2 j_3 m - m_2 | JM\rangle.$$

Выражая коэффициенты векторного сложения через 3j-символы и сравнивая с соотношением (43.7), нетрудно получить

$$\langle JJ_{12}|JJ_{23}\rangle = \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)} \times W(j_1 j_2 J j_3;\ J_{12} J_{23}). \tag{43.11}$$

Функции преобразования $\langle JJ_{12}|JJ_{23}\rangle$ должны удовлетворять условию унитарности, а с учетом выражений (43.9) и (43.11) это означает, что

$$\sum_j (2j+1)(2j''+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'' \\ j_3 & j_4 & j \end{Bmatrix} = \delta_{j'j''}.$$

Рассмотрим три способа сложения трех моментов с промежуточными суммами $J_{12} J_{23} J_{31}$. Тогда, согласно свойству функций преобразования,

$$\sum \langle J_{12}|J_{23}\rangle \langle J_{23}|J_{31}\rangle = \langle J_{12}|J_{31}\rangle. \tag{43.12}$$

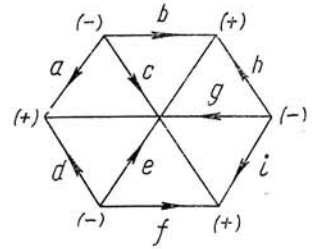
Подставив в это выражение (43.11), после простого переобозначения найдем:

$$\sum_j (-1)^{j+j_5+j_6} (2j+1) \begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_1 & j_5 & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j \\ j_2 & j_5 & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}. \tag{43.13}$$

Аналогичным образом можно ввести скаляры более высокого порядка. Свертка шести 3j-символов называется X-коэффициентом или 9j-символом, так как она является функцией девяти переменных и обозначается

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Bmatrix}.$$

Графически она изображается так:



(43.14)

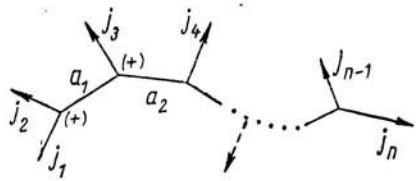
Эту величину можно представить в виде суммы произведений трех $6j$-символов:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Bmatrix} = \sum_j (-1)^{2j} (2j+1) \begin{Bmatrix} a & d & g \\ h & i & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & h \\ d & j & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & i \\ j & a & b \end{Bmatrix}. \quad (43.15)$$

$9j$-символ обладает высокой симметрией: транспозиция строк и столбцов не меняет $9j$-символа; перестановка любых двух строк или двух столбцов умножает $9j$-символ на $(-1)^{\Sigma j}$ (Σj — целое число).

Для некоторых задач необходимы скаляры еще более высокого порядка. Число параметров в них, очевидно, кратно трем. Их естественно назвать $3nj$-символами. При работе со скалярами высокого порядка изложенный выше графический метод Левинсона оказывается особенно удобным. С помощью этого метода скаляры высокого порядка нетрудно сводить к суммам скаляров низшего порядка (главным образом $6j$-символов), для которых имеются обширные таблицы. Прежде чем изложить правила этого процесса, введем еще одно понятие — обобщенные коэффициенты Вигнера. Обобщенным коэффициентом Вигнера называется простейшая комбинация $3j$-символов, содержащая заданную последовательность магнитных квантовых чисел. Графически обобщенные коэффициенты Вигнера изображаются многоугольниками вида:

$V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{pmatrix} =$



Способ связи аргументов ($j_1, \dots, j_n$) характеризуется соображениями удобства. Как видно из определения обобщенных коэффициентов Вигнера, они отличны от нуля, если $\Sigma m_i = 0$, а j_i образуют многоугольник с периметром, равным целому числу.

Свойства этих коэффициентов непосредственно следуют из свойств $3j$-символов:

$$V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + \dots + j_n} V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ -m_1 & \dots & -m_n \end{pmatrix};$$

$$\sum_{m_1 \dots m_n} (-1)^{j_1 - m_1} \dots (-1)^{j_n - m_n} V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} \times$$

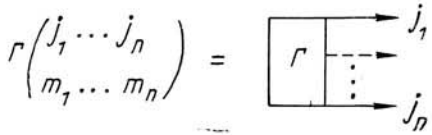
$$\times V_{a_1'} V_{a_1' \dots a_{n-3}'} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ -m_1 & \dots & -m_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n-3} \frac{\delta_{a_i a_i'}}{\sqrt{2a_i+1}}; \quad (43.17)$$

$$\sum_{a_1 \dots a_{n-3}} (2a_1+1) \dots (2a_{n-3}+1) \times$$

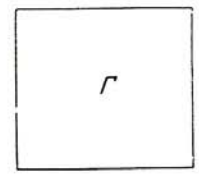
$$\times V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ -m_1' & \dots & -m_n' \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (-1)^{j_i - m_i} \delta_{m_i m_i'}. \quad (43.18)$$

Как уже отмечалось выше, любая сумма произведений $3j$-символов может быть представлена в виде незамкнутого графа



или замкнутого графа



Операции упрощения сложных графов основаны на перечисленных свойствах обобщенных коэффициентов Вигнера.

Используя соотношение ортогональности (43.18), незамкнутые графы легко сводим к замкнутым:

$$\Gamma \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \sum_{a_1 \dots a_{n-3}} (2a_1+1) \dots (2a_{n-3}+1) \times$$

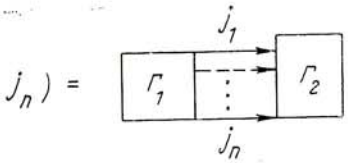
$$\times \Gamma (a_1 \dots a_{n-3};\ j_1 \dots j_n) V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad (43.19)$$

где

$$\Gamma (a_1 \dots a_{n-3};\ j_1 \dots j_n) = \sum (-1)^{j_1 - m_1} \dots (-1)^{j_n - m_n} \Gamma \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} \times$$

$$\times V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} -$$

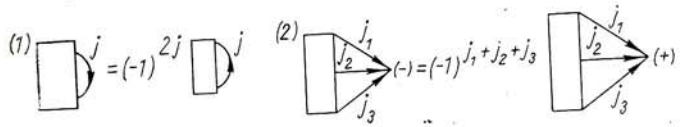
замкнутые графы. На основе тех же свойств замкнутые графы «разрезаем» на более простые:



$$\Gamma(j_1 \dots j_n) = \sum_{a_1 \dots a_{n-3}} (2a_1+1) \dots (2a_{n-3}+1)\, \Gamma_1(a_1 \dots a_{n-3};\ j_1 \dots j_n)$$
$$\Gamma_2(a_1 \dots a_{n-3};\ j_1 \dots j_n).$$

Операцию «разрезания» графов, очевидно, можно применять многократно, пока не будет достигнуто максимальное упрощение. Упрощение графов просто сводит одни функции преобразования Дирака к другим, табулированным.

При упрощении следует иметь в виду следующие очевидные, но существенные для определения фазового множителя правила:

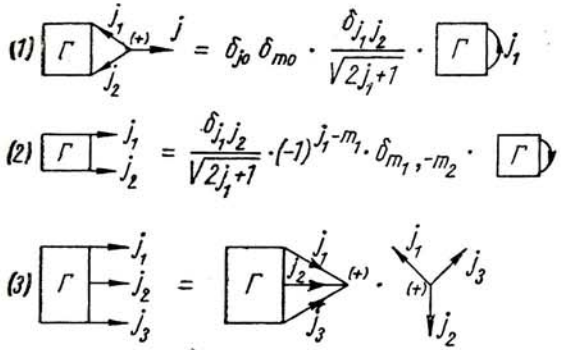


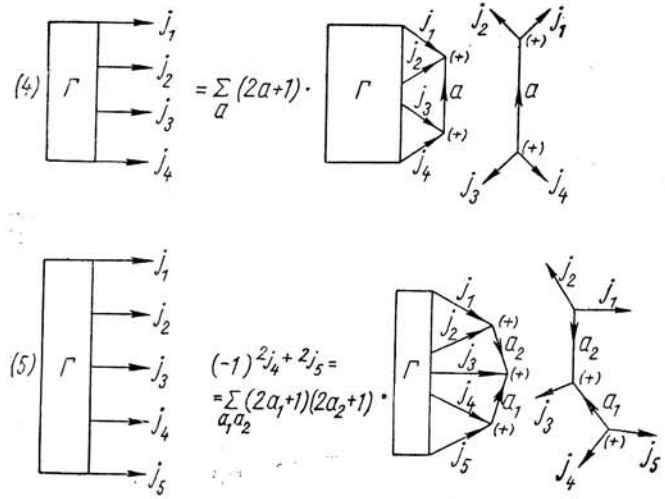
3. Если в незамкнутом графе

$$\Gamma\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

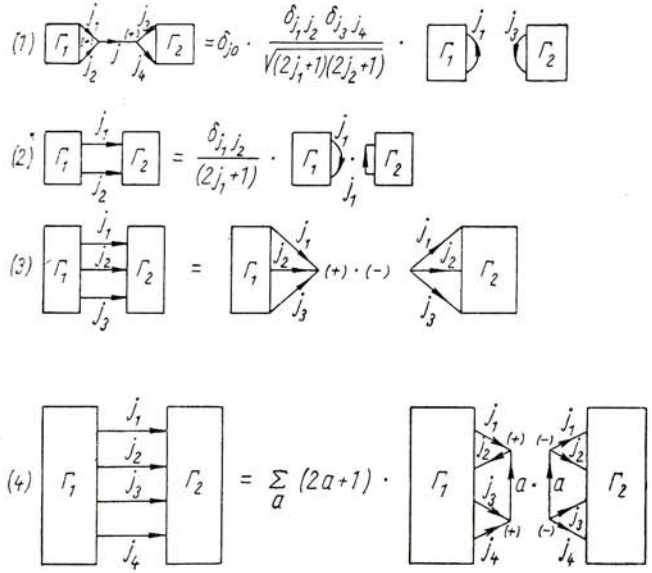
часть магнитных квантовых чисел имеет отрицательный знак, то сумму в соотношении (43.19) следует умножить на $(-1)^{2i} \dots (-1)^{2i_k}$, где $j_i \dots j_k$ — квантовые числа полных моментов, соответствующие этим магнитным квантовым числам. Приведем для справок таблицу наиболее часто встречающихся упрощений графов:

А. Незамкнутые графы



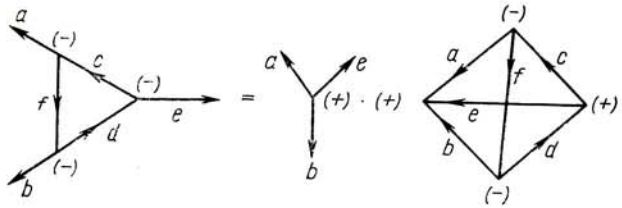


Б. Замкнутые графы



Простейшие примеры:

1) сумма произведений трех $3j$-символов [см. соотношение (43.6)] легко сводится к произведению $6j$-символа на $3j$-символ, и получаем полезную формулу:

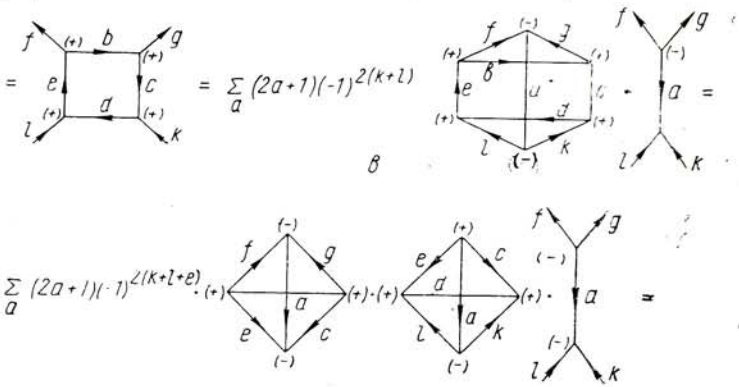


$$\sum (-1)^{c-\gamma+d-\delta+f-\varphi} \begin{pmatrix} a & c & f \\ \alpha & -\gamma & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b & f \\ \delta & \beta & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c & e \\ -\delta & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & e \\ \alpha & \beta & \varepsilon \end{pmatrix} (-1)^{2(c+d+f)} \cdot \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}; \qquad (43.20)$$

2) сумма произведений четырех $3j$-символов

$$\sum_{\beta\delta\gamma\varepsilon} (-1)^{b-\beta+c-\gamma+a-\delta+e-\varepsilon} \begin{pmatrix} e & b & f \\ -\varepsilon & \beta & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c & g \\ -\beta & \gamma & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a & k \\ -\gamma & \delta & -\varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e & l \\ -\delta & \varepsilon & -\lambda \end{pmatrix} =$$



Для ядерных реакций иногда оказывается удобным ввести помимо $6j$-символов коэффициенты Z и Z_Υ.

Коэффициент Z определяется следующей формулой:

$$Z(abcd;\, ef) = i^{f-a+c} [(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2} \times$$
$$\times W(abcd;\, ef)(a0c0 \mid f0). \qquad (43.21)$$

Существует простая формула для вычисления коэффициента $(a0c0|f0)$, которая дается в приложении V. Таким образом, вычисление коэффициента Z сводится к вычислению соответствующего ему коэффициента W. Коэффициент $(a0c0 \mid f0)$ равен нулю, когда $a+c+f$ равно нечетному числу. Поэтому для Z имеем дополнительное соотношение:

$Z = 0$, если $a+c+f$ нечетно.

Частные случаи:

$$Z(abcd;\, 0\, f) = \delta_{ab}\, \delta_{cd} (-1)^{2f}\, i^{f-a+c} [(2a+1)(2c+1)]^{1/2} (a\,0\,c\,0 \mid f\,0); \qquad (43.22)$$

$$Z(abcd;\, e\,0) = \delta_{ac}\, \delta_{bd} (-1)^{b-e} (2b+1)^{1/2}. \qquad (43.23)$$

Здесь мы воспользовались формулой для коэффициента

$$(a\,0\,b\,0 \mid 0\,0) = \delta_{ab} (-1)^a (2a+1)^{-1/2}. \qquad (43.24)$$

Как будет показано в §§ 44 и 47, более целесообразно определять коэффициенты Z без множителя i^{f-a+c}. Но так как во всех ранних работах и таблицах коэффициентов Z принято определение (43.21), мы не сочли целесообразным изменить его. Коэффициент Z_Υ определяем так:

$$Z_\Upsilon(abcd;\, ef) = [(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2}\, W(abcd;\, ef) \times$$
$$\times (a\,-1\,c\,1 \mid f\,0). \qquad (43.25)$$

Формула значительно упрощается для случая $e=0$:

$$Z_\Upsilon(abcd;\, 0\, f) = (-1)^{b+c-f} [(2a+1)(2c+1)]^{1/2} \times$$
$$\times (a\,-1\,c\,1 \mid f\,0)\, \delta_{ab}\, \delta_{cd}. \qquad (43.26)$$

Определение Z_Υ несколько отличается от определения коэффициентов, применявшихся в аналогичных случаях другими авторами.

§ 44. УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ (СЛУЧАЙ, КОГДА ЧАСТИЦЫ ИМЕЮТ МАССУ ПОКОЯ, ОТЛИЧНУЮ ОТ НУЛЯ)

Изложенный выше математический аппарат позволяет получить общее выражение дифференциального сечения произвольной реакции типа *

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \to 1 + 2. \qquad (44.1)$$

Согласно сказанному выше, в этом выражении будут явно выделены свойства сечения, связанные с общими законами (законы сохранения, общие законы квантовой механики), и свойства, связанные со спецификой реакции (эти свойства описываются параметрами типа фаз рассеяния).

В § 42 были рассмотрены простейшие примеры. Теперь перейдем к общему случаю. Из выражения (34.2) следует, что S-матрица

* См. работы [19, 22, 27].

в представлении интегралов движения (в системе центра инерции) имеет следующий вид:

$$(s'l'\alpha' \mid S^J \mid sl\alpha)\,\delta_{J'J}\,\delta_{M'M}\,\delta(E'-E), \qquad (44.2)$$

где α и α' — квантовые числа, характеризующие природу и внутреннюю структуру соответственно сталкивающихся и разлетающихся частиц. Например, если применить теорию к столкновению атомов водорода, то в соотношение (44.2) вошли бы квантовые числа, характеризующие состояния электрона в этих атомах. В дальнейшем конкретизируем не квантовые числа α и α', а только те переменные S-матрицы, о поведении которых можно делать определенные суждения. В α также включены квантовые числа спинов частиц, но не их проекций. В соотношении (44.2) величины s и s' — полные спины каналов, векторная сумма спинов соответственно сталкивающихся $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}} + \hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}}$ и разлетающихся $\hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$ частиц; l- и l'-орбитальные моменты (в системе центра инерции) сталкивающихся и разлетающихся частиц.

Наша цель — получить дифференциальное сечение реакции (44.1). Связь S-матрицы с сечением дается общей формулой (37.8). Дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$ получится в том случае, если в число переменных, обозначенных через f_0, будут включены углы рассеяния θ и φ. Преобразуем выражение (44.2) к этим переменным. Для этого сначала совершим преобразование к переменным $s'l'm_s'\,m'$ (m_s' — квантовое число проекции $\hat{s}'$; m' — проекции $\hat{l}'$). Функциями такого преобразования будут, очевидно, коэффициенты векторного сложения $(J'M' \mid s'm_s'l'm')$. Затем перейдем к переменным θ и φ при помощи функций преобразования $(\theta\varphi \mid l'm') = Y_{l'm'}(\theta, \varphi)$.

В качестве переменных начального состояния, согласно выражению (37.8), необходимо взять $lm\mu_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{II}}$. Для этого преобразуем соотношение (44.2) при помощи $(JM \mid sm_s lm)$, а затем — при помощи $(sm_s \mid j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}\, j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}})$. В результате получим, что в формулу (37.8) вместо $[(f_0 \mid \hat{S} - I \mid \alpha j_{\mathrm{I}}\ \mu_{\mathrm{I}}\ j_{\mathrm{II}}\ \mu_{\mathrm{II}}\, l0)]$ необходимо подставить выражение

$$\sum_{JMl'm'sm_s} Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\,(s'm_s'l'm \mid JM)\,(s'l'\alpha' \mid R^J \mid sl\alpha)\times$$
$$\times (JM \mid sm_s\, l\, 0)\,(sm_s \mid j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}\, j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}). \qquad (44.3)$$

Задача в сущности уже решена, необходимо лишь преобразовать и упростить окончательный результат. Во-первых, формула относится к практически мало осуществимому случаю, когда падающие частицы и частицы мишени имеют строго определенную ориентацию спинов в пространстве; в конечном состоянии были также зафиксированы определенные значения величин s' и m_s'. Наиболее часто встречаются задачи, в которых падающие частицы и частицы мишени не поляризованы, причем поляризацией частиц в конечном состоянии не интересуются. Таким образом, необходимо после подстановки выражения (44.3) в формулу (37.8) усреднить по начальным и просуммировать по конечным состояниям спинов частиц. Используя ортогональность коэффициентов $(sm_s \mid j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}\, j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}})$, найдем

$$\frac{d\sigma_{\alpha'\alpha}}{d\Omega} = \frac{\lambda_\alpha^2}{(2j_{\mathrm{I}}+1)(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum (l_1' s'\alpha' \mid R^{J_1} \mid l_1 s\alpha)^* \times$$
$$\times (l_2' s'\alpha' \mid R^{J_2} \mid l_2 s\alpha)\, K(J_1 l_1' l_1;\ J_2 l_2' l_2;\ s's;\ \theta). \qquad (44.4)$$

Суммирование ведется по $J_1 l_1 l_1' J_2 l_2 l_2' ss'$.

В величину K мы выделили сомножители, характеризующиеся только кинематикой столкновения. Спецификой столкновения (природой каналов) определяются матричные элементы оператора R.

Выражение

$$K(J_1 l_1' l_1;\ J_2 l_2' l_2;\ s's;\ \theta) = (2l_1+1)^{\frac{1}{2}}(2l_2+1)^{\frac{1}{2}}\pi \times$$
$$\times \sum_{m_1 m_2 m_s m_s'} (l_1 0\ sm_s \mid J_1 M_1)\,(l_2 0\ sm_s \mid J_2 M_2)\,(l_1' m_1\, s'm_s' \mid J_1 M_1) \times$$
$$\times (l_2' m_2\, s'\, m_s' \mid J_2 M_2)\, Y^*_{l_1 m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi)$$

можно подвергнуть существенному дальнейшему упрощению, сведя его к комбинациям коэффициентов Z и полиномов Лежандра. Используя формулу

$$Y^*_{l_1 m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{LM} \left[\frac{2l_1+1)\,(2l_2+1)}{4\pi\,(2L+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (L\,0 \mid l_1\,0\ l_2\,0)\,(LM \mid l_1 - m_1\, l_2\, m_2)\,(-1)^{m_1} Y_{LM}(\theta, \varphi), \qquad (44.5)$$

получаем K в виде суммы произведений коэффициентов векторного сложения. Эти суммы можно упростить, применяя изложенный в § 43 метод. Окончательный результат после простых преобразований запишется так:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{(2j_{\mathrm{I}}+1)(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum_{L=0}^{\infty} B_L\, P_L(\cos\theta), \qquad (44.6)$$

где $P_L(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, а

$$B_L = \sum \frac{(-1)^{s'-s}}{4} Z(l_1 J_1 l_2 J_2;\ sL)\, Z(l_1' J_1 l_2' J_2;\ sL) \times$$
$$\times \left\{ i^{l_2' - l_1' + l_1 - l_2} \operatorname{Re}\left[(l_1' s'\alpha' \mid R^{J_1} \mid l_1 s\alpha)^* (l_2' s'\alpha' \mid R^{J_2} \mid l_2 s\alpha)\right]\right\}. \qquad (44.7)$$

Суммирование идет по $J_1 J_2 l_1 l_2 l'_1 l'_2 s$ и s'. Нетрудно видеть, что выражение (44.7) удовлетворяет теореме взаимности*.

Суммирование по всем квантовым числам формально распространяется неограниченно от 0 до ∞. Однако неограниченной является только сумма по одному из чисел (например, по J_1). Остальные ограничены правилами отбора для коэффициентов W, через которые выражаются коэффициенты Z. Отметим, что все члены в сумме (44.7), очевидно, действительны.

Для практических вычислений более удобно следующее выражение для B_L:

$$B_L = \sum_{ss'} \frac{(-1)^{s'-s}}{4} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{l'=|J-s'|}^{J+s'} Z(lJlJ; sL) \times$$

$$\times Z(l'Jl'J; s'L) |(l's'\alpha' | R^J | ls\alpha)|^2 +$$

$$+ \sum_{s=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{s'=|j_1-j_{11}|}^{j_1+j_{11}} \frac{(-1)^{s'-s}}{4} \sum_{J_2+s'} \sum_{J_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=|J_1-s|}^{J_1+s} \sum_{l'_1=|J_1-s'|}^{J_1+s'} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{J_2=J_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=|J_2-s|}^{J_2+s} \sum_{l'_2=|J_2-s'|}^{J_2+s'} Z(l_1 J_1 l_2 J_2; sL) \right.$$

$$Z(l'_1 J_1 l'_2 J_2; s'L) \operatorname{Re}[\ldots] +$$

$$+ \sum_{l_2=l_1+1}^{J_1+s} \sum_{l'_2=|J_1-s'|}^{J_1+s'} Z(l_1 J_1 l_2 J_1; sL) Z(l'_1 J_1 l'_2 J_1; s'L) \times$$

$$\times \operatorname{Re}[J_2 = J_1] + \sum_{l'_2=l'_1+1}^{J_1+s'} Z(l_1 J_1 l_1 J_1; sL) \times$$

$$\left. \times Z(l'_1 J_1 l'_2 J_1; s'L) \operatorname{Re}[J_2 = J_1,\ l_2 = l_1] \right\}.$$

В квадратные скобки следует подставить выражение, заключенное в фигурные скобки в соотношении (44.7). В этом выражении каждый член встречается только один раз. Наряду с ограничением предела отдельных суммирований число членов в выражении (44.7) уменьшают также следующие условия: $(l_1 + l_2 - L)$ и $(l'_1 + l'_2 - L)$ — четные числа; $(l_1 + l'_1)$ и $(l_2 + l'_2)$ — четные (нечетные) числа, если каналы α и α' имеют одинаковые (противоположные) четности. Четность канала определяется как произведение внутренних четностей сталкивающихся (или разлетающихся) частиц. Кроме того, существуют ограничения на величину L, известные под названием теорем о сложности углового распределения [28], которые легко получить из свойств коэффициентов Рака (см. § 43): $L \leqslant 2l^{\text{макс}}, 2J^{\text{макс}}, 2l'^{\text{макс}}$. В правых частях этих неравенств, которые должны выполняться одновременно, стоят наибольшие значения моментов, участвующих в процессе.

Обычно приходится применять формулу (44.6) или когда входят только малые значения орбитальных моментов, или когда реакция идет через определенное состояние по полному моменту, или когда малы спины сталкивающихся частиц: 0, 1/2 либо 1. В этих случаях приведенные формулы очень сильно упрощаются. Ограниченное число коэффициентов Z, входящих в полученные таким образом выражения, берется из таблиц, приведенных в приложении V.

Одно из важнейших применений формулы (44.6) заключается в проведении обобщенного фазового анализа экспериментальных данных. Этот анализ заключается в следующем. Экспериментально измеренное угловое распределение разлагается по полиномам Лежандра. Из сравнения результата этого разложения с формулой (44.6) определяются матричные элементы S-матрицы $(l's'\alpha' | S | ls\alpha)$, т. е. находятся те параметры в угловом распределении, которые определяются не кинематикой, а специфическими особенностями процесса.

В общем случае такой анализ неоднозначен. Как было показано выше, величины $(l's'\alpha' | S | ls\alpha)$ — матрицы, содержащие большое число действительных параметров, а исследование угловых распределений дает число уравнений, значительно меньшее числа неизвестных параметров. Для полного определения параметров необходимы исследования столкновений поляризованных частиц, дающие дополнительные уравнения для нахождения параметров.

Даже в случае упругого рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином, равным нулю, анализ угловых распределений не дает полной информации о параметрах S-матрицы — фазах. В этом случае, как было показано в § 40, S-матрица имеет вид

$$e^{2i\delta_l^J} \delta_{l'l} \delta_{s's}, \qquad (44.8)$$

причем $l = J \pm 1/2$, откуда следует, что при заданных J_1, J_2 и L в коэффициенты B_L будут входить коэффициенты Z четырех типов:

$$Z\left(J_1 - \tfrac{1}{2} J_1 J_2 - \tfrac{1}{2} J_2; \tfrac{1}{2} L\right) = Z_{11};$$

$$Z\left(J_1 + \tfrac{1}{2} J_1 J_2 - \tfrac{1}{2} J_2; \tfrac{1}{2} L\right) = Z_{12};$$

$$Z\left(J_1 - \tfrac{1}{2} J_1 J_2 + \tfrac{1}{2} J_2; \tfrac{1}{2} L\right) = Z_{21};$$

* Формула (44.7) отличается от аналогичной формулы работы [19] фазовым множителем $i^{l'_2 - l'_1 + l_1 - l_2}$. Различие связано с тем, что S-матрица работы [19] не удовлетворяет требованию инвариантности по отношению к обращению времени (см. § 35 и работу [21]).

$$Z\left(J_1+\tfrac{1}{2}J_1J_2+\tfrac{1}{2}J_2;\tfrac{1}{2}L\right)=Z_{22}.$$

Согласно § 43, Z_{11} и Z_{22} отличны от нуля, когда J_1+J_2-L четно, а Z_{12} и Z_{21} отличны от нуля, когда J_1+J_2-L нечетно. Отсюда следует, что в формулу для угловых распределений войдут только комбинации $Z_{11}Z_{11}$, $Z_{22}Z_{22}$, $Z_{11}Z_{22}$ и $Z_{12}Z_{21}$. Но эти коэффициенты обладают двумя свойствами симметрии: $Z_{11}=Z_{22}$ и $Z_{12}=-Z_{21}$.

Из этих результатов нетрудно усмотреть, что величина B_L не меняется, если произвести замену $\delta_{J+\frac{1}{2}}^{J}\rightleftarrows\delta_{J-\frac{1}{2}}^{J}$ для всех J одновременно. Иначе говоря, определение коэффициентов B_L из анализа экспериментальных данных не дает однозначного определения величин фаз. Эта неоднозначность [32] существенна для анализа данных по рассеянию π-мезонов на нуклонах.

С помощью выражений (44.6) и (44.8) легко показать, что при рассеянии мезон — нуклон существует также неоднозначность фазового анализа, связанная с выбором знаков фаз, — изменение всех знаков фаз не меняет величин коэффициентов B_L. Эти неоднозначности можно устранить анализом опытов по измерению поляризации нуклонов после рассеяния мезонов, а также по анализу интерференции кулоновского и ядерного рассеяний.

Представляем читателю в качестве упражнения получить из общей формулы (44.6) дифференциальные сечения рассеяния для бесспиновых частиц и сечения рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 0 и выразить эти сечения через фазы рассеяния для низших значений орбитального момента $l=0,1$. Последний результат важен для фазового анализа рассеяния π-мезонов на нуклонах. Предполагаем также доказать, что угловое распределение частиц сферически симметрично, если реакция идет только через состояние полного момента 0 или 1/2.

Глава 8

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

§ 45. ОБЩАЯ ФОРМУЛА

В связи с развитием экспериментальной техники все большее значение приобретают опыты с поляризованными частицами. По сути дела, в этих опытах измеряется зависимость матрицы рассеяния от переменных, характеризующих новые степени свободы. Опыты по измерению только угловых распределений дают лишь усредненные по этим переменным данные. Ряд закономерностей возникновения поляризации и особенностей реакций с поляризованными частицами можно получить исходя только из общих свойств S-матрицы, рассмотренных в первой главе. Поэтому обсуждаемые ниже закономерности совершенно общие, не зависящие от природы участвующих

в реакции частиц и деталей их взаимодействий. Сначала рассмотрим закономерности возникновения поляризованных частиц при столкновении пучка неполяризованных падающих частиц с неполяризованными частицами мишени. Общий случай реакций с поляризованными частицами и корреляции при кратных процессах будут рассмотрены в §§ 51—54 после того, как введем некоторые новые понятия.

Поляризацией по определению называется среднее значение оператора спина

$$(\Psi,\hat{\mathbf{j}}\Psi)=\mathbf{j}. \tag{45.1}$$

Это, очевидно, векторная величина.

Рассмотрим поляризацию частиц, возникающих в результате процесса столкновения. Для определенности речь будет идти о поляризации частиц, обозначенных индексом 1. При этом в качестве величины Ψ надо взять волновую функцию образованных в результате реакции частиц. Эта волновая функция, согласно § 37, имеет вид

$$\Psi_f'=\sqrt{2\pi}\sum_l\sqrt{\pi\lambdabar^2(2l+1)}\,(f_0|R|\alpha j_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}j_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}l\,0). \tag{45.2}$$

Если в это выражение вместо матричного элемента $\hat{R}$ подставить формулу (44.3), то получится волновая функция с индексами представления (индексами, на которые действуют операторы) ϑ, φ, $s'm_s'$. Отсюда видно, что для вычисления поляризации (45.1) необходим явный вид оператора $\hat{\mathbf{j}}_1$ в представлении $s'm_s'$:

$$(s_1'\,m_{s_1}'|\,\hat{\mathbf{j}}_1\,|\,s_2'\,m_{s_2}'). \tag{45.3}$$

Вычислив матрицу (45.3), а затем образовав произведение (45.1), т. е. просуммировав по $s_1's_2'm_{s_1}'m_{s_2}'$ и проинтегрировав по углам, получим среднее значение вектора поляризации (причем найденная величина будет иметь смысл поперечного сечения). Это так называемая полная поляризация. Если же в произведении (45.1) не проводить интегрирования по углам θ, φ, то получится так называемая дифференциальная поляризация, представляющая наибольший интерес. Она имеет смысл дифференциального сечения, а именно, она является средним значением оператора спина частиц, попадающих в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, если поток падающих частиц единичный. Для дифференциальной поляризации будем использовать обозначение $\overline{dP}/d\Omega$.

Часто вводят понятие относительной поляризации:

$$f=\frac{1}{j_1}\cdot\frac{\dfrac{\overline{dP}}{d\Omega}}{\dfrac{d\sigma}{d\Omega}},$$

где $d\sigma/d\Omega$ — дифференциальное сечение.

Перейдем к вычислению матрицы (45.3). В книге [2] (см. § 27 книги [2]) приведены общие выражения для матриц операторов про-

екций момента количества движения. Эти выражения получены только из одних условий коммутации и поэтому применимы также и к оператору спина:

$$(\mu\,|\,\hat{j}_x + i\hat{j}_y\,|\,\mu') = \sqrt{(j+\mu)(j-\mu+1)}\,\delta_{\mu',\mu-1};$$
$$(\mu\,|\,\hat{j}_x - i\hat{j}_y\,|\,\mu') = \sqrt{(j-\mu)(j+\mu+1)}\,\delta_{\mu',\mu+1},$$
$$(\mu\,|\,\hat{j}_z\,|\,\mu') = \mu\delta_{\mu'\mu}.$$

Сопоставляя эти выражения с таблицей коэффициентов векторного сложения для $j = 1$, можно усмотреть следующую объединяющую их общую формулу *

$$(\mu'\,|\,\hat{j}_\nu\,|\,\mu) = \sqrt{(j+1)\,j}\,(j\mu'\,|\,1\nu j\mu), \quad \nu = 0, \pm 1, \qquad (45.4)$$

где

$$\hat{j}_0 = \hat{j}_z, \quad \hat{j}_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j}_x \pm i\hat{j}_y).$$

Переведем эту матрицу в нужное представление:

$$(s_1'\,m_{s_1}'\,|\,\hat{j}_\nu\,|\,s_2'\,m_{s_2}') = \sum_{\mu_1\,\mu_1'}(s_1'\,m_{s_1}'\,|\,j_1\mu_1'\,j_2\mu_2)\times$$
$$\times\sqrt{j_1(j_1+1)}\,(j_1\mu_1'\,|\,1\nu j_1\mu_1)(j_1\mu_1\,j_2\mu_2\,|\,s_2\,m_{s_2}').$$

Упрощая это выражение при помощи методики § 43, найдем:

$$\sqrt{j_1(j_1+1)}\left[\frac{1}{3}(2s_1'+1)(2s_2'+1)(2j_1+1)\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^{j_2-j_1+m_{s_1}'-\nu}\times$$
$$\times(s_1'\,-m_{s_1}'\,s_2\,m_{s_2}'\,|\,1-\nu)\,W(j_1\,s_1'\,j_1\,s_2';\,j_2\,1). \qquad (45.5)$$

Умножим (45.5) справа на Ψ_f', а слева — на $\Psi_f'^{*}$ и просуммируем по $s_1'\,m_{s_1}'\,s_2'\,m_{s_2}'$. Кроме того, так как частицы I и II не поляризованы, усредним по спинам начального состояния

$$dP_\nu = \frac{\pi\lambda^2}{(2j_1+1)(2j_{II}+1)}\sqrt{j_1(j_1+1)}\,\frac{(2j_1+1)^{1/2}}{\sqrt{3}}\sum[(2l_1+1)(2l_2+1)]^{1/2}\times$$
$$\times[(l'\,s_1'\,\alpha'\,|\,R^{J_1}\,|\,ls\alpha)]^{*}\,[(l_2'\,s_2'\,\alpha'\,|\,R^{J_2}\,|\,l_2\,s\alpha)]\times$$
$$\times\sum_{m_s\,m_{s_1}'\,m_{s_2}'}[(l_1\,0\,sm_s\,|\,J_1\,m_s)(l_2\,0\,sm_s\,|\,J_2\,m_s)\times$$
$$\times(l_1'\,m_1'\,s_1'\,m_{s_1}'\,|\,J_1\,m_s)(l_2'\,m_2'\,s_2'\,m_{s_2}'\,|\,J_2\,m_s)\times$$

* Полученная формула (45.4) — частный случай теоремы Вигнера — Эккерта (см. § 49).

$$\times Y_{l_1 m_1}^{*}\,Y_{l_2 m_2}(-1)^{j_2-j_1+m_{s_1}'-\nu}\left[(2s_1'+1)(2s_2'+1)\right]^{1/2}\times$$
$$\times(s_1'\,-m_{s_1}'\,s_2'\,m_{s_2}'\,|\,1-\nu)\,W(j_1\,s_1'\,j_1\,s_2';\,j_2\,s)\,d\Omega. \qquad (45.6)$$

Суммы по магнитным квантовым числам можно упростить аналогично тому, как это было сделано для угловых распределений. Детали этих несколько громоздких, но простых вычислений содержатся в работе [29], которая существенно использована в этом параграфе. Окончательная формула для циклических проекций вектора поляризации имеет вид

$$\frac{dP_\nu}{d\Omega} = \sum A_L\,(L\;0\;1\nu\,|\,L\nu)\,Y_{L\nu}(\theta,\,\varphi).$$

Сложное выражение для A_L не зависит от ν.

Из таблиц коэффициентов векторного сложения следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_z}{d\Omega} = \frac{dP_0}{d\Omega} = 0;\\
&\frac{dP_x}{d\Omega} = \left(\frac{dP_{-1}}{d\Omega} - \frac{dP_1}{d\Omega}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{1}{2}(Y_{L-1} + Y_{L1}) \sim\\
&\qquad \sim -i\sin\varphi\,\overline{P}_L^1(\cos\theta);\\
&\frac{dP_y}{d\Omega} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{dP_1}{d\Omega} + \frac{dP_{-1}}{d\Omega}\right) \sim -\frac{i}{2}(Y_{L1} - Y_{L-1}) \sim\\
&\qquad \sim i\cos\varphi\,\overline{P}_L^1(\cos\theta),
\end{aligned}\right\} \qquad (45.7)$$

где $\overline{P}_L^1$ — нормированные присоединенные функции Лежандра. Напомним, что ось z выбрана вдоль направления движения сталкивающихся частиц. Положение осей x и y пока не связано с физически выделенным направлением. Выберем теперь ось x так, чтобы она была расположена в плоскости реакции (это, очевидно, означает, что угол рассеяния $\varphi = 0$). В этой системе координат $dP_z/d\Omega = dP_x/d\Omega = 0$, откуда следует очень общее утверждение, что вектор поляризации частиц всегда направлен перпендикулярно плоскости реакции. Это ясно и из простых геометрических соображений: вектор поляризации является, очевидно, псевдовектором, а единственный псевдовектор, который может быть образован из единичных векторов $\mathbf{n}_\alpha$ и $\mathbf{n}_{\alpha'}$ — это векторное произведение $[\mathbf{n}_\alpha\mathbf{n}_{\alpha'}]$, откуда ясно, что вектор поляризации должен быть направлен вдоль этого вектора. Обозначим этот единичный вектор через $k = [\mathbf{n}_\alpha\mathbf{n}_{\alpha'}]$, тогда общее выражение для вектора дифференциальной поляризации можно записать в виде*

* Эта формула отличается от формулы (3.2) работы [29] мало существенным множителем. Различие обусловлено неудачной нормировкой тензорных моментов, использованной в работе [29] (см. [25]). Кроме того, имеется различие в фазовом множителе $i^{l_2'-l_2+l_1'-l_1}$, аналогичное отмеченному выше.

$$\frac{d\mathbf{P}_{\alpha\alpha'}}{d\Omega} = \mathbf{k}\frac{\lambda^2}{4}\cdot\frac{[2j_1(j_1+1)(2j_1+1)]^{\frac{1}{2}}}{(2j_I+1)(2j_{II}+1)}\cdot\sum \mathrm{Re}\{\mathrm{i}[(l_1's_1'\alpha'|R^{J_1}_{\gamma_{i1}}|l_1s\alpha)]^*\times$$

$$\times[(l_2's_2'\alpha'|R^{J_2}_{\gamma_{i2}}|l_2s\alpha)]\}\cdot(-1)^{j_2-j_1-s+J_2+s_2'+l_2'}(-i)^{-l_1+l_2+L}\times$$

$$\times Z(l_1J_1l_2J_2;\ sL)\,W(j_1s_1'j_1s_2';\ j_21)[(2j_1+1)(2l_1'+1)(2s_1'+1)\times$$

$$\times(2J_2+1)(2l_2'+1)(2s_2'+1)]^{\frac{1}{2}}(l_1'0l_2'0|L0)\times$$

$$\times X(J_1l_1's_1';\ J_2l_2's_2';\ LL1)\cdot\bar{P}^1_L(\cos\theta). \qquad (45.8)$$

Суммирование идет по $J_1J_2\pi_1\pi_2l_1l_2l_1'l_2's_1's_2'$, s и L. Все величины, входящие в вектор дифференциальной поляризации $d\mathbf{P}_{\alpha'\alpha}/d\Omega$, действительны.

§ 46. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

Обсудим основные закономерности возникновения поляризованных частиц:

1) как было показано, вектор поляризации всегда направлен перпендикулярно плоскости реакции;

2) поляризация есть существенно интерференционное явление; это видно из выражения, стоящего в фигурных скобках формулы (45.8). Оно имеет вид $\sum_{ll'}\mathrm{Re}[if_l^*f_{l'}]$, где f_l — амплитуды переходов в отдельные каналы; члены с $l = l'$ обращаются в нуль. Таким образом, если специфика реакции такова, что отличен от нуля только один матричный элемент S-матрицы, то поляризация должна быть равна нулю. Ряд закономерностей непосредственно вытекает из свойств коэффициентов Рака и коэффициентов векторного сложения;

3) если в реакции эффективно участвует S-волна (в начальном и конечном состояниях), то поляризация отсутствует;

4) если реакция идет через уровень составного ядра определенной четности и $J = 1/2$ (или $J = 0$, а четность любая), то поляризация также отсутствует;

5) если в конечном состоянии суммарный спин оказывается равным нулю, то поляризация равна нулю;

6) в случае отсутствия спин-орбитальной связи поляризация равна нулю;

7) если специфика взаимодействия такова, что значения орбитального момента начального и конечного состояний или полного момента J, принимающих участие в реакции, ограничены, то можно указать верхнюю границу для L:

$$L \leqslant 2l_1,\ 2l_1',\ 2J.$$

Величина L должна быть четной, если интерферирующие состояния обладают одинаковой четностью. Анизотропия углового распределения реакции, очевидно, исключает применение правил третьего и четвертого. Несимметрия углового распределения относительно 90° означает, что есть интерференционные эффекты, а следовательно, возможно возникновение поляризации;

8) можно сделать некоторые предсказания об угловом распределении поляризации. Для $\theta = 0$ и 180° $\bar{P}^1_L$ равны нулю и поляризация отсутствует. Если в реакции участвуют орбитальные состояния не выше $l = 1$, то зависимость поляризации будет определяться функциями $\bar{P}^1_1(\cos\theta)$ и $\bar{P}^1_2(\cos\theta)$, т. е. следует ожидать, что она будет максимальна для углов θ в областях 45 и 135°.

Полученная формула для поляризации очень громоздка. Однако этот недостаток связан с ее чрезвычайной общностью. Если в реакции участвуют частицы с низкими спинами и существенно только небольшое число значений орбитального момента, то формулу можно быстро упростить и в каждом конкретном случае при помощи таблиц представить коэффициенты в виде числовых множителей. Особенно просто использовать полученные выше формулы для угловых распределений и поляризаций, если применять числовые таблицы типа приведенных в приложении V для коэффициентов W, Z и X.

Приведем в качестве примера использования формулы (31.8) анализ реакции $\mathrm{Li}^6(n\alpha)\mathrm{H}^3$. Интерпретация [31] данных по этой реакции показывает, что в области энергии 270 *кэв* угловое распределение и энергетическую зависимость для нее можно объяснить, если принять, что отличны от нуля следующие элементы S-матрицы (левая часть равенства в наших обозначениях и правая — в обозначениях работы [31])

$$\left(1\,\frac{1}{2}\,|\,\bar{S}^{3/2}_{-}\,|\,1\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\tau}{\sqrt{2}},\quad \left(2\,\frac{1}{2}\,|\,S^{3/2}_{+}\,|\,0\,\frac{3}{2}\right) = a,\quad \left(0\,\frac{1}{2}\,|\,S^{1/2}_{+}\,|\,0\,\frac{1}{2}\right) = b.$$

На основании этих данных и сформулированных выше общих закономерностей можно сделать некоторые предсказания о поляризации ядер трития, возникающих в результате реакции. Поскольку состояния с различными спинами начальных состояний не интерферируют [см. формулу (45.8)], то поляризация может быть обусловлена только интерференцией состояний τ и b и сумма по L в формуле (45.8) для этого случая сводится к одному члену с $L = 1$. Используя свойства коэффициентов W и X и таблицы, нетрудно найти, что

$$W\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2};\ 01\right) = \frac{1}{2};\quad W = \left(1\,\frac{3}{2}\,0\,\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\,1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$X = \left(\frac{3}{2}\,1\,\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2};\ 111\right) = \frac{1}{\sqrt{216}},$$

а формула (45.8) дает

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\Omega} = \mathbf{k}\lambda^2 (864)^{-\frac{1}{2}} [i(\tau b^* - \tau^* b)] \overline{P}_1^1 (\cos\theta) =$$

$$= \mathbf{k}\lambda^2 \frac{2}{\sqrt{864}} |\tau^* b| \sin\eta \overline{P}_1^1 (\cos\theta).$$

Угловое распределение не дает возможности определить величину фазы η, от которой существенно зависит величина поляризации. Однако на основе данных по угловому распределению легко оценить наибольшее значение поляризации, которое можно ожидать для этой реакции.

Из рассмотренного примера видно, что сформулированные общие закономерности позволяют сделать довольно определенные суждения об угловой зависимости поляризации и ее величине, т. е. позволяют выбрать наиболее благоприятные условия для измерения поляризации. Измерение поляризации дает возможность получить сведения о фазах матричных элементов S-матрицы. Более подробно поляризационные явления обсуждаются в §§ 51—54, где рассмотрены также другие параметризации S-матрицы, допускающие существенное упрощение основных формул.

Глава 9

РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ ФОТОНОВ

§ 47. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Изложенный выше математический аппарат можно обобщить и на случай, когда в реакции участвуют фотоны. Для того чтобы понять, какие особенности возникают в этом случае, необходимо рассмотреть квантовую механику фотона. Однако это увело бы нас несколько в сторону, так как для наших узко практических целей нужно лишь несколько результатов этой теории. Читателю, желающему изучить вопрос более глубоко, следует ознакомиться, например, с первой главой монографии [20], где квантовая механика фотона изложена доступно для широкого круга физиков.

Мы используем в дальнейшем следующие результаты квантовой механики фотона:

1) фотон, как любая другая частица, имеет волновую функцию f. Она очень просто связана с вектор-потенциалом и является векторной величиной. Последнее означает, что спин фотона равен единице. Величина f_z является собственной функцией оператора проекции спина фотона с собственным значением $\mu = 0$; комбинации — $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x + if_y)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x - if_y)$ — собственные функции оператора проекции спина фотона с собственными значениями соответственно $+1$ и -1;

2) волновая функция фотона удовлетворяет условию поперечности: $(\mathbf{n}, \mathbf{f}(\mathbf{n})) = 0$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения фотона.

Из этого последнего результата и вытекают особенности общих формул, описывающих реакции с фотонами.

Наша задача состоит в том, чтобы придать условию поперечности вид, чтобы оно позволило нам простым видоизменением общих формул, справедливых для частиц с массой покоя, отличной от нуля, получать аналогичные формулы для фотонов.

Для частицы со спином 1 волновая функция с определенным орбитальным моментом l, его проекцией m и проекцией спина μ имеет вид

$$(\theta\varphi\mu' \mid lm\mu) = Y_{lm}(\theta, \varphi)\, \delta_{\mu'\mu}, \tag{47.1}$$

где θ и φ — углы, определяющие направление импульса частицы. Волновая функция частицы в том же представлении, но также с определенным полным моментом g и его проекцией m_g находится из функций (47.1) по правилам векторного сложения моментов

$$(\theta\varphi\mu' \mid lgm_g) = \sum_{m\mu} (\theta\varphi\mu' \mid lm\mu)\, (lm1\mu \mid gm_g). \tag{47.2}$$

При заданных g и m_g имеются три линейно независимые функции с $l = g$ и $l = g \pm 1$. Собственной функцией полного момента в $\hat{g}$ общем случае является любая линейная комбинация этих трех функций.

В случае фотона (в отличие от обычной частицы со спином 1) волновая функция еще должна удовлетворяться условию поперечности. Поэтому для получения волновой функции фотона, описывающей состояние с определенным полным моментом и его проекцией, надо построить линейные комбинации функций (47.2), удовлетворяющие этому дополнительному условию. Отсюда следует, что для фотона будут не три различных состояния с заданными квантовыми числами g и m_g, а только два.

Если найдем такие комбинации

$$\sum_l C^l(p)\, (\theta\varphi\mu' \mid lgm_g) = (\theta\varphi\mu' \mid pgm_g)$$

(индекс p может принимать два значения), то коэффициент $C^l(p)$ можно рассматривать как преобразование $(l \mid p)$, превращающее формулы, справедливые для обычных частиц, в формулы, справедливые для фотона. Таким образом, задача сведена к отысканию $(l \mid p)$.

Найдем $C^l(p) = (l \mid p)$ из следующих условий:

1) функции $(\theta\varphi\mu' \mid pgm_g)$ должны удовлетворять условию поперечности. Сформулируем это условие в том представлении, которым мы пользуемся.

$$(\mathbf{n}, \mathbf{f}(\mathbf{n})) = \cos\theta f_z(\mathbf{n}) + \cos\varphi \sin\theta f_x(\mathbf{n}) + \sin\varphi \sin\theta f_y(\mathbf{n}) =$$

$$= \cos\theta f_z(\mathbf{n}) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)\sin\theta e^{i\varphi} + \frac{1}{2}(f_x - if_y)\sin\theta e^{i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}(Y_{10}f_0 + Y_{11}f_1 + Y_{1-1}f_{-1}) = 0,$$

где f_μ — собственные функции оператора проекции спина в собственном представлении. Таким образом, условие поперечности можно записать в виде

$$\sum_{\mu'} Y_{1\mu'}(\theta\varphi)(\theta\varphi\mu' \mid pgm_g) = 0; \qquad (47.3)$$

2) функции $(\theta\varphi\mu' \mid pgm_g)$ должны быть собственными функциями оператора четности;

3) функции $(\theta\varphi\mu' \mid pgm_g)$ должны быть ортогональными и нормированными.

Заметим, что $(\theta\varphi\mu' \mid pgm_g)$, согласно перечисленным их свойствам, описывают электромагнитную волну с определенным полным моментом и четностью. Такие состояния в классической теории электромагнитного поля называются мультиполями.

Функции $(\theta\varphi\mu' \mid lgm_g)$ — собственные функции оператора четности:

$$\hat{P}(\theta\varphi\mu' \mid lgm_g) = (-1)^{l+1}(\theta\varphi\mu' \mid lgm_g). \qquad (47.4)$$

Множитель $(-1)^l$ получается в результате преобразования $\theta \to \pi - \theta$, $\varphi \to \varphi + \pi$ орбитальной части функции, (-1) — за счет спиновой части волновой функции. Так как $l = g \pm 1$, g, то состояние $l = g$ принадлежит одной четности, а $l = g \pm 1$ — другой. Согласно второму условию, в отыскиваемую комбинацию может входить или только $(\theta\varphi\mu' \mid ggm_g)$, или только $(\theta\varphi\mu' \mid g \pm 1gm_g)$. Отсюда найдем одну из искомых комбинаций

$$(\theta\varphi\mu' \mid ggm_g) = (\theta\varphi\mu' \mid 0gm_g). \qquad (47.5)$$

Следуя обозначениям, принятым в литературе, мы положили в последнем выражении индекс p равным нулю. Такие состояния называются состояниями магнитного типа; их четность равна $(-1)^{g+1}$. В частности, при $g = 1$ говорят о магнитном дипольном состоянии, при $g = 2$ — магнитном квадруполном состоянии и т. п.

Функция (47.5), согласно ее определению (47.2), удовлетворяет третьему условию. Нетрудно проверить, что она также удовлетворяет и первому условию.

$$\sum_{\mu'} Y_{1\mu'}(\theta, \varphi) \sum_{m\mu} Y_{gm}(\theta, \varphi)\,\delta_{\mu'\mu}(gm1\mu \mid gm_g) =$$

$$= \sum_{\mu} Y_{gm_g-\mu} Y_{1\mu}(gm_g - \mu 1\mu \mid gm_g).$$

Заменяя произведение шаровых функций при помощи формулы (44.5), находим

$$\sum_{\mu}\sum_{L=l-1}^{l+1}\sum_{M=-L}^{L}\left[\frac{(2g+1)(2l+1)}{4\pi(2L+1)}\right]^{\frac{1}{2}}(10g\,0 \mid L0)\times$$

$$\times(LM \mid 1\mu gm_g - \mu)(1\mu gm_g - \mu \mid gm_g)Y_{LM}.$$

Два последних коэффициента векторного сложения при суммировании по μ дадут произведение $\delta_{Lg}\delta_{Mm_g}$, и так как коэффициент $(10g0 \mid g0)$ равен нулю, то первое условие будет выполнено.

Найдем вторую функцию, обладающую четностью $(-1)^g$ (в литературе принято этим состояниям, носящим название состояний электрического типа, приписывать индекс $p = 1$):

$$(\theta\varphi\mu' \mid 1gm_g) = C^{g-1}(1)(\theta\varphi\mu' \mid g - 1gm_g) +$$

$$+ C^{g+1}(1)(\theta\varphi\mu' \mid g + 1gm_g).$$

Используя условие поперечности (47.3) и проделывая аналогичные выкладки, находим

$$C^{g-1}(1) = \sqrt{\frac{g+1}{g}}\,C^{g+1}(1),$$

а из условия нормировки получаем окончательно выражение для волновой функции состояний электрического типа

$$(\theta\varphi\mu' \mid 1gm_g) = \sqrt{\frac{g}{2g+1}}(\theta\varphi\mu' \mid g - 1gm_g) +$$

$$+ \sqrt{\frac{g+1}{2g+1}}(\theta\varphi\mu' \mid g + 1gm_g).$$

Коэффициенты $C^l(p)$ можно записать в общем виде:

$$C^l(p) = (l \mid p) = -\sqrt{2}(g - 111 \mid l0)\,\delta(l, p)(-1)^p, \qquad (47.6)$$

где символ $\delta(l, p)$ имеет следующий смысл:

$$\left.\begin{aligned}\delta(l,p) &= \begin{cases} 1 \text{ при } l = g \\ 0 \text{ при } l \neq g \end{cases} \text{ для } p = 0,\\ \delta(l,p) &= \begin{cases} 0 \text{ при } l = g \\ 1 \text{ при } l \neq g \end{cases} \text{ для } p = 1.\end{aligned}\right\} \qquad (47.7)$$

Преобразование (47.6) имеет большое значение, так как с его помощью обобщение очень многих результатов, справедливых для реакции с частицами на реакции с участием фотонов, носит почти тривиальный характер. При помощи преобразования (47.6) осуществляется преобразование от переменной l к переменной, характеризующей тип электромагнитного излучения (электрическое,

магнитное), причем (и это необходимо подчеркнуть) состояния фотона задаются полным моментом (орбитальный момент плюс спин), тогда как состояния сталкивающихся или разлетающихся частиц задавались суммарным спином. Это означает, что для получения формул, которые справедливы для реакций с участием фотонов, из соответствующих формул для реакции с частицами необходимо еще делать преобразование, меняющее порядок сложения моментов:

$$(\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}} + \hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}} = \hat{\mathbf{s}}) + \hat{\mathbf{l}} \to \hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{I}} + (\hat{\mathbf{j}}_{\mathrm{II}} + \hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{g}}) = \hat{\mathbf{J}} \text{ и т. п.}$$

Но, согласно результатам § 43, этим преобразованием является

$$\sqrt{(2g+1)(2s+1)}\, W(l1Jj_{\mathrm{II}} \mid gs) = (s \mid g).$$

Здесь мы положили $j_{\mathrm{I}} = 1$, т. е. рассматривается случай, когда фотоном является частица I.

Сформулируем теперь окончательный рецепт для перехода от формул для реакций с частицами, записанными в переменных спина канала s, к формулам, описывающим реакции с фотонами. Причем состояния фотонов задаются в виде мультиполей электрических и магнитных:

1) над амплитудой процесса надо проделать преобразование

$$(l's'\alpha' \mid R^{J}_{\gamma_i} \mid ls\alpha) \to \sum_{gp} (l's'\alpha' \mid R^{J}_{\gamma_i} \mid pg\alpha) \cdot (pg \mid sl);$$

$$(sl \mid gp) = (s \mid g)(l \mid p) = -\sqrt{2}(-1)^{p}\sqrt{(2g+1)(2s+1)}\, W(l1Jj_{\mathrm{II}}; gs) \times \times (g - 111 \mid l0)\, \delta(l, p),$$

смысл обозначений указан выше;

2) при суммировании по начальным состояниям, когда усредняются сечения, необходимо учесть, что фотон с данным g имеет не три состояния, а только два. Таким образом получаем из формулы (44.6) общие формулы для угловых распределений в ядерных реакциях с участием фотонов [26]*.

а) фотореакции (падает фотон, вылетает частица)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{2(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum \frac{(-1)^{s'-j_{\mathrm{II}}-1}}{4} \times$$

$$\times \mathrm{Re}\{(l_1's'\alpha' \mid R^{J_1}_{\gamma_{i1}} \mid p_1g_1\alpha)^*(l_2's'\alpha' \mid R^{J_2}_{\gamma_{i2}} \mid p_2g_2\alpha)\}(-1)^{p_1+p_2}(i)^{-l_2'+l_1'-L} \times$$

$$\times Z(l_1'J_1l_2'J_2;\ s'L)\, Z_\gamma(g_1J_1g_2J_2;\ j_{\mathrm{II}}L) \cdot P_L(\cos\theta). \qquad (47.8)$$

Здесь сумма берется по $J_1J_2g_1g_2p_1p_2l_1'l_2's'$ и L;

б) испускание фотонов (падает частица, вылетает фотон)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{(2j_{\mathrm{I}}+1)(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum \frac{(-1)^{j_2-s+1}}{4} \times$$

$$\times \mathrm{Re}\{(p_1'g_1'\alpha' \mid R^{J_1}_{\gamma_{i1}} \mid l_1s\alpha)^*(p_2'g_2'\alpha' \mid R^{J_2}_{\gamma_{i2}} \mid l_2s\alpha)\} \times$$

$$\times (-1)^{p_1'+p_2'} Z_\gamma(g_1'J_1g_2'J_2;\ j_2L)(i)^{-l_2+l_1-L} \times$$

$$\times Z(l_1J_1l_2J_2;\ sL)\, P_L(\cos\theta). \qquad (47.9)$$

Здесь сумма берется по $J_1J_2g_1g_2p_1p_2l_1l_2s$ и L;

в) рассеяние фотонов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{2(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum \frac{(-1)^{j_2-j_{\mathrm{II}}}}{4} \mathrm{Re}\{(p_1'g_1'\alpha' \mid R^{J_1}_{\gamma_{i1}} \mid p_1g\alpha)^* \times$$

$$\times (p_2'g_2'\alpha' \mid R^{J_2}_{\gamma_{i2}} \mid p_2g_2\alpha)(-1)^{p_1'+p_2'+p_1+p_2} Z_\gamma(g_1'J_1g_2'J_2;\ j_{\mathrm{II}}L) \times$$

$$\times Z_\gamma(g_1J_1g_2J_2;\ j_2L)\, P_L(\cos\theta)\}. \qquad (47.10)$$

Здесь сумма берется по $J_1J_2g_1g_2g_1'g_2'p_1'p_2'p_1p_2$ и L.

Нетрудно получить и выражение для поляризации частиц, возникающих при фотореакциях. Преобразование формулы (45.8) дает

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\Omega} = \mathbf{k}\frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{[2j_1(j_1+1)(2j_1+1)]^{1/2}}{2(2j_{\mathrm{II}}+1)} \sum \mathrm{Re}\{i \cdot (l_1's_1'\alpha' \mid R^{J_1}_{\gamma_{i1}} \mid p_1g_1\alpha)^* \times$$

$$\times (l_2's_2'\alpha' \mid R^{J_2}_{\gamma_{i2}} \mid p_2g_2\alpha)\}(-1)^{j_2-j_1-j_{\mathrm{II}}+J_2+s_2'+l_2'-1} \times$$

$$\times Z_\gamma(g_1J_1g_2J_2;\ j_{\mathrm{II}}L)(-1)^{p_1+p_2} W(j_1s_1'j_1s_2';\ j_21)[(2J_1+1)(2l_1'+1) \times$$

$$\times (2s_1'+1)(2J_2+1)(2l_2'+1)(2s_2'+1)]^{1/2}(l_1'0l_2'0 \mid L0) \times$$

$$\times X(J_1l_1's_1';\ J_2l_2's_2';\ LL1)\, \bar{P}^1_L(\cos\theta). \qquad (47.11)$$

Суммирование идет по J_1, J_2, g_1, g_2, p_1, p_2, l_1', l_2', s_1', s_2' и L. Свойства выражений (47.8), (47.9), (47.10) и (47.11) аналогичны обсужденным выше свойствам соответствующих выражений для столкновений частиц. В частности, в суммах отличны от нуля лишь члены, для которых $p_1 + p_2 + g_1 + g_2 - L$ — четное число.

Приведенные формулы очень сложны, что является следствием их общности и выбора представления R-матрицы. В случаях, когда спины частиц *1*, *2* и II меньше единицы, а также в случаях, когда физике задачи соответствует представление спиральностей, более

* Наши формулы отличаются от формул работы [26] фазовым множителем, выбранным из условия инвариантности S-матрицы по отношению к обращению времени (см. § 35).

целесообразно для кинематических расчетов пользоваться результатами § 51—54. В этих параграфах разобраны также наиболее часто встречающиеся случаи ядерных реакций.

§ 48. СВЯЗЬ ПРОЦЕССОВ ФОТОРОЖДЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ π-МЕЗОНОВ И КОМПТОН-ЭФФЕКТА НА НУКЛОНЕ

В § 40 кратко обсуждалась параметризация S-матрицы, причем было указано, что приведенные там рассуждения носят очень общий характер. Они, в частности, применимы и для реакций, в которых происходит изменение природы частиц.

В этом параграфе проведем параметризацию S-матрицы, описывающей фундаментальные процессы π-мезонной физики, и установим связь между этими процессами, исходя только из общих свойств S-матрицы, приведенных в гл. 6.

Рассмотрим совокупность реакций:

$\gamma + N \to \gamma' + N'$ — комптон-эффект на нуклоне;
$\gamma + N \to \pi + N'$ — фоторождение мезонов;
$\pi + N \to \gamma + N'$ — радиационный захват;
$\pi + N \to \pi' + N'$ — рассеяние мезонов.

Здесь символы N, N' означают нуклоны (это могут быть протоны и нейтроны), π и π' — мезоны (положительные, отрицательные, нейтральные), γ — фотоны. Все начальные и конечные состояния будем рассматривать как различные состояния одной квантовомеханической системы.

Если ограничиться энергией фотонов ниже 300 *Мэв*, то переходы между состояниями (γN), $(\gamma' N')$, $(N\pi)$, $(N'\pi')$ практически исчерпывают возможные процессы. Учет остальных каналов слабо повлияет на обсуждаемые ниже результаты. Особой оговорки требует канал с образованием электронных пар. Матричный элемент S-матрицы, описывающий переход в этот канал, отнюдь не мал, что, согласно § 38, приводит к дифракционному рассеянию γ-квантов на нуклонах. Однако можно показать, что если не рассматривать области углов рассеяния фотонов на нуклонах, меньших примерно $\sim m_e c^2/E_\gamma$, то этим эффектом можно пренебречь.

Запишем S-матрицу перечисленных процессов:

$$(k'\alpha' \mid S^{J\eta} \mid k\alpha)\, \delta_{J'J}\delta_{M'M}\delta_{\eta'\eta}\delta_{T_3'T_3},$$

где J — полный момент системы; M — его проекция; η — четность состояния; T_3 — проекция полного изотопического спина системы; k — все остальные квантовые числа, характеризующие канал α; α принимает два значения, отвечающие (γN) и (πN).

В случае, когда α соответствует каналу (πN), индекс k учитывает следующие квантовые числа: орбитальный момент l и изотопический спин системы. При заданной четности η и моменте Jl определено однозначно, так как $l = J \pm 1/2$ и $\eta = (-1)^{l+1}$. Изотопический же спин системы может принимать два значения $T = 1/2$ и $T = 3/2$. В случае, когда α соответствует каналу (γN), согласно результатам

предыдущего параграфа, индекс k учитывает квантовые числа g и p, характеризующие мультипольность фотона. И так как $\eta = (-1)^{g+p+1}$ и в то же время $l = J \pm 1/2$, то при заданных J и π возможны только два состояния фотона.

Таким образом, $(k'\alpha' \mid S^{J\eta} \mid k\alpha)$ представляет собой четырехрядную квадратную матрицу. Запишем ее в виде $S_{\mu\nu}$, где индексы μ и ν пробегают четыре значения, соответствующие следующим состояниям:

μ или $\nu = 1$ — нуклон + фотон в состоянии магнитного типа с $g = l$ (четность состояния задаем квантовым числом l орбитального момента системы мезон — нуклон);

μ или $\nu = 2$ — нуклон + фотон в состоянии электрического типа с $g = l + 1 (p = 1)$;

μ или $\nu = 3$ — нуклон + мезон в состоянии с изотопическим спином, равным 1/2;

μ или $\nu = 4$ — нуклон + мезон в состоянии с изотопическим спином 3/2.

Без дальнейшего использования свойств S-матрицы при заданных полном моменте и четности имеем 32 действительных параметра, через которые выражается S-матрица.

Используем унитарность и симметрию S-матрицы

$$\sum_\nu S^*_{\mu\nu} S_{\nu\mu'} = \delta_{\mu\mu'}; \quad S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \tag{48.1}$$

Симметрия следует из свойства обратимости во времени и того обстоятельства, что среди квантовых чисел k и α нет таких, которые меняли бы знак при замене $t \to -t$. Представив $S_{\mu\nu}$ в виде $r_{\mu\nu}e^{i\varphi_{\mu\nu}}$ и подставив это выражение в соотношения (48.1), найдем систему трансцендентных уравнений, связывающих введенные параметры $r_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$. Эту систему можно решить методом последовательных приближений, используя простейшее предположение, фактически являющееся следствием опыта, что матричные элементы относятся друг к другу как

$$(S_{11} - 1 \sim S_{12} \sim S_{22} - 1) : (S_{13} \sim S_{14} \sim S_{23} \sim S_{24} \sim S_{34}) :$$
$$: (S_{33} \sim S_{44}) = \frac{e^2}{\hbar c} : \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} : 1, \tag{48.2}$$

где $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры. Соотношение (48.2), очевидно, нарушается совсем вблизи порога фоторождения. Эту малую область здесь рассматривать не будем. Ниже порога отличны от нуля только элементы S_{11}, S_{12}, S_{21} и S_{22}, и рассмотрение параметризации не отличается от проведенного в § 40. Поэтому исследуем область энергий выше порога фоторождения π-мезонов. В первом приближении по $\sqrt{e^2/\hbar c}$ сохраним в каждом из уравнений (48.1) только члены одного порядка по этому параметру. При μ и μ', равных трем или четырем, найдем

$$S^*_{33}S_{33} = 1 \text{ и } S^*_{44}S_{44} = 1,$$

откуда

$$S_{33} = e^{2i\gamma_3}, \quad S_{44} = e^{2i\gamma_4}. \tag{48.3}$$

Введенные здесь действительные параметры γ_3 и γ_4 являются не чем иным, как фазами рассеяния π-мезонов на нуклонах в состояниях с определенным и изотопическим спином, полным моментом и четностью.

Когда один из индексов μ или μ' равен трем или четырем, а другой равен единице или двум, найдем

$$\left.\begin{aligned} S_{13} + S_{13}^* S_{33} = 0; \quad S_{14} + S_{14}^* S_{44} = 0; \\ S_{23} + S_{23}^* S_{33} = 0; \quad S_{24} + S_{24}^* S_{41} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48.4}$$

Из формул (48.3) и (48.4) получаем

$$\left.\begin{aligned} S_{13} = ir_{13}e^{i\gamma_3}; \quad S_{14} = ir_{14}e^{i\gamma_4}; \\ S_{23} = ir_{23}e^{i\gamma_3}; \quad S_{24} = ir_{24}e^{i\gamma_4}, \end{aligned}\right\} \tag{48.5}$$

где $r_{\mu\nu}$ — действительные параметры.

Соотношения (48.5) выражают важную связь процессов фоторождения и рассеяния π-мезонов. Они сильно упрощают анализ экспериментов по фоторождению мезонов. Например, используя формулы предыдущего параграфа, можно сделать некоторые заключения об интерференционных членах, зная энергетическую зависимость фаз рассеяния мезонов. И, наоборот, изучая фоторождение мезонов, можно проверить правильность результатов фазового анализа рассеяния.

Когда индексы μ и μ' равны единице или двум, то уравнения (48.1) в первом приближении запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} S_{11}^* - 1 + S_{11} - 1 = -S_{13}^* S_{31} - S_{14}^* S_{41}; \\ S_{12}^* + S_{12} = -S_{13}^* S_{32} - S_{14}^* S_{42}; \\ S_{22}^* - 1 + S_{22} - 1 = -S_{23}^* S_{32} - S_{24}^* S_{42}. \end{aligned}\right\} \tag{48.6}$$

Введем амплитуду рассеяния: $iR_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}$ и используем соотношения (48.5); тогда соотношения (48.6) можно кратко записать:

$$\mathrm{Im}R_{ab} = \frac{1}{2}(r_{a3}r_{3b} + r_{a4}r_{4b}), \tag{48.7}$$

где a и b пробегают значения 1 и 2, т. е. мнимая часть амплитуды комптон-эффекта выражается через модули амплитуд фоторождения π-мезонов.

Соотношение (48.7) существенно облегчает анализ опытов по рассеянию фотонов на нуклонах. Используя общие свойства коэффициентов W, Z и векторного сложения, нетрудно показать, что

замена индексов $1 \rightleftarrows 2$ под знаком суммы в формуле (47.10) не меняет величины $d\sigma/d\Omega$. Отсюда вытекает возможность поставить символ Re перед произведением $(p_1'g_1'\alpha' | R^{J_1}_{\eta_1} | p_1g_1\alpha)^*(p_2'g_2'\alpha' | R^{J_2}_{\eta_2} | p_2g_2\alpha)$. Если теперь записать $R_{\mu\nu}$ в виде $R^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} + iR^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}$, где $R^{\mathrm{I}}_{\mu\nu}$ и $R^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}$ — действительные величины, то $d\sigma/d\Omega$ разобьется на два слагаемых; в одно войдут только элементы $R^{\mathrm{I}}_{\mu\nu}$, а в другое — только $R^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}$. Согласно выражению (48.7), это означает, что первое слагаемое выражается только через параметры, подлежащие определению в экспериментах по комптон-эффекту, а второе — только через модули амплитуд фоторождения мезонов. Из этого результата можно получить несколько конкретных следствий относительно свойств дифференциального сечения комптон-эффекта без использования детальной теории явления.

Глава 10

РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ И ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ

§ 49. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Когда мы выше говорили о проекциях спина μ_i или орбитального момента m, то подразумевали проекции на заданное направление, выбранное в качестве оси z, причем на ось z проектировали все участвующие в задаче моменты. Однако это описание не всегда оказывается наиболее удобным. При изучении поляризационных явлений, когда рассматриваются два, а иногда и три последовательных столкновения, или при изучении образования и каскада распадов нестабильных частиц, оказывается необходимым проектировать моменты одной и той же задачи на разные направления, переходить от проекций на одну из осей к проекциям на другие оси. В этой связи существенно рассмотреть преобразования, которым подвергаются собственные волновые функции момента при поворотах системы координат. Эти преобразования имеют большое значение в квантовомеханической теории момента количества движения.

Пусть имеется волновая функция $\Psi_{jm}(\theta, \varphi)$, зависящая от координат $\theta\varphi$ фиксированной точки пространства Q. Очевидно, что при поворотах системы осей координат вокруг ее начала изменяются θ, φ и проекция момента m, но j не меняется. Поэтому общий вид преобразования поворота запишется:

$$\Psi_{jm'}(\theta'\varphi') = \sum_m \Psi_{jm}(\theta, \varphi) D^j_{mm'}(\omega), \tag{49.1}$$

где $\Psi_{jm'}(\theta'\varphi')$ — функция координат той же точки Q в системе координат, полученной из исходной поворотом вокруг начала координат; $D^j_{mm'}(\omega)$ — матричные элементы искомого унитарного преобразова-

ния поворота; через ω обозначена совокупность углов поворота, от значения которых, очевидно, должно зависеть преобразование.

Оператор проекции момента количества движения на ось в сферических координатах имеет вид

$$\hat{l}_z = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

откуда ясно, что с помощью этого оператора можно определить оператор поворота на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси z:

$$1 - i\delta\varphi \hat{l}_z. \tag{49.2}$$

В некоторых курсах квантовой механики оператор бесконечно малого поворота (49.2) берется за основу для определения оператора момента количества движения. Интересующую нас операцию конечных вращений можно ввести как последовательность бесконечно малых поворотов. При этом нетрудно показать, что оператор конечного преобразования поворота $\hat{D}(\varphi)$ вокруг заданной оси на угол α имеет вид

$$\hat{D}(\varphi) = e^{-i\alpha \hat{l}_z}, \tag{49.3}$$

где $\hat{l}_z$ — оператор проекции момента на выбранную ось. Отрицательный знак в экспоненте обусловлен тем обстоятельством, что $\hat{D}$ представляет вращение системы координат.

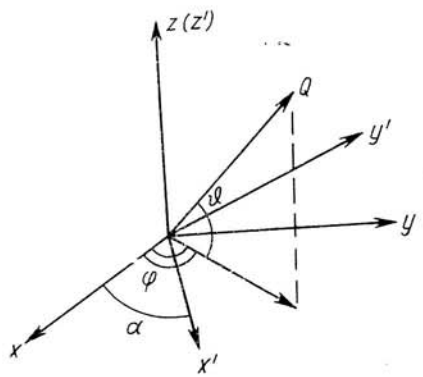
Волновая функция состояния с определенным значением проекции момента на выбранную ось имеет, как известно, вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

Применяя к этой функции оператор (49.3), находим

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{im(\varphi - \alpha)}.$$

Отсюда видно, что выбранный знак соответствует такому повороту системы координат вокруг оси z, который соответствует вращению правого винта при его поступательном движении в направлении оси z:



Оператор (49.3) представляет собой частный случай операторов поворота вокруг одной из осей.

Как известно, любой поворот системы координат относительно ее начала, может быть задан с помощью трех углов Эйлера, которые определяются следующим образом:

1) угол поворота $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ вокруг оси z. Вращение на этот угол переводит исходную систему S в систему S';

2) угол поворота $\beta(0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ вокруг оси y системы S'. Вращение на этот угол переводит систему из положения S' в положение S'';

3) угол поворота $\gamma\,(0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi)$ вокруг оси z системы S''. Вращение на этот угол завершает преобразование исходной системы к повернутой. Поэтому в качестве аргументов функций $D^j_{mm'}$ выбираются $\alpha\beta\gamma$. Наше определение эйлеровых углов отличается от определения Вигнера [12], но соответствует наиболее часто употребляемому. Таким образом, общее выражение оператора конечных поворотов через операторы момента имеет вид

$$\hat{D}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\gamma \hat{j}_{z''}} e^{-i\beta \hat{j}_{y'}} e^{-i\alpha \hat{j}_z},$$

где $\hat{j}_{z''}$, $\hat{j}_{y'}$, $\hat{j}_z$ определены в системах $S''S'S$.

Используя законы унитарных преобразований операторов, имеем:

$$e^{-i\beta \hat{j}_{y'}} = e^{-i\alpha \hat{j}_z} e^{-i\beta \hat{j}_y} e^{i\alpha \hat{j}_z}$$

и

$$e^{-i\gamma \hat{j}_{z''}} = e^{-i\beta \hat{j}_{y'}} e^{-i\gamma \hat{j}_{z'}} e^{i\beta \hat{j}_{y'}},$$

откуда получаем:

$$\hat{D}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\beta \hat{j}_{y'}} e^{-i\gamma \hat{j}_{z'}} e^{-i\alpha \hat{j}_z}.$$

Аналогично, переходя к заданию операторов проекций момента в исходной системе координат, находим:

$$\hat{D}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha \hat{j}_z} e^{-i\beta \hat{j}_y} e^{-i\gamma \hat{j}_z}. \tag{49.4}$$

Матрица оператора поворота находится по общим правилам:

$$D^j_{mm'}(\alpha\beta\gamma) = \langle jm | e^{-i\alpha \hat{j}_z} e^{-i\beta \hat{j}_y} e^{-i\gamma \hat{j}_z} | jm' \rangle.$$

Учитывая, что

$$\langle jm | e^{-i\hat{j}_z \gamma} | jm' \rangle = \delta_{mm'} e^{-im\gamma},$$

имеем

$$D^{\hat{j}}_{mm'} = e^{-im\alpha} d^j_{mm'} e^{-im'\gamma}, \tag{49.5}$$

где матричные элементы

$$d^j_{mm'} = \langle jm | e^{-i\beta \hat{j}_y} | jm' \rangle \qquad (49.6)$$

подлежат дальнейшему вычислению. Для $j = 1/2$ выражение (49.6) нетрудно вычислить, используя свойства матриц Паули $\hat{j}_y = 1/2\hat{\sigma}_y$. Представляя $e^{-i\beta^1/_2\sigma_y}$ в виде степенного ряда и учитывая, что $(\sigma_y)^k$ равно единице при четном k и σ_y при нечетном k, находим

$$e^{-i\beta^1/_2\sigma_y} = \cos\beta/2 - i\sigma_y \sin\beta/2, \qquad (49.7)$$

откуда матрица (49.6) для преобразования поворота спинора имеет вид:

m \ m'	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\cos\frac{\beta}{2}$	$\sin\frac{\beta}{2}$
$+\frac{1}{2}$	$-\sin\frac{\beta}{2}$	$\cos\frac{\beta}{2}$

(49.8)

Собственные функции для любого j нетрудно получить в виде произведения спиноров с помощью законов сложения моментов. Используя закон преобразования (49.8), можно получить общее выражение для матрицы (49.6):

$$d^j_{mm'} = N \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{(j-m'-\varkappa)!\,(j+m-\varkappa)!\,(\varkappa+m'-m')!\,\varkappa!} \times$$

$$\times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2\varkappa} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2\varkappa+m'-m}. \qquad (49.9)$$

Однако для практических расчетов более полезны рекуррентные формулы, выражающие низшие d-функции через высшие. Рекуррентные соотношения и таблицы для наиболее часто встречающихся d-функций приведены в приложении V.

Функции $d^j_{mm'}$ обладают следующими свойствами. Из унитарности оператора поворота и вещественности $d^j_{mm'}$ вытекает следующая связь матриц прямого и обратного поворотов:

$$d^j_{mm'}(-\beta) = d^j_{m'm}(\beta). \qquad (49.10)$$

Из явного вида $d^j_{mm'}$ функций (49.9) имеем

$$d^j_{mm'}(\pi) = (-1)^{j+m}\delta_{m,-m'};\quad d^j_{mm'}(-\pi) = (-1)^{j-m}\delta_{m,-m'}. \qquad (49.11)$$

Матрица поворота, являющаяся результатом выполнения двух последовательных поворотов ω_1 и ω_2 (в указанном порядке) имеет вид

$$D^j_{mm''}(\omega) = \sum_{m'} D^j_{mm'}(\omega_2)\, D^j_{m'm''}(\omega_1). \qquad (49.12)$$

Используя это свойство и формулы (49.11), нетрудно получить

$$\left.\begin{aligned} d^j_{mm'}(\beta + \pi) &= (-1)^{j+m} d^j_{-mm'}(\beta); \\ d^j_{mm'}(\pi - \beta) &= (-1)^{j+m} d^j_{m'-m}. \end{aligned}\right\} \qquad (49.13)$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} d^j_{mm'}(\beta) &= (-1)^{m-m'} d^j_{-m,-m'}(\beta); \\ d^j_{mm'}(\beta) &= (-1)^{m-m'} d^j_{m'm}(\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (49.14)$$

На основе приведенных соотношений нетрудно найти

$$D^j_{m'm}(-\gamma, -\beta, -\alpha) = D^{j*}_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'} D^j_{-m,-m'}(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$D^j_{mm'}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^j D^j_{m-m'}(\alpha - \pi, \pi - \beta, \gamma).$$

Используя коэффициенты векторного сложения как функции преобразования от представления результирующего момента JM к представлению слагающих моментов j_1 и j_2, находим

$$D^{j_1}_{m_1m_1'}(\omega)\, D^{j_2}_{m_2m_2'}(\omega) = \sum_{JMM'} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle\, D^J_{MM'}(\omega) \times$$

$$\times \langle JM' | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \qquad (49.15)$$

или через $3j$-символы

$$D^{j_1}_{m_1m_1'}(\omega) D^{j_2}_{m_2m_2'}(\omega) = \sum_{JMM'} (2J+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} D^{J*}_{MM'}(\omega) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1' & m_2' & M' \end{pmatrix}. \qquad (49.16)$$

D-функции ортогональны и нормированы следующим условием:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D^{j_1*}_{m_1m_1'}(\alpha\beta\gamma)\, D^{j_2}_{m_2m_2'}(\alpha\beta\gamma) \sin\beta\, d\beta\, d\alpha\, d\gamma =$$

$$= \delta_{m_1m_2}\delta_{m_1'm_2'}\delta_{j_1j_2}\frac{1}{2j_1+1}. \qquad (49.17)$$

Из соотношений (49.16) и (49.17) находим

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D^j_{m_1m_1'}(\alpha\beta\gamma)\, D^{j_2}_{m_2m_2'}(\alpha\beta\gamma)\, D^{j_3}_{m_3m_3'}(\alpha\beta\gamma) \sin\beta\, d\beta\, d\alpha\, d\gamma =$$

$$= \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1' m_2' m_3' \end{pmatrix}. \qquad (49.18)$$

D-функции тесно связаны с шаровыми функциями:

$$D^{l*}_{m0}(\varphi\theta 0) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} Y_{lm}(\theta, \varphi). \qquad (49.19)$$

При работе с D-функциями следует соблюдать осторожность с фазовым множителем. Как нетрудно видеть из общего выражения для D-функций (49.5) и (49.9), поворот на угол $2\pi n$ не является тождественным преобразованием для полуцелых значений момента. При таком повороте волновая функция приобретает фазовый множитель $(-1)^n$. Кроме того, фаза зависит от выбранного определения углов Эйлера и от того, преобразуется система координат или объект, заданный в этой системе координат (знак угла). В литературе фазы выбираются по-разному, в связи с этим возможны ошибки.

С помощью (49.15) можно получить формулу, которая выражает зависимость от магнитных квантовых чисел матрицы произвольного оператора $\hat{Q}^{J_1 m_1}$, преобразующегося при поворотах осей координат с помощью преобразования $D^{j_1}_{m_1 m_1'}$. К таким операторам нетрудно свести оператор, являющийся вектором или тензором любого ранга.

Рассмотрим преобразование матрицы оператора $\hat{Q}^{j_1 m_1}$

$$\langle JM | \hat{Q}^{j_1 m_1} | j_2 m_2 \rangle$$

при повороте системы координат:

$$\sum_{M m_1 m_2} D^{J*}_{MM'}(\omega) D^{j_1}_{m_1 m_1'}(\omega) D^{j_2}_{m_2 m_2'}(\omega) \langle JM | \hat{Q}^{j_1 m_1} | j_2 m_2 \rangle =$$

$$= \langle JM' | \hat{Q}^{j_1 m_2'} | j_2 m_2' \rangle.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по углам Эйлера (правая часть от них, очевидно, не зависит), найдем

$$\sum_{M m_1 m_2} \frac{1}{2J+1} \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | JM' \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle JM | \hat{Q}^{j_1 m_1} | j_2 m_2 \rangle =$$

$$= \langle JM' | \hat{Q}^{j_1 m_1} | j_2 m_2 \rangle.$$

Это выражение можно переписать в виде (теорема Вигнера — Эккарта)

$$\langle JM' \left| \hat{Q}^{j_1 m_1'} \right| j_2 m_2' \rangle = \langle JM' | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \cdot \langle J \| \hat{Q}^{j_1} \| j_2 \rangle, \qquad (49.20)$$

где $\langle J \| Q^{j_1} \| j_2 \rangle$ — приведенный матричный элемент, не зависящий от квантовых чисел $M' m_1' m_2'$.

С помощью преобразования конечных вращений можно определить операцию отражения $\hat{Y}$ в плоскости реакции. Эта операция играет существенную роль в получении некоторых кинематических соотношений.

Пусть S-матрица для бинарной реакции $\mathrm{I} + \mathrm{II} \to 1 + 2$ задана в представлении суммарного спина каналов S и S' и импульсов начальных и конечных частиц $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$

$$(S' M' \mathbf{P}' | S | \mathbf{P} S M),$$

где M и M' — проекции суммарного спина на направление нормали к плоскости реакции.

Операция $\hat{Y}$ может быть представлена как произведение пространственного отражения $\hat{P}$ и поворота на угол π вокруг нормали к плоскости реакции $\hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi)$:

$$\hat{Y} | \mathbf{P} S M \rangle = \hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi) \hat{P} | \mathbf{P} S M \rangle =$$

$$= \hat{R}_{\mathbf{n}}(\pi) \bar{\eta} | -\mathbf{P} S M \rangle = \eta e^{-i\pi(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})} | P S M \rangle = \eta e^{-i\pi M} | \mathbf{P} S M \rangle. \qquad (49.21)$$

Здесь $\eta = \eta_{\mathrm{I}} \eta_{\mathrm{II}}$ — произведение внутренних четностей частиц; $\hat{\mathbf{S}}$ — оператор суммарного спина; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к плоскости реакции. Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что спин является псевдовектором и его проекции остаются неизменными при отражении. Поскольку $\hat{Y}$, очевидно, является интегралом движения, то можно применить соотношение (34.1), записав его в виде

$$\hat{Y}^{-1} \hat{S} \hat{Y} = \hat{S},$$

откуда на основе выражения (49.21) имеем

$$\eta_1 \eta_2 \eta_{\mathrm{I}} \eta_{\mathrm{II}} e^{-i\pi(M - M')} = 1. \qquad (49.22)$$

Правило отбора (49.22) связывает внутренние четности частиц, участвующих в реакции с проекциями полного спина на направление нормали к плоскости реакции. С помощью этого правила (его называют правилом О. Бора) можно определить внутренние четности частиц, если известны проекции полного спина на нормаль к плоскости реакции. Последнее условие можно осуществить в опытах с поляризованными и ориентированными частицами.

Например, пусть спины частиц *1* и I равны нулю, а спины частиц *2* и II равны $1/2$, причем частицы *2* полностью поляризованы в направлении $\mathbf{n}$. Рассмотрим эту реакцию в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$ ($M = +1/2$). Согласно правилу отбора (49.22), в случае $\eta_1 \eta_2 = +\eta_{\mathrm{I}} \eta_{\mathrm{II}}$, $M' = M = 1/2$ запрещена реакция с переворотом спина, а в случае $\eta_1 \eta_2 = -\eta_{\mathrm{I}} \eta_{\mathrm{II}}$ $M' = -M = -1/2$ запрещена реакция без переворота спина.

§ 50. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

В предыдущих главах был применен изложенный выше математический аппарат для получения формул, описывающих общие закономерности возникновения поляризованных частиц в ядерных реакциях. Однако, во-первых, поляризация не является наиболее общей характеристикой спинового состояния частицы. В результате реакции могут возникнуть такие состояния, в которых среднее значение проекций спина (поляризация) равно нулю, а среднее значение, например, квадратов проекций спина (или других тензорных комбинаций вида $j_z j_x j_y$) отличны от нуля. Общий случай спинового состояния частиц, отличного от состояния, когда все проекции спинов равновероятны, называется состоянием ориентированных частиц. Во-вторых, поляризованные явления отнюдь не исчерпываются возникновением определенных спиновых состояний в результате реакций.

Выше всюду рассматривался лишь такой случай ядерных реакций, когда в начальном состоянии все величины проекций спинов были равновероятны. При этом выпадает широкий класс явлений, когда в начальном состоянии спины частиц ориентированы. Более того, без рассмотрения этого класса явлений изучение поляризационных свойств носит абстрактный характер, ибо поляризация и аналогичные ей величины непосредственно на опыте не наблюдаются.

Необходимо подчеркнуть, что в реальных экспериментах измеряются только импульсы частиц и их заряды. Поэтому сведения о спиновых переменах, описывающих частицы, можно получить по влиянию этих переменных на распределения частиц по импульсам в реакциях, вызванных интересующими нас частицами. Если изучаемые частицы нестабильны, то информацию об их спиновом состоянии можно извлечь также из распределения по импульсам продуктов распада. Поскольку распад — частный случай реакции, то оба эти способа анализа сводятся к исследованию вторичных ядерных реакций. Кроме исследования вторичных реакций задача рассмотрения столкновения ориентированных частиц приобретает все большее значение в связи с получением ориентированных мишеней.

Главная особенность рассмотрения ориентированных частиц — особенность задания их состояния. Процесс же столкновения попрежнему описывается S-матрицей. Эту особенность проще всего понять рассматривая вторичные ядерные реакции.

Пусть частицы *2*, образующиеся в реакции

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \to 1 + 2, \tag{50.1}$$

участвуют во вторичной реакции:

$$2 + 3 \to 4 + 5 + 6 + \ldots \tag{50.2}$$

Если бы начальное состояние описывалось определенными величинами проекций спина частиц I и II на выбранную ось, то состояние частиц *1* и *2* задавалось бы, согласно определению S-матрицы, так:

$$\Psi_{1,2} = \hat{S}\Psi_{\mathrm{I,\,II}}, \tag{50.3}$$

а описание реакции (50.2) было бы получено в виде

$$\Psi_{4,\,5\ldots} = \hat{S}\psi_{1,\,2}. \tag{50.4}$$

Однако обычное задание спинового состояния частиц I и II формулируется так: все проекции спинов частиц I и II равновероятны. Выше это учитывалось суммированием вероятности переходов по всем проекциям спинов и делением на число проекций. Для вторичной реакции этот подход уже не годится, так как частицы, возникающие в результате реакции (50.1), ориентированы. Но самое существенное заключается в том, что поскольку состояние частиц I и II было задано распределением вероятностей, а не волновой функцией, то состояние частиц *1* и *2* тоже не задается волновой функцией.

Распределение вероятностей проекций спина частиц сорта *2* имеет вид

$$\frac{1}{(2I_{\mathrm{I}}+1)(2I_{\mathrm{II}}+1)} \sum_{m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}}} |\langle m_2 \alpha | S | \beta m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}} \rangle|^2, \tag{50.5}$$

где m_i — проекция спинов частиц, участвующих в реакции; α и β обозначают все остальные квантовые числа. Однако распределение вероятностей еще не полностью задает состояние проекций спина поскольку помимо величин (50.5) могут быть отличными от нуля еще и такие величины:

$$\langle m_2' | \rho | m_2 \rangle =$$

$$= \sum_{m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}}} \langle m_2' \alpha | S | \beta, m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{II}} \rangle \frac{1}{(2I_{\mathrm{I}}+1)(2I_{\mathrm{II}}+1)} \langle m_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{II}} \beta | S^+ | \alpha m_2 \rangle; \tag{50.6}$$

здесь, вообще говоря, $m_2' \neq m_2$. Формула (50.5) задает только диагональные элементы этой матрицы. Матрица (50.6) называется матрицей плотности. Матрица плотности осуществляет наиболее общее задание спинового состояния. В частности, матрица состояния с определенным значением проекции спина k (чистого состояния) имеет вид

$$\langle m | \rho | m' \rangle = \delta_{mk}\,\delta_{m'k}, \tag{50.7}$$

а матрица плотности состояния, в котором все значения проекций спина равновероятны

$$\langle m | \rho | m' \rangle = \frac{1}{(2I+1)}\,\delta_{mm'}. \tag{50.8}$$

С помощью матрицы (50.8) выражению (50.6) можно придать следующий операторный вид:

$$\hat{\rho} = \hat{S}\hat{\rho}_i\hat{S}^+. \tag{50.9}$$

Таким образом, S-матрица является унитарным преобразованием, переводящим матрицу плотности начального состояния в матрицу плотности конечного состояния. Начальное состояние вторичной реакции задается матрицей плотности конечного состояния первичной реакции.

Матрицу плотности конечного состояния вторичной реакции найдем совершенно аналогично:

$$\hat{\rho}_f = \hat{S} \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{S}^+. \tag{50.10}$$

Перечислим основные свойства матрицы плотности, вытекающие из ее определения:

1) диагональные матричные элементы матрицы плотности определяют вероятности и являются положительными величинами $<m \mid \rho \mid m>0$;

2) матрица плотности является эрмитовской матрицей:

$$\langle m \mid \rho \mid m' \rangle = \langle m' \mid \rho \mid m \rangle^*;$$

3) обычно для ρ выбирается нормировка

$$Sp\rho = 1;$$

4) $Sp\rho^2 \leqslant Sp\rho$ (равенство выполняется для чистых состояний);

5) средние значения операторов даются формулой

$$\overline{Q} = Sp\hat{Q}\hat{\rho},$$

например поляризация

$$\mathbf{j} = Sp\hat{\mathbf{j}}\rho.$$

Таким образом, имея матрицу плотности конечного состояния, можно вычислить средние значения всех интересующих нас величин.

Описание состояний систем с помощью матрицы плотности, как известно из квантовой механики, широко применяется в различных разделах физики, в тех случаях, когда сведения о состоянии не являются полными и значения некоторых динамических переменных приходится задавать распределениями вероятности. В случае ядерных реакций необходимость введения матрицы плотности, как мы видели, возникает из-за неопределенности в задании спинового состояния исходных частиц.

Используя результаты предыдущего параграфа, рассмотрим преобразования матрицы плотности при поворотах системы координат. Для простоты опустим все другие квантовые числа, за исключением спина j и его проекции m:

$$\rho^j_{m'm}(\omega) = \sum_{k,l=-j}^{j} D^j_{m'k}(\omega)\,\rho^j_{kl}\,D^{j*}_{ml}(\omega) =$$

$$= \sum_{kl} (-1)^{m-l} D^j_{m'k}(\omega)\,D^j_{-m-l}(\omega)\,\rho^j_{kl};$$

здесь использована формула $D^{j*}_{m'k} = (-)^{m'-m} D^j_{-m'm}$. Применяя редукционную формулу (49.15), найдем:

$$\rho^j_{m'm}(\omega) = \sum_{J=0}^{2j} \sum_{k,l=j}^{j} (-1)^{m-l} \langle lm'j - m \mid JM' \rangle \times$$

$$\times \langle jkj - l \mid JM \rangle D^J_{M'M}(\omega)\,\rho^j_{kl};$$

$$M = k - l, \quad M' = k' - m.$$

Используя свойства коэффициентов векторного сложения, это выражение можно переписать в виде

$$\rho^j_{m'm} = \sum_{J=0}^{2j} \sum_{M'M} \left\{ \sum_{k,l=-j}^{j} (-1)^{j-l} \langle jlj - k \mid J - M \rangle \rho^j_{kl} \right\} \times$$

$$\times D^J_{M'M}(\omega) \times [(-1)^{j-m} \langle jm'j - m \mid JM' \rangle]. \tag{50.11}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, имеет смысл среднего значения от оператора, обладающего матрицей

$$\{\hat{Q}^{JM}\}_{m'm} = (-1)^{j-m} \langle jm'j - m \mid JM \rangle (2j+1)^{1/2}; \tag{50.12}$$

последний множитель представляет собой нормировку.

Эти операторы обладают свойством

$$Sp\,\{\hat{Q}^{JM+}\hat{Q}^{J'M'}\} = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}(2J+1), \tag{50.13}$$

вытекающим из свойства ортогональности матриц коэффициентов векторного сложения. Свойство (50.13) позволяет представить матрицу плотности в виде разложения

$$\hat{\rho}^j = (2j+1)^{-1} \sum_{J=0}^{2j} \sum_{M=-J}^{J} q^{JM} \cdot \hat{Q}^{JM}; \tag{50.14}$$

обратное преобразование имеет вид

$$q^{JM} = \sum_{kl} \{Q^{JM}\}^+_{lk} \rho^j_{kl}. \tag{50.15}$$

Задание коэффициентов разложения q^{JM}, очевидно, эквивалентно заданию матрицы плотности. Из формулы (50.11) нетрудно получить, что величины q^{JM}, их называют статистическими тензорами, при поворотах преобразуются с помощью выражения $D^J_{MM'}(\omega)$, т. е. обладают более простыми трансформационными свойствами по сравнению с матрицей плотности.

Матрицы оператора $\hat{Q}^{JM}$ в силу свойств коэффициентов векторного сложения и множителя $(-1)^{j-m} = \pm 1$ действительны, они не являются эрмитовыми, но удовлетворяют следующему соотношению:

$$\hat{Q}^{JM+} = (-1)^M \hat{Q}^{J-M}.$$

Из этого свойства и эрмитовости матрицы плотности находим

$$q^{JM} = (-1)^M q^{J-M*}. \tag{50.16}$$

Из определения $\hat{Q}^{JM}$ имеем $\hat{Q}^{00} = \hat{I}$, что, согласно свойству (50.13), означает:

$$Sp Q^{JM} = \delta_{J0}\,\delta_{M0}(2J+1).$$

Отсюда следует, что нормировка $Sp\rho^j = 1$ соответствует $q^{00} = 1$. Таким образом, разложения (50.14) и (50.15) можно представить в виде

$$\hat{\rho}^j = (2j+1)^{-1}\left\{\hat{I} + \sum_{J=1}^{2j}\sum_{M=-J}^{J} q^{JM}\hat{Q}^{JM}\right\};$$

$$q^{JM} = Sp\{\hat{Q}^{JM+}\hat{\rho}^j\}.$$

Используя выражение для ρ^j через q^{JM}, нетрудно найти:

$$Sp(\rho)^2 = \frac{1}{(2j+1)}\sum_{JM} q^{JM}\,q^{J-M}(-1)^M.$$

При этом четвертое свойство матрицы плотности можно выразить так:

$$Sp(\rho^j)^2 = \frac{1}{2j+1}\sum_{JM}|q^{JM}|^2 \leqslant 1. \tag{50.17}$$

Случай полностью неполяризованных частиц соответствует $q^{JM} = 0$ при всех $J \geqslant 1$:

$$\hat{\rho}_{\text{неполяриз}} = \frac{1}{2j+1}\hat{I}.$$

Неравенство (50.17) можно записать

$$\sum_{J=1}^{2j}\sum_{M}|q^{JM}|^2 \leqslant 2j$$

и определить степень выстроенности следующим образом:

$$a = \left\{\frac{1}{2j}\sum_{J=1}^{2j}\sum_{M}|q^{JM}|^2\right\}^{1/2}, \tag{50.18}$$

$$0 \leqslant a \leqslant 1$$

верхний предел соответствует чистому состоянию, а $a = 0$ — полностью неполяризованному пучку. Первые операторы $\hat{Q}^{JM}$ имеют простой физический смысл. Используя выражение матрицы оператора момента количества движения через коэффициенты векторного сложения (45.4), нетрудно найти:

$$\left.\begin{aligned}\hat{Q}^{1\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{2j(j+1)}}(\hat{j}_x \pm i\hat{j}_y);\\ \hat{Q}^{10} &= \sqrt{\frac{3}{j(j+1)}}\hat{j}_z;\end{aligned}\right\} \tag{50.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{Q}^{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3\hat{j}_z^2 - 2);\ \hat{Q}^{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2}[(\hat{j}_x + i\hat{j}_y)\hat{j}_z + \hat{j}_z(\hat{j}_x + i\hat{j}_y)];\\ &\hat{Q}^{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{j}_x + i\hat{j}_y)^2;\ \hat{Q}^{2-1} = -\hat{Q}^{21+};\ \hat{Q}^{2-2} = \hat{Q}^{22+}.\end{aligned}\right\} \tag{50.20}$$

Если определить вектор поляризации равенством

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{3}{2j^2(j+1)}}\,Sp\hat{\mathbf{j}}\hat{\rho}, \tag{50.21}$$

то матрица плотности может быть записана в виде:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2j+1}\left[\hat{I} + \sqrt{\frac{6}{j+1}}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{j}}) + \sum_{J=2}^{2j}\sum_{M=-J}^{J}\langle Q^{JM+}\rangle\hat{Q}^{JM}\right]. \tag{50.22}$$

С помощью этого выражения нетрудно найти максимальное значение поляризации, используя свойство матрицы плотности $Sp\rho^2 \leqslant Sp\rho$ и формулы

$$Sp\hat{j}_i = 0;\quad Sp\hat{j}_i\hat{j}_k = \frac{1}{3}(2j+1)\,j\,(j+1)\,\delta_{ik}.$$

Простое вычисление дает

$$0 \leqslant |P| \leqslant 1.$$

Как видно из их определения, величины a и P — разные характеристики. Например, выстроенность a может быть близка к единице, а поляризация P — очень малой величиной.

Важным частным случаем является $j = 1/2$, когда выражение (50.22) принимает простой вид:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{I} + (\mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\sigma}})], \tag{50.23}$$

где вектор поляризации равен среднему значению оператора $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ по состоянию, описываемому ρ. Простые и хорошо известные свойства матриц $\hat{\sigma}$ позволяют в этом частном случае избежать применения несколько громоздкого математического аппарата, изложенного выше.

Однако уже для спина $j = 1$ матрица плотности имеет значительно более сложный вид:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}\left[\hat{I} + \sqrt{3}\,\mathbf{P}\hat{\mathbf{j}} + \sum_{M=-2}^{2}\langle Q^{2M+}\rangle\hat{Q}^{2M}\right]. \tag{50.24}$$

Как видно из содержания предыдущего параграфа, расчет характеристик реакций с ориентированными частицами сводится к унитарному преобразованию матрицы плотности, причем роль оператора преобразования играет S-матрица (или, вернее, R-матрица, см. § 38). Общий вид матрицы плотности для частиц со спином $^1/_2$ дается формулой (50.23). Для того чтобы вместо аппарата сложения момента количества движения пользоваться простыми свойствами матриц Паули, необходимо $\hat{R}$-матрицу тоже выразить через матрицы $\hat{\sigma}_i$. Для краткости записи вместо $\hat{R}$-матрицы удобно ввести матрицу $\hat{M}$, отличающуюся от $\hat{R}$ очевидным множителем. Эта матрица определяется следующим выражением для дифференциального сечения:

$$d\sigma = Sp\hat{M}\hat{\rho}\hat{M}^+.$$

Для начала рассмотрим такую бинарную реакцию, когда в начальном и конечном состояниях одна из частиц имеет спин $^1/_2$, а вторая — спин, равный нулю. В этом случае матрица $\hat{M}$ имеет вид

$$(\mu' \mathbf{p}_f | M | \mu \mathbf{P}_i), \qquad (51.1)$$

т. е. представляет собой двухрядную матрицу (μ и μ' принимают два значения $\pm^1/_2$).

Так как любую двухрядную матрицу можно представить в виде линейной комбинации матриц Паули и единичной матрицы $\hat{I}$, то матрицу (51.1) можно записать в операторном виде:

$$\hat{M} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{K}) + L\hat{I}, \qquad (51.2)$$

где вектор $\mathbf{K}$ и скаляр L — комплексные функции угла и энергии, зависящие от типа частиц.

Потребуем, чтобы матрица $\hat{M}$ была инвариантна по отношению к отражению в плоскости реакции (49.21):

$$\eta_i \eta_f e^{-i\frac{\pi}{2}(\hat{\sigma}\mathbf{n})} \left[(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{K}) + L\right] e^{i\frac{\pi}{2}(\hat{\sigma}\mathbf{n})} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{K}) + L, \qquad (51.3)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к плоскости реакции; $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{p}_i \mathbf{p}_f]}{|[\mathbf{p}_i \mathbf{p}_f]|}$; $\eta_i \eta_f$ — произведение внутренних четностей, участвующих в реакции частиц.

Направим ось z по $\mathbf{n}$ и запишем соотношение (51.3) в проекциях на оси:

$$\eta_i \eta_f \hat{\sigma}_z \left[\hat{\sigma}_x K_x + \hat{\sigma}_y K_y + \hat{\sigma}_z K_z + L\right] \hat{\sigma}_z = \\ = \hat{\sigma}_x K_x + \hat{\sigma}_y K_y + \hat{\sigma}_z K_z + L. \qquad (51.4)$$

Здесь было использовано равенство (49.7). Из выражения (51.4) следует, что возможны два случая:

а) $\eta_i \eta_f = +1$, при этом $K_x = K_y = 0$ и общий вид матрицы $\hat{M}$ запишется

$$\hat{M} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}) K + L, \qquad (51.5а)$$

где K и L — скалярные комплексные функции угла рассеяния и энергии;

б) $\eta_i \eta_f = -1$, при этом $K_z = L = 0$

$$M = A(\hat{\sigma}\mathbf{k}_i) + B(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\varkappa}), \qquad (51.5б)$$

где $\boldsymbol{\varkappa} = \frac{\mathbf{k}_f - (\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f)\mathbf{k}_f}{|[\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f]|}$; $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_f$ — единичные векторы в направлениях начального и конечного импульсов; A и B — комплексные функции угла рассеяния и энергии.

Рассмотрим двойное упругое рассеяние, в результате которого обнаруживается поляризация. Пусть начальный пучок — неполяризованный, т. е. обладает матрицей плотности

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\hat{I}.$$

В соответствии с предыдущим параграфом пучок частиц, возникающих в результате первого столкновения, определяется следующей матрицей плотности:

$$\hat{\rho} = \hat{M}_1 \hat{\rho}_0 \hat{M}_1^+ = \frac{1}{2} I \left[(\mathbf{n}_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}) K_1 + L_1\right]\left[(\mathbf{n}_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}) K_1^* + L_1^*\right];$$

$$K_1 = K_1(\theta,\ E_1, E_0); \quad L_1 = L_1(\theta_1, E_1, E_0),$$

где E_0 и E_1 — соответственно энергия частицы до и после рассеяния; θ_1 — угол первого рассеяния; вектор $\mathbf{n}_1$ направлен по нормали к плоскости первой реакции.

Поляризация этого однократно рассеянного пучка согласно выражению (50.21) запишется:

$$\mathbf{P} = \frac{Sp\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\rho}}{Sp\hat{\rho}} = \mathbf{n}_1 2\,\mathrm{Re}\,\frac{L_1 K_1^*}{|L_1|^2 + |K|^2} = \mathbf{n}_1 P_1. \qquad (51.6)$$

Пусть этот однажды рассеянный пучок рассеивается на второй мишени. Двукратно рассеянный пучок будет характеризоваться матрицей плотности $\hat{\rho}_2 = \hat{M}_2 \hat{\rho}_1 \hat{M}_2^+$, где $\hat{M} = \left[(\mathbf{n}_2\hat{\boldsymbol{\sigma}})K_2 + L_2\right]$, $\mathbf{n}_2$ направлено по нормали к плоскости второго рассеяния.

Дифференциальное сечение второго рассеяния нетрудно найти, используя свойства спиновых матриц *:

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{Sp\rho_2}{Sp\rho_1} = [|K_2|^2 + |L_2|^2][1 + P_1 P_2 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)]; \qquad (51.7)$$

* Здесь имеются в виду следующие свойства:
$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{ljk}\hat{\sigma}_l$; $Sp\hat{\sigma}_i = 0$ $Sp\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = 2\delta_{jk}$, где ε_{ljk} — полностью антисимметричный единичный тензор; δ_{jk} — символ Кронекера.

здесь введено обозначение

$$P_2 = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{L_2 K_2^*}{|K_2|^2 + |L_2|^2}. \qquad (51.8)$$

Как видно из формулы (51.7), отличие от нуля поляризации частиц, возникающих в первой реакции, приводит к зависимости сечения вторичного рассеяния от азимутального угла $(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) = \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями первичного и вторичного рассеяния.

Если мы будем проводить эксперимент так, что плоскости первого и второго рассеяния совпадают, то

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = [|K_2|^2 + |L_2|^2](1 \pm P_1 P_2). \qquad (51.9)$$

Знак «+» или «—» зависит от того, параллельны или антипараллельны нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, иначе говоря, откладываем угол θ_2 влево или вправо. Измеряя лево-правую асимметрию, характеризуемую параметром

$$e^{LR} = \frac{d\sigma_2^L - d\sigma_2^R}{d\sigma_2^L + d\sigma_2^R} = P_1 P_2, \qquad (51.10)$$

можно измерить P_1, если нам известно P_2 (P_2 — поляризация, которая возникает при столкновении со вторичным рассеивателем неполяризованных частиц). Таким образом, для измерения поляризации надо иметь анализатор, для которого уже изучены способности поляризовать частицы. Можно сделать первый и второй рассеиватели одинаковыми и подобрать условия (энергии и углы) так, что $P_1 \approx P_2$, тогда $P_1 \approx \sqrt{e^{LR}}$.

Рассмотрение рассеяния бесспиновых частиц на поляризованных частицах со спином $^1/_2$ аналогично изложенному выше рассмотрению двойного рассеяния. Пусть $\mathbf{P} = P\mathbf{n}_0$ означает поляризацию мишени, а $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{pp}']}{|[\mathbf{pp}']|}$ — единичный вектор, направленный по нормали к плоскости рассеяния. Матрица плотности конечного состояния запишется:

$$\hat{\rho}_f = \hat{M}\,\frac{1}{2}[\hat{I} + P(\mathbf{n}_0\hat{\boldsymbol{\sigma}})]\,\hat{M}^+.$$

Отсюда видно, что сечение рассеяния выражается формулой, совершенно аналогичной формуле (51.7):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Sp\rho_f = [|K|^2 + |L|^2][1 + PP'(\mathbf{n}_0\mathbf{n})],$$

где

$$P' = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{K^* L}{|K|^2 + |L|^2};$$

P', очевидно, равно поляризации частиц отдачи при рассеянии на неполяризованной мишени. Так же как и выше, можно определить лево-правую асимметрию

$$e^{LR} = PP'. \qquad (51.11)$$

Под рассеянием влево понимается случай, когда векторное произведение $[\mathbf{p}\times\mathbf{p}']$ параллельно $\mathbf{n}_0$, а под рассеянием вправо — случай, когда эти векторы антипараллельны.

Приведенные формулы легко обобщаются на случай бинарной реакции, когда в начальном состоянии имеется поляризованная частица со спином $^1/_2$ и неполяризованная частица произвольного спина, спины конечных частиц произвольны. В этом случае матрица плотности начального состояния имеет вид

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{2}\left[1 + (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{P})\right]\frac{\hat{I}}{2I_{II}+1}.$$

Дифференциальное сечение запишется:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2(2I_{II}+1)}\,Sp\hat{M}\hat{M}^+\left\{1 + \mathbf{P}\,\frac{Sp\hat{M}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{M}^+}{Sp\hat{M}\hat{M}^+}\right\}. \qquad (51.12)$$

Используя инвариантность S-матрицы по отношению к обращению времени (см. § 35), нетрудно показать, что

$$\frac{Sp\hat{M}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{M}^+}{Sp\hat{M}\hat{M}^+}$$

равно поляризации частицы со спином 1/2, возникающей в обратной реакции с неполяризованными частицами.

Использование свойств интегралов движения дало возможность выразить R-матрицу бинарной реакции типа $0 + {}^1/_2 \to 0 + {}^1/_2$ (числа означают спины частиц) через два комплексных параметра K и L [см. соотношение (51.5а)], или A и B [см. выражение (51.5б)], или соответственно через четыре действительных параметра, например $K = |K|e^{i\varphi_1}$, $L = |L|e^{i\varphi_2}$.

Измерение сечения и поляризации дает возможность определить только $|K|^2 + |L|^2$ и $|K||L|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Если представить соотношение (51.5а) в виде

$$e^{i\varphi_2}[|L| + |K|e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})],$$

то φ_2 будет иметь смысл абсолютной фазы матрицы рассеяния и ее можно определить только в интерференционных опытах (например, по интерференции ядерного и кулоновского рассеяния) или на основе интегрального уравнения (38.14). Таким образом, изучение помимо рассеяния неполяризованных частиц двукратного рассеяния или рассеяния на поляризованных частицах оставляет неопределенным один параметр (кроме абсолютной фазы). Третье соотношение между введенными параметрами можно получить, исследуя поляризацию

частиц отдачи при рассеянии на поляризованной мишени или изучая тройное рассеяние.

Рассмотрим случай двойного рассеяния, когда первое рассеяние происходит на поляризованной частице. Пусть $\mathbf{P}$ — вектор поляризации мишени первого рассеяния. Вектор поляризации рассеянной частицы запишется как обычно:

$$P'_i = \frac{Sp\hat{\sigma}_i \hat{M}\,[\hat{I} + (\hat{\sigma}\mathbf{P})]\,\hat{M}^+}{Sp\hat{M}\,[\hat{I} + (\hat{\sigma}\mathbf{P})]\,\hat{M}^+} = \frac{P_i^0 + \Sigma D_{ik} P_k}{1 + (\mathbf{P}\mathbf{P}^0)}. \qquad (51.13)$$

Здесь введены обозначения

$$D_{ik} = \frac{1}{2\sigma_0} Sp\hat{\sigma}_i \hat{M} \hat{\sigma}_k \hat{M}^+; \qquad (51.14)$$

σ_0 и P_i^0 — дифференциальное сечение и поляризация нуклона отдачи в случае рассеяния на неполяризованной мишени; D_{ik} называют тензором деполяризации.

Подставляя в формулу (51.14) явный вид $\hat{M}$ [см. формулу (51.5а)] и используя упомянутые выше свойства спиновых матриц, находим:

$$\sigma_0 D_{ik} = |K|^2 [\delta_{i3}\delta_{k3} - \delta_{ik}\delta_{33} + \delta_{i3}\delta_{k3}] - 2ImK^* L\varepsilon_{ik3} + \delta_{ik}|L|^2. \qquad (51.15)$$

Здесь за направление оси *3* выбрано направление нормали к плоскости первого рассеяния. За ось *2* выберем направление первичного пучка, а ось *1* выберем так, чтобы образовалась правая система координат. Пусть поляризация $\mathbf{P}$ направлена по оси *2*, тогда с помощью формул (51.13) и (51.15) найдем компоненты поляризации частиц отдачи:

$$P'_i = \left\{P^0\delta_{i3} + \frac{1}{\sigma_0}[|L|^2 - |K|^2]\delta_{i2} - 2ImK^* L\varepsilon_{i23}\right\} P_0. \qquad (51.16а)$$

Если же поляризация $\mathbf{P}$ направлена по оси *1*, то аналогично найдем

$$P'_i = \left\{P^0\delta_{i3} + \frac{1}{\sigma_0}[|L|^2 - |K|^2]\delta_{i1} - 2ImK^* L\varepsilon_{i13}\right\} P. \qquad (51.16б)$$

Зная вектор поляризации, согласно сказанному выше, получаем матрицу плотности начального для второго рассеяния состояния. Рассмотрим случай, когда плоскость второго рассеяния перпендикулярна плоскости первого рассеяния. Дифференциальное сечение запишется:

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = Sp\hat{M}\frac{1}{2}[\hat{I} + (\hat{\sigma}\mathbf{P}')]\,\hat{M}^+ = [|K|^2 + |L|^2][1 + P^0(\mathbf{P}'\mathbf{n}_2)], \qquad (51.17)$$

где $\mathbf{n}_2$ — единичный вектор нормали к плоскости второго рассеяния, он лежит в плоскости первого рассеяния. Угол между $\mathbf{n}_2$ и осью *1* равен углу первичного рассеяния в лабораторной системе координат. Член $P^0(\mathbf{P}'\mathbf{n}_2)$ обусловливает асимметрию вторичного рассеяния

относительно плоскости первичного рассеяния (меняет знак при замене $\mathbf{n}_2 \to -\mathbf{n}_2$).

Из выражения (51.17) получаем выражение для асимметрии

$$e = \frac{\frac{d\sigma_2}{d\Omega}\,(\text{вверх}) - \frac{d\sigma_2}{d\Omega}\,(\text{вниз})}{\frac{d\sigma_2}{d\Omega}\,(\text{вверх}) + \frac{d\sigma_2}{d\Omega}\,(\text{вниз})} = P_0(\mathbf{P}'\mathbf{n}_2).$$

На основе формулы (51.16а) находим

$$e^{(a)} = P_0 P\{[|L|^2 - |K|^2]\sin\theta - 2ImK^* L\cos\theta\}, \qquad (51.18а)$$

а на основе формулы (51.16б)

$$e^{(b)} = P_0 P\{-[|L|^2 - |K|^2]\cos\theta - 2ImK^* L\sin\theta\}. \qquad (51.18б)$$

Таким образом, измерение асимметрии дает недостающее уравнение для определения третьего параметра.

Восстановление матрицы рассеяния, очевидно, эквивалентно фазовому анализу, однако в области высоких энергий фазовый анализ затрудняется необходимостью учета неупругих процессов и большого числа фаз. Приведенные расчеты не только представляют схему кинематических расчетов, но могут быть использованы, например, для анализа рассеяния π- и K-мезонов на нуклонах. Реакции с участием частиц спина $^1/_2$ — наиболее часто встречающиеся на практике. В связи с этим приведем результаты рассмотрения поляризационных опытов также и для других реакций.

Процессы фоторождения π- или K-мезонов на нуклонах с образованием в конечном состоянии барионов со спином $^1/_2$ могут быть описаны матрицей $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{K}) + L$, и многие из предыдущих результатов непосредственно обобщаются на эти процессы. Необходимо только помнить, что теперь $\mathbf{K}$ и L зависят также от поляризации фотона и вектор $\mathbf{K}$ уже не сводится к матрице $|K|\mathbf{n}$. Более детальное рассмотрение фоторождения мезонов приведено ниже, а пока обсудим опыты по фоторождению, связанные с поляризацией участвующих в реакции барионов.

Если мишень поляризована, то сечение процессов фоторождения, согласно изложенному выше, имеет вид

$$\sigma = \sigma_0[1 + (\mathbf{P}_i\mathbf{P}^{\text{об}})],$$

где $\mathbf{P}^{\text{об}}$ — поляризация нуклонов, возникающая в обратном процессе радиационного захвата мезона неполяризованным барионом. В общем случае эта величина не совпадает с поляризацией нуклона отдачи при фоторождении на неполяризованных нуклонах. Как уже отмечалось, это является общим свойством неупругих процессов.

Поляризация бариона отдачи при фоторождении на поляризованной мишени аналогично изложенному выше запишется:

$$P_i' = \frac{P_i^0 + \sum_k D_{ik} P_k}{[1 + (\mathbf{P}\mathbf{P}_0)]},$$

где $P_i^0 = \frac{1}{2\sigma_0} Sp\hat{M}\hat{M}^+ \hat{\sigma}_i$ — поляризация конечного бариона в случае неполяризованной мишени, а

$$D_{ik} = \frac{1}{2\sigma_0} Sp\hat{\sigma}_i \hat{M}\hat{\sigma}_k \hat{M}^+$$

тензор деполяризации.

В отличие от случая упругого рассеяния (реакция типа $0 + 1/2 \to 0 + 1/2$) тензор деполяризации имеет пять компонент, отличных от нуля, поскольку теперь требования инвариантности по отношению к вращениям и отражениям не приводят к простому условию $\mathbf{K} = |K|\mathbf{n}$. Соответственно, для того чтобы определить D_{ik}, необходимо провести пять независимых опытов.

Задача еще более усложняется для упругого рассеяния нуклон—нуклон. В пределах справедливости изотопической инвариантности матрицу рассеяния можно разбить на две части

$$\hat{M} = \hat{M}_0 \frac{1 - (\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2)}{4} + \hat{M}_1 \frac{3 + (\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2)}{4},$$

где $\hat{\tau}$ — изотопические спиновые матрицы; $\hat{M}_0$ и $\hat{M}_1$ описывают рассеяние в состояниях с изотопическим спином T, равным нулю и единице. Зависимость от матриц $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ можно получить, если представить M_i разложенной по полной системе шестнадцати матриц 1; $\hat{\sigma}_{1k}$, $\hat{\sigma}_{2j}$ и $\hat{\sigma}_{1j}\hat{\sigma}_{2k}$, а затем наложить требования инвариантности по отношению к вращениям и отражениям:

$$\hat{M}_i = a_i + b_i(\hat{\sigma}_1\mathbf{n})(\hat{\sigma}_2\mathbf{n}) + c_i[(\hat{\sigma}_1\mathbf{n}) + (\hat{\sigma}_2\mathbf{n})] + d_i[(\hat{\sigma}_1\mathbf{n}) - (\hat{\sigma}_2\mathbf{n})] + e_i(\hat{\sigma}_1\mathbf{m})(\hat{\sigma}_2\mathbf{m}) + f_i(\hat{\sigma}_1\mathbf{l})(\hat{\sigma}_2\mathbf{l}). \quad (51.19)$$

Здесь введена тройка взаимно ортогональных векторов, связанных с единичными векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ в направлении импульсов начального и конечного нуклонов в системе центра инерции следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{p}\mathbf{p}']}{|[\mathbf{p}\mathbf{p}']|}; \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}; \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|}. \quad (51.20)$$

Векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ совпадают (в нерелятивистском приближении) по направлению с импульсами рассеянного нуклона и нуклона отдачи (соответственно) в лабораторной системе координат.

Если воспользоваться тождественностью частиц (для n — p-рассеяния это рассуждение верно только в рамках справедливости изотопической инвариантности), то можно показать, что $d_i = 0$. Из обобщенного принципа Паули (распространенного на изотопический спин) для состояний с определенным орбитальным моментом l, полным спином S и полным изотопическим спином T имеем

$$(-1)^l (-1)^{S+1} (-1)^{T+1} = -1;$$
$$(-1)^{l'} (-1)^{S'+1} (-1)^{T'+1} = -1.$$

Учитывая сохранение четности и изотопического спина, получаем

$$(-1)^S = (-1)^{S'}.$$

Поскольку возможные значения S равны нулю и единице, то $S' = S$. Иначе говоря, оператор квадрата полного спина $\frac{1}{4}(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)^2$ является интегралом движения и должен коммутировать с S-матрицей. В выражении (51.19), за исключением

$$d_i[(\hat{\sigma}_1\mathbf{n}) - (\hat{\sigma}_2\mathbf{n})],$$

все слагаемые удовлетворяют этому условию, поэтому $d_i = 0$.

Аналогичный член для нуклон-антинуклонного рассеяния равен нулю из-за сохранения G-четности*. Сечение рассеяния неполяризованного пучка на неполяризованной мишени записывается как обычно:

$$\sigma_0 = \frac{1}{4} Sp\hat{M}\hat{M}^+. \quad (51.21)$$

Поляризации рассеянных частиц $\mathbf{P}_1^0$ и частиц отдачи $\mathbf{P}_2^0$ равны между собой. Это видно из симметрии (51.19) по отношению к замене $\sigma_1 \leftrightarrows \sigma_2$ при $d_i = 0$. Если же $d_i \neq 0$ (рассеяние различных частиц), то $\mathbf{P}_1^0 \neq \mathbf{P}_2^0$.

Тензор деполяризации

$$D_{ik} = \frac{1}{4\sigma_0} Sp\hat{\sigma}_{1i}\hat{M}\hat{\sigma}_{1k}\hat{M}^+ \quad (51.22)$$

связывает компоненты поляризации $\mathbf{P}_1$ пучка, рассеивающегося на неполяризованной мишени с компонентами поляризации $\mathbf{P}_1'$ рассеянного пучка:

$$P_{1i}' = \frac{P_i^0 + \sum_k D_{ik} P_{1k}}{1 + (\mathbf{P}^0\mathbf{P}_1)}.$$

Второй тензор деполяризации из-за симметрии $\hat{M}$ по отношению к замене $\sigma_1 \rightleftarrows \hat{\sigma}_2$ равен первому. Иначе говоря, тот же тензор D_{ik} определяет и поляризацию частиц отдачи $\mathbf{P}_2'$ при рассеянии неполяризованных частиц на мишени с поляризацией $\mathbf{P}_2$:

$$P_{2i}' = \frac{P_i^0 + D_{ik} P_{2k}}{1 + (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2)}. \quad (51.23)$$

---

* См. конец § 55.

Для того чтобы измерить параметры тензора деполяризации, необходимы или опыты по тройному рассеянию, или опыты по двойному рассеянию, но с использованием поляризованной мишени.

Поскольку $\hat{M}$ теперь определяется пятью комплексными параметрами, то, за исключением абсолютной фазы, необходимо определить девять действительных параметров. Это означает, что для определения всех параметров необходимо сделать минимум девять поляризационных опытов для каждого угла и энергии. Однако фактически из-за нелинейного характера уравнений, связывающих экспериментально наблюдаемые величины с параметрами матрицы $\hat{M}$, требуется большее число опытов. Рассмотренных выше поляризационных характеристик уже недостаточно, в связи с этим вводят следующие тензоры:

$$K_{ik} = \frac{1}{4\sigma_0} Sp\hat{\sigma}_{2i} \hat{M}\hat{\sigma}_{1k} \hat{M}^+; \qquad (51.24)$$

$$C_{ik} = \frac{1}{4\sigma_0} Sp\hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2k} \hat{M}\hat{M}^+; \qquad (51.25)$$

$$P_{ik} = \frac{1}{4\sigma_0} Sp\hat{M}\hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2k} \hat{M}^+; \qquad (51.26)$$

K_{ik} называют тензором передачи поляризации. Он определяет поляризацию частиц отдачи P_2' при рассеянии поляризованного пучка (с поляризацией $\mathbf{P}_1$) на неполяризованной мишени

$$P'_{2i} = \frac{P_i^0 + \sum_k K_{ik} P_{1k}}{1 + (\mathbf{P}^0, \mathbf{P}_1)}.$$

Благодаря симметрии $\hat{M}$ по отношению к замене $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \rightleftarrows \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ этот же тензор K_{ik} определяет поляризацию $\mathbf{P}_1'$ рассеянных частиц при рассеянии неполяризованного пучка на поляризованной мишени (поляризация $\mathbf{P}_2$)

$$P'_{1i} = \frac{P_i^0 + \sum_k K_{ik} P_{2k}}{1 + (\mathbf{P}^0 \mathbf{P}_2)};$$

C_{ik} называют тензором корреляции поляризаций; он характеризует поляризацию рассеянной частицы и частицы отдачи в опытах по рассеянию неполяризованных частиц на неполяризованных мишенях.

Тензор P_{ik} встречается при рассмотрении рассеяния поляризованных частиц на поляризованных мишенях. Записав матрицу плотности начального состояния для этого случая в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}[\hat{I} + (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \mathbf{P}_1)][\hat{I} + (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{P}_2)],$$

нетрудно по общим правилам получить сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0\left[1 + (\mathbf{P}_1\mathbf{P}^0) + (\mathbf{P}_2\mathbf{P}^0) + \sum_{ik} P_{ik} P_{1i} P_{2k}\right],$$

где

$$P_{ik} = \frac{1}{4\sigma_0} SpM\hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2k} M^+.$$

Тензор P_{ik} не является самостоятельной характеристикой. Нетрудно показать, что он практически совпадает с тензором корреляции поляризаций C_{ik}.

Измерение σ_0, поляризации P_0 и компонент тензоров D_{ik}, K_{ik} и C_{ik} дает четырнадцать уравнений для определения девяти параметров амплитуды. При этом полезно выразить тензоры D_{ik}, K_{ik} и C_{ik} через их проекции на оси, определяемые естественными ортами (51.20). Исходя из определений этих тензоров, свойств матриц $\hat{\sigma}$ и инвариантности амплитуды рассеяния относительно вращений, отражения и обращения времени, можно показать, что

$$D_{ik} = D_{nn} n_i n_k + D_{ll} l_i l_k + D_{mm} m_i m_k + D_{ml}(m_i l_k - l_i m_k).$$

Для K_{ik} получается в точности такая же структура, если учесть симметрию $\hat{M}$ по отношению к замене $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \rightleftarrows \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$:

$$K_{ik} = K_{nn} n_i n_k + K_{ll} l_i l_k + K_{mm} m_i m_k + K_{ml}(m_i l_k - l_i m_k).$$

В результате этой же симметрии тензоры C_{ik} и P_{ik} симметричны по индексам i и k:

$$C_{ik} = C_{nn} n_i n_k + C_{mm} m_i m_k + C_{ll} l_i l_k + C_{ml}(m_i l_k + m_k l_i),$$

причем

$$P_{nn} = C_{nn};\ P_{mm} = C_{mm};\ P_{ll} = C_{ll};\ P_{ml} = -C_{ml}.$$

Выраженные через эти параметры упомянутые четырнадцать уравнений имеют вид:

$$\sigma_0 = |a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + |e|^2 + |f|^2;$$
$$\sigma_0 P^0 = 2\,\mathrm{Re}\, c^*(a+b);$$
$$\sigma_0 D_{nn} = |a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 - |e|^2 - |f|^2;$$
$$\sigma_0 D_{ll} = |a|^2 - |b|^2 - |e|^2 + |f|^2;$$
$$\sigma_0 D_{mm} = |a|^2 - |b|^2 + |e|^2 - |f|^2;$$
$$\sigma_0 D_{ml} = 2I\,mc^*(a-b);$$
$$\sigma_0 C_{ml} = 2I\,mc^*(e-f);$$
$$\frac{1}{2}\sigma_0 C_{nn} = \mathrm{Re}\, ab^* + |c|^2 - \mathrm{Re}\, ef^*;$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0 C_{ll} = \mathrm{Re}\, af^* - \mathrm{Re}\, be^*;$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0 C_{mm} = \mathrm{Re}\, ae^* - \mathrm{Re}\, bf^*;$$

$$\sigma_0 K_{ml} = 2Im\, c^*(e+f);$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0 K_{nn} = \mathrm{Re}\, ab^* + |c|^2 + \mathrm{Re}\, ef^*;$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0 K_{ll} = \mathrm{Re}\, af^* + \mathrm{Re}\, be^*;$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0 K_{mm} = \mathrm{Re}\, ae^* + \mathrm{Re}\, bf^*.$$

Получить эти уравнения предоставляем читателю в качестве упражнения.

Приведенные в этом параграфе формулы были найдены и обсуждались многими авторами. Довольно полная библиография и обсуждение поляризационных измерений для реакций с частицами спина 1/2 содержатся в обзоре [32].

Как уже отмечалось выше, частным случаем вторичной реакции, в которой обнаруживается поляризация, возникающая в первичной реакции, является распад частиц продуктов. Рассмотрим случай, когда в результате реакции образуется частица со спином 1/2, распадающаяся на две частицы со спинами 0 и 1/2. Мы не будем предполагать, что четность при распаде сохраняется. Примером такой реакции может служить образование и распад гиперонов со спином 1/2.

Разлагая S-матрицу, описывающую распад по спиновым матрицам, и требуя инвариантности по отношению к поворотам, находим

$$\hat{M} = a + (\mathbf{b}\hat{\boldsymbol{\sigma}}).$$

Мы рассматриваем распад частицы в ее системе покоя, и единственный имеющийся в нашем распоряжении вектор — это $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении импульса частицы — продукта распада, поэтому матрица M запишется:

$$M = a + b(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{k}).$$

Первый член — скаляр: он соответствует случаю, когда произведение внутренних четностей частиц продуктов равно внутренней четности нестабильной частицы; второй член — псевдоскаляр и соответствует случаю, когда эти четности имеют противоположный знак. Наличие обоих членов соответствует нарушению закона сохранения четности. Взяв для матрицы плотности нестабильной частицы обычное выражение

$$\rho = \frac{1}{2}[1 + P(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n})],$$

где $P\mathbf{n}$ — поляризация нестабильных частиц; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, задающий нормаль к плоскости реакции, находим вероятность распада

$$W = Sp\hat{M}\hat{\rho}\hat{M}^+ = [|a|^2 + |b|^2]\left[1 + \frac{2\,\mathrm{Re}\, ab^*}{|a|^2 + |b|^2} P(\mathbf{n}\,\mathbf{k})\right].$$

Отсюда видно, что вероятность распада зависит от величины $(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \cos\theta$ только в том случае, когда четность не сохраняется. Если параметр $(2\mathrm{Re}\, ab^*)/(|a|^2 + |b|^2)$ известен, то из углового распределения распада можно определить поляризацию нестабильных частиц P.

§ 52. РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ СПИНА

Кинематика реакций с участием частиц, имеющих произвольное значение спина, состоит из тех же основных элементов, которые были использованы в предыдущем параграфе. Однако разложение S-матрицы и матрицы плотности по спиновым матрицам в общем случае не является эффективным. В связи с этим придется обратиться к аппарату коэффициентов векторного сложения и применить теорию преобразований Дирака. В этом параграфе существенно использованы работы [23].

Согласно изложенному выше, матрица плотности конечного состояния связана с матрицей плотности начального состояния соотношением

$$\hat{\rho}_f = \left(\frac{2\pi}{p_i}\right)^2 \hat{R}\hat{\rho}_i\hat{R}^+. \qquad (52.1)$$

Для того чтобы эффективно воспользоваться законами сохранения, в § 44—47 использованы представления полного момента J, его проекции M, орбитального момента l и суммарного спина s. В этом представлении равенство (52.1) примет вид

$$(s_f' l_f' J' M' | \rho_f | s_f l_f JM) = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum (s_f' l_f' \alpha_f | R^{J'}(E) | s_i' l_i' \alpha_i) \times$$

$$\times (s_i' l_i' J' M' | \rho_i | s_i l_i JM)(s_f l_f \alpha_f | R^J(E) | s_i l_i \alpha_i)^*. \qquad (52.2)$$

Однако пользоваться матрицей плотности в этом представлении неудобно, ибо в нашу задачу входит получение сечений и поляризаций. Нам нужны матрицы плотности вида

$$(j_1 m_1' j_2 m_2' | \rho_f(\mathbf{n}_f) | j_1 m_1 j_2 m_2)$$

или соответствующие им статистические тензоры $T^{q_1\nu_1 q_2\nu_2}(\mathbf{n})$, связанные с матрицей плотности соотношением

$$(j_1 m_1' j_2 m_2' | \rho_f(\mathbf{n}_f) | j_1 m_1 j_2 m_2) = \frac{1}{(2j_1+1)^{1/2}(2j_2+1)^{1/2}} \times$$

$$\times (-1)^{-j_1-j_2+m_1+m_2}(j_1 m_1' j_1 - m_1 | q_1 \nu_1) \times$$

$$\times (j_2 m_2' j_2 - m_2 | q_2 \nu_2)\, T^{q_1\nu_1 q_2\nu_2}(\mathbf{n}). \qquad (52.3)$$

Характеристики спинового состояния просто выражаются через статистические тензоры. Среднее значение произвольного оператора $A^{q\nu}$, зависящего, например, от спина частицы *1*, имеет вид

$$\overline{A^{q\nu}} = (j_1 \| A^q \| j_1)\, \frac{T^{q\nu 00}(\mathbf{n})}{T^{0000}(\mathbf{n})}, \qquad (52.4)$$

где $(j_1 \| \hat{A}^q \| j_1)$ — приведенный матричный элемент. Сечение процесса, когда в конечном состоянии поляризации не измеряются, пропорционально $T^{0000}(\mathbf{n})$.

Таким образом, наша задача сводится к нахождению связи матрицы плотности, заданной в представлении slJ, со статистическими тензорами. Это, очевидно, достигается выполнением последовательных преобразований Дирака:

$$T^{q_1\nu_1 q_2\nu_2}(\mathbf{n}_f) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [(2j+1)(2j_2+1)]^{1/2} \sum (-1)^{j_1 - m_1' + j_2 - m_2'} \times$$
$$\times (j_1 m_1 j_1 - m_1' | q_1 \nu_1)(j_2 m_2 j_2 - m_2 | q_2 \nu_2)(j_1 m_1 j_2 m_2 | s_f' m') \times$$
$$\times (\mathbf{n}_f | l_f' \mu')(s_f' m' l' \mu' | J' M')(s_f' l_f' J' M' | \varrho | s_f l_f J M)(J M | s_f m l_f \mu) \times$$
$$\times (l_f \mu | \mathbf{n}_f)(s_f m | j_1 m_1 j_2 m_2); \qquad (52.5)$$

здесь Σ означает суммирование по дважды встречающимся индексам. Используя для произведения шаровых гармоник $(\mathbf{n}_f | l_f' \mu')(l_f \mu | \mathbf{n}_f)$, формулу (44.5) и применяя технику суммирования коэффициентов векторного сложения, формулу (52.5) можно существенно упростить. Прежде чем привести окончательный результат, обратим внимание на то, что пока не были фиксированы направления осей квантования. В разных задачах полезны разные способы выбора оси квантования. Иногда это — направление оси первичного пучка, иногда нормаль к плоскости реакции, но наиболее целесообразным оказывается проектирование спинов частиц на их импульсы (это соответствует выбору нескольких осей квантования). Последний случай описан в следующем параграфе.

Рассмотрим преобразование поворота для статистического тензора (52.5), переводящее его из заданной системы координат в систему, где за ось z (ось квантования) принято направление импульса частицы *1* (в нашем случае это $\mathbf{n}_f$):

$$T^{q_1\tau_1 q_2\tau_2}(\mathbf{n}_f) = \sum_{\nu_1\nu_2} D^{q_1}_{\tau_1\nu_1}(-\pi, \vartheta_1, \pi - \varphi_1) \times$$
$$\times D^{q_2}_{\tau_2\nu_2}(-\pi\,\vartheta_1, \pi - \varphi_1)\, T^{q_1\nu_1 q_2\nu_2}(\mathbf{n}_f), \qquad (52.6)$$

где $\pi - \varphi$, ϑ_1, $-\pi$ — эйлеровы углы поворота (обозначим его ω), такого, чтобы ось z совпала с $\mathbf{n}_f$, а ось y стала перпендикулярной

старому направлению оси z и $\mathbf{n}_f$, причем поворот, обратный $\omega = \{-\pi, \vartheta_1, \pi - \varphi\}$, записывается как $\omega^{-1} = \{\varphi_1, \vartheta_1, 0\}$. Отметим, что сферические углы отсчитываются по-прежнему от старых осей xyz, вводится только новая ось квантования для спиновых индексов.

Приведем окончательный результат для статистического тензора в случае выбора оси квантования вдоль $\mathbf{n}_f$:

$$T^{q_1\tau_1 q_2\tau_2} = \frac{1}{4\pi} [(2j_1+1)(2j_2+1)]^{1/2} \sum D^I_{\tau K}(-\pi, \vartheta_1, \pi - \varphi_1) \times$$
$$\times (q\tau | q_1 \tau_1 q_2 \tau_2)(-1)^{q+\tau}(-1)^{J-M}(IK | J' M' J - M) \times$$
$$\times [(2q_1+1)(2q_2+1)]^{1/2} X(j_1 q_1 j_1;\ s_f' q s_f;\ j_2 q_2 j_2) \times$$
$$\times G^*_\tau(J' l_f' s_f';\ Iq;\ J l_f s_f)(s_f' l_f' J' M' | \varrho_f | s_f l_f J M). \qquad (52.7)$$

Сумма берется по s_f', s_f, l_f', l_f, q, J', J, I и по M', M и K.

Коэффициент G_τ определяется следующим образом:

$$G_\tau(J' l_f' s_f';\ Iq;\ J l_f s_f) = [(2l_f'+1)(2l_f+1)(2s_f+1)(2s_f'+1)]^{1/2} \times$$
$$\times [2J'+1)(2J+1)(2q+1)(2I+1)]^{1/2} i^{l_1+l_2} \sum_r (l_f' 0 l_f 0 | r0) \times$$
$$\times (q\tau I - \tau | r0)\, X(J' l_f' s_f';\ Irq;\ J l_f s_f).$$

Свойства коэффициентов G_τ и вытекающие из этих свойств правила отбора изложены в работе [25].

Произведение D-функций и шаровой гармоники при получении формулы (52.7) было упрощено с помощью формул (49.16) и (49.19).

Аналогично получаются выражения $(s_i' l_i' J' M' | \varrho_i | s_i l_i J M)$ через $T^{q_{\rm I}\nu_{\rm I} q_{\rm II}\nu_{\rm II}}(\mathbf{n}_i)$ или $T^{q_{\rm I}\tau_{\rm I} q_{\rm II}\tau_{\rm II}}(\mathbf{n}_i)$. Соответствующие функции преобразования являются обратными по отношению к функциям преобразования, осуществляющим переход (52.7), и получаются из последних комплексным сопряжением. (Здесь мы отвлекаемся от очевидной замены обозначений $j_1 \to j_{\rm I}\, j_2 \to j_{\rm II}$ и т. п.)

Объединив эти два преобразования, легко получить окончательные формулы, связывающие статистические тензоры начального и конечного состояний. Мы их здесь не выписываем, так как они очень громоздки.

Если спиновое состояние частиц I и II полностью неполяризовано или обладает осевой симметрией

$$T^{q_{\rm I}\nu_{\rm I} q_{\rm II}\nu_{\rm II}} = T^{q_{\rm I}0 q_{\rm II}0}\, \delta_{\nu_{\rm I}0}\, \delta_{\nu_{\rm II}0},$$

то от суммы по τ в преобразовании, обратном (52.7), остается только один член

$$D^I_{\tau 0}(-\pi, \vartheta, \pi - \varphi) = P^I_{\tau 0}(\cos\theta)$$

и статистические тензоры конечного состояния не будут зависеть от φ. Это вполне естественный результат, так как в этом случае от выбора оси y физически ничего не может зависеть.

Совершенно аналогично получается общая формула для реакций распада типа $a \to c + d$:

$$T^{q_c \tau_c q_d \tau_d}(\mathbf{n}_c) = \frac{1}{4\pi}[(2i_c+1)(2i_d+1)]^{1/2}(2s+1)^{-1/2} \times$$

$$\times \sum (-1)^{q'+\tau'} (q'\tau' \mid q_c \tau_c q_d \tau_d)[(2q_c+1)(2q_d+1)]^{1/2} \times$$

$$\times X(i_c q_c i_c; s_1' q' s_2'; i_d q_d i_d) G^*_{\tau'}(sl_1' s_1'; qq'; sl_2' s_2) \times$$

$$\times (s_1' l_1' \alpha' \mid R^S \mid \alpha_1)(s_2' l_2' \alpha' \mid R^S \mid \alpha_2)^* D^{q_c}_{\tau_c \nu}(-\pi, \vartheta_c, \pi - \varphi_c) T^{q\nu}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Сумма берется по q', τ', s_1', s_2', l_1', l_2', q, ν; $T^{q\nu}$ — статистические тензоры частицы a, s — ее спин.

В случае тождественности частиц I и II или *1* и *2* матрица плотности должна удовлетворять условию

$$(\xi \mid \rho \mid \mathbf{p}, m_1, m_2) = (-1)^{2j}(\xi \mid \rho \mid -\mathbf{p}, m_2, m_1),$$

т. е. должна при перестановке менять знак для полуцелых спинов и не меняться для целых спинов частиц.

Симметризованная по правым индексам матрица плотности имеет вид

$$(\xi \mid \rho \mid \mathbf{p}, m_1 m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\xi_1 \mid \rho \mid \mathbf{p}, m_1 m_2) + (-1)^{2j}(\xi \mid \rho \mid -\mathbf{p}, m_2 m_1)\right] =$$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi \mid \rho \mid l\mu sm)\left[1 + (-1)^{l+s}\right](l\mu p \mid \vartheta\varphi p)(sm \mid jm_1\, jm_2),$$

откуда видно, что учет тождественности частиц сводится к умножению под знаком суммы матрицы плотности на множитель

$$\frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{l_i' + s_i}\right]\left[1 + (-1)^{l_i' + s_i'}\right].$$

Отметим, что удачный выбор оси квантования в случае полностью неполяризованного начального состояния сильно уменьшает число статистических тензоров конечного состояния. Особенно полезным бывает выбор оси квантования вдоль направления нормали к плоскости реакции. Исходя из закона сохранения четности, нетрудно показать, что

$$T^{q_1 - \tau_1 00}(\mathbf{n}) = (-1)^{q_1 + \tau_1} T^{q_1 \tau_1 00}(\mathbf{n}).$$

Если еще учесть свойство статистических тензоров (50.16), то можно заключить, что в случае неполяризованного начального состояния все $T^{q_1 \tau_1}$ с четными q_1 действительны, а с нечетными чисто мнимы.

§ 53. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИРАЛЬНОСТИ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

Как отмечалось выше, удачный выбор оси квантования может очень сильно упростить громоздкие кинематические соотношения. Главным источником громоздкости этих выражений, как мы видели, являются многочисленные преобразования. Введение этих преобразований диктовалось необходимостью переводить S-матрицу из того представления, где законы сохранения ее диагонализуют в представление, соответствующее опыту. При рассмотрении реакций с участием частиц спина 1/2 имеются примеры такой параметризации S-матрицы, когда закон сохранения момента полностью учтен требованием инвариантности по отношению к поворотам, хотя явно квантовые числа момента в кинематические соотношения не входят. Этот способ параметризации позволяет обходиться без громоздких разложений типа изложенных в предыдущем параграфе. Однако он эффективен только для рассмотрения низших спинов. Кроме того, иногда желательно, чтобы в кинематических соотношениях явно присутствовали квантовые числа полного момента.

В связи со сказанным большое значение имело бы построение такого представления S-матрицы, когда наряду с проекциями спинов частиц в числе индексов представления были бы квантовые числа полного момента и его проекций. Это позволило бы получить следствия закона сохранения момента для поляризационных явлений, не проделывая громоздких преобразований. Такое представление существует, и основано оно на специфическом выборе осей квантования. Спиновое состояние частицы в этом представлении характеризуется проекцией спина частицы на ее импульс. Соответствующее квантовое число λ называется спиральностью (helicity). Проекция спина на импульс, очевидно, не изменяется при поворотах. Иначе динамическая переменная $\hat{\lambda}$ коммутирует с оператором полного момента, и они могут быть одновременно приведены к диагональному виду. Например, S-матрицу бинарной реакции можно записать в виде

$$(E'J'M'\lambda_1\lambda_2 \mid S \mid EJM\lambda_I\lambda_{II}) = \delta(E - E')\delta_{J'J}\delta_{M'M} \times$$
$$\times (\lambda_1\lambda_2 \mid S^J(E) \mid \lambda_I\lambda_{II}); \qquad (53.1)$$

здесь λ_i — проекция спина i-й частицы на ее импульс.

Некоторое неудобство, заключающееся в том, что все моменты спроектированы на разные оси, окупается очень существенным упрощением аппарата. Представление спиральностей обладает и еще одним чрезвычайно ценным достоинством. Использование этого представления позволяет избежать разделения момента на орбитальную и спиновую части. Такое разделение вызывает осложнения в релятивистском случае. Величина λ определеляется как проекция полного момента частицы на направление ее движения. В представлении спиральностей релятивистское обобщение корреляционных формул носит тривиальный характер. Более того, поскольку λ имеет смысл

и для частиц с массой, равной нулю, то этот важный частный случай практически не потребует особого рассмотрения.

Таким образом, использование представления спиральностей является не просто некоторым удобным приемом, с помощью которого можно получить те же следствия, что были получены выше. Это представление легко допускает такие обобщения, которые трудно сделать в старом формализме и которые очень актуальны в физике элементарных частиц. Большие достоинства этого представления изучены и подчеркнуты в работах [33—36]. Оно нашло широкие применения при обсуждении экспериментальных данных и в чисто теоретических работах. Задача построения кинематики реакций в этом представлении будет сведена к тому, что уже было рассмотрено выше, если нам будут известны функции преобразования

$$\langle \mathbf{n}\lambda' \,|\, jm\lambda\rangle; \quad \langle \mathbf{n}\lambda_1'\lambda_2' \,|\, JM\lambda_1\lambda_2\rangle \text{ и т. п.} \tag{53.2}$$

С помощью этих преобразований на основе (53.1) получим S-матрицу в представлении, соответствующем опыту, матрицу плотности и статистические тензоры. Функции преобразования (53.2) имеют вид

$$\langle \theta\varphi\lambda' \,|\, jm\lambda\rangle = \left[\frac{2J+1}{4\pi}\right]^{1/2} \delta_{\lambda\lambda'} D^{j*}_{m\lambda}(\varphi, \theta, 0); \tag{53.3}$$

$$\langle \theta, \varphi; \lambda_1'\lambda_2' \,|\, JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \left[\frac{2J+1}{4\pi}\right]^{1/2} \delta_{\lambda_1'\lambda_1}\delta_{\lambda_2'\lambda_2} D^{J*}_{M\Lambda}(\varphi, \theta, 0), \tag{53.4}$$

где $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, θ, φ — сферические углы импульса частицы *1*. Эти функции являются основой для кинематических расчетов в представлении спиральностей.

Происхождение формулы (53.3) понять довольно просто. Мы определили D-функции, как матричные элементы унитарного оператора, осуществляющего преобразование поворота (см. § 49):

$$\Psi_{jm} = \sum_k D^j_{km}(\alpha\beta\gamma)\,\Psi_{jk}, \tag{53.5}$$

где Ψ_{jk} — собственные волновые функции операторов J^2 и J_ζ. Они описывают движение в системе координат $\xi\eta\zeta$, а Ψ_{jm} — собственные функции операторов J^2 и J_z. Они описывают движение в системе координат xyz.

При бесконечно малом повороте системы осей $\xi\eta\zeta$ волновая функция Ψ_{jm}, очевидно, не меняется. Используя это условие и определение J_ζ как оператора бесконечно малого поворота вокруг оси ζ, из равенства (53.5) нетрудно получить

$$\hat{J}_\zeta \sum_m D^{j*}_{m\lambda}(\alpha\beta\gamma)\Psi_{jm} = \hat{J}_\zeta \Psi_{j\lambda} = \lambda\Psi_{j\lambda} = \lambda \sum_m D^{j*}_{m\lambda}\Psi_{jm}$$

или

$$\hat{J}_\zeta D^{j*}_{m\lambda} = \lambda D^{j*}_{m\lambda}.$$

Аналогично из определения $\hat{J}_z$ как оператора бесконечно малого поворота вокруг оси z найдем

$$\hat{J}_z D^{j*}_{m\lambda} = mD^{j*}_{m\lambda}.$$

Таким образом, $D^{j*}_{m\lambda}$ — собственные волновые функции состояния, задаваемого квантовыми числами $jm\lambda$ в представлении $\alpha\beta\gamma^*$. Иначе говоря, они являются функциями преобразования $\langle\alpha\beta\gamma \,|\, jm\lambda\rangle$. Однако нас интересует преобразование не из представления $\alpha\beta\gamma$, а из представления $\alpha\beta\lambda'$, где λ' — проекция момента на подвижную ось. Из определения D-функций (см. § 49) сразу находим

$$\langle\alpha\beta\lambda' \,|\, jm\lambda\rangle = \int \langle\lambda' \,|\, \gamma\rangle\, d\gamma\, \langle\alpha\beta\gamma \,|\, jm\lambda\rangle = ND^{j*}_{m\lambda}(\alpha, \beta, 0)\,\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{53.6}$$

причем $\alpha\beta$ — направляющие углы оси ζ, проекция момента на которую равна λ; N — нормировка. Формулу (53.4) получить на основе вывода формулы (53.6) несложно, если вспомнить определение спиральности как проекции полного момента частицы на ее импульс и то обстоятельство, что волновую функцию системы из двух частиц описываем в системе центра инерции, где импульсы частиц *1* и *2* противоположны.

Используя функции преобразования (53.4), легко найдем выражение для дифференциального сечения в представлении спиральностей:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2I_1+1)(2I_{II}+1)}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\\ \lambda_I\lambda_{II}}} |\langle\theta\varphi\lambda_1\lambda_2 \,|\, R \,|\, 00\lambda_I\lambda_{II}\rangle|^2, \tag{53.7}$$

где $i\hat{R} = \hat{S} - \hat{I}$;

$$\langle\theta, \varphi, \lambda_1\lambda_2 \,|\, S \,|\, 00\lambda_I\lambda_{II}\rangle = \sum_{JM}\langle\theta, \varphi, \lambda_1\lambda_2 \,|\, JM\lambda_1\lambda_2\rangle \times$$

$$\times \langle JM\lambda_1\lambda_2 \,|\, S \,|\, J'M'\lambda_I\lambda_{II}\rangle\langle J'M'\lambda_I\lambda_{II} \,|\, 00\lambda_I\lambda_{II}\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_J (2J+1)\langle\lambda_1\lambda_2 \,|\, S^J \,|\, \lambda_I\lambda_2\rangle D^{J*}_{\lambda\mu}(\varphi, \theta, 0); \tag{53.8}$$

$$\lambda = \lambda_I - \lambda_{II}; \quad \mu = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Подставляя выражение (53.8) в формулу (53.7) и используя выражение для произведения D-функций

$$d^J_{\lambda\mu}\, d^J_{\lambda'\mu'} = \sum_l \langle J\mu, -\mu' \,|\, l\mu - \mu'\rangle \times$$

$$\times \langle J\lambda J' - \lambda' \,|\, l\lambda - \lambda'\rangle (-1)^{\lambda'-\mu'} d^l_{\lambda-\lambda', \mu-\mu'}, \tag{53.9}$$

* В курсах квантовой механики показывается, что эти функции описывают движение симметричного волчка.

найдем сечение бинарной реакции для случая, когда в начальном и конечном состояниях частицы неполяризованы:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{(2j_1+1)(2j_{II}+1)}\cdot\frac{1}{p^2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_I,\lambda_{II}}\sum_{JJ'}(J+1/2)(J'+1/2)(-1)^{\lambda-\mu}\times$$

$$\times\langle\lambda_1\lambda_2|R^J|\lambda_I\lambda_{II}\rangle^*\langle\lambda_1\lambda_2|R^{J'}|\lambda_I\lambda_{II}\rangle\times$$

$$\times\sum_l\langle J\mu J'-\mu|l0\rangle\langle J\lambda J'-\lambda'|l0\rangle P_l(\cos\theta). \quad (53.10)$$

Столь же легко получаются формулы для статистических тензоров и матриц плотности. Например, матрица плотности для частицы *1* имеет вид

$$\langle\lambda_1'|\rho|\lambda_1\rangle=\frac{1}{(2j_I+1)(2j_{II}+1)}\left(\frac{1}{p}\right)^2(-1)^{\lambda_1-\lambda_1'}\sum_{JJ'l}\left(J+\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times[\pi(2l+1)]^{1/2}\sum_{\lambda_I\lambda_{II}\lambda_2}\langle\lambda_1\lambda_2|R^J|\lambda_I\lambda_{II}\rangle\langle\lambda_1'\lambda_2|R^{J'}|\lambda_I\lambda_{II}\rangle^*\times$$

$$\times\langle J\lambda_1 l0|J'\lambda_1\rangle\langle J\mu l\lambda_1'-\lambda_1|J'\mu+\lambda_1'-\lambda_1\rangle Y_{l,\lambda_1'-\lambda_1}(\theta,\varphi). \quad (53.11)$$

Сравнивая формулы (53.8) и (53.10) соответственно с формулами (44.3) и (44.7), можно оценить, насколько представление спиральностей упрощает выражение для сечений и амплитуд. В формуле (53.8) не содержится ни одного коэффициента векторного сложения. Самое существенное упрощение заключается в резком сокращении числа суммирований при переходе к представлению спиральностей. Так, в формуле (53.8) суммирование идет только по одному индексу, а в формуле (44.3) — по пяти.

Сильно упрощено выражение для сечений (53.10) и матрицы плотности. Если в выражения (44.6) и (52.7) входили коэффициенты, являющиеся функциями многих переменных и трудно поддающиеся табулированию, то в формулы (53.10) и (53.11) входят только коэффициенты векторного сложения. Это различие, очевидно, связано с тем, что отличаются параметризации S-матрицы. Иначе говоря, по-разному определены параметры, значения которых характеризуются динамикой процесса. Если ставится только задача выделения кинематических особенностей реакций, то представление спиральностей оказывается необычайно удобным. Однако в некоторых случаях желательно выделение динамических параметров в представлении, где фиксирован орбитальный момент относительного движения частиц. В этих случаях приходится пользоваться более громоздкими формулами предыдущих параграфов. Можно, однако, и в этих случаях применять представление спиральностей, имея в виду связь параметров, осуществляемую с помощью функций преобразования $\langle Jls|J\lambda_1\lambda_2\rangle$:

$$\langle\lambda_1\lambda_2|R^J|\lambda_I\lambda_{II}\rangle=$$

$$=\sum_{lsl's'}\langle\lambda_1\lambda_2 J|Jl's'\rangle\langle s'l'|R^J|sl\rangle\langle slJ|J\lambda_1\lambda_{II}\rangle.$$

Нетрудно показать, что эти функции преобразования имеют вид

$$\langle Jls|J\lambda_1\lambda_2\rangle=\left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{1/2}\langle J\lambda|l0s\lambda\rangle\langle s\lambda|j_1\lambda_1 j_2-\lambda_2\rangle. \quad (53.12)$$

Представление спиральностей обладает также тем преимуществом, что оно позволяет записать S-матрицу в инвариантном виде. Как уже отмечалось выше, S-матрица является инвариантом, она коммутирует с операторами преобразований систем координат. Однако состояния частиц задаются с помощью неинвариантных величин — векторов импульса $\mathbf{p}$, проекции спина m на ось z. В связи с этим матричные элементы S-матрицы при преобразовании систем координат преобразуются сложным образом. Для случая реакций между частицами со спином 1/2 в § 51 была построена S-матрица, которая явно инвариантна по отношению к поворотам и отражениям. И это приводило к существенным упрощениям, ибо вместо бесконечной последовательности фаз мы имели несколько скалярных функций угла рассеяния и энергии. Последнее особенно существенно для параметризации S-матрицы и для обсуждения поляризационных явлений при высоких энергиях, где фазовая параметризация оказывается неэффективной, так как необходимо учитывать очень большое число фаз.

В представлении спиральностей S-матрица имеет вид

$$\langle\lambda_1\lambda_2\mathbf{p}_f\alpha'|S|\alpha\mathbf{p}_i\lambda_1\lambda_{II}\rangle. \quad (53.13)$$

Единственными параметрами, которые изменяются при поворотах, являются $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$. Но, поскольку S-матрица инвариантна, матричные элементы (53.13) могут зависеть только от их скалярного произведения (или от угла рассеяния) и от их квадратов (или от энергии).

Иначе говоря, матричные элементы в представлении спиральностей — искомые инвариантные параметры S-матрицы. Этот результат также следует из выражения (53.8), в котором спины частиц I и II определяются в системе координат, в которой ось z направлена параллельно $\mathbf{n}$, а спины частиц *1* и *2* — в системе координат, в которой ось z направлена параллельно $\mathbf{n}'$. Причем направления осей y, y', x и x' не определяются физикой задачи. Совместим оси y и y' и направим их по направлению нормали к плоскости реакции $\mathbf{k}=[\mathbf{n},\mathbf{n}']/|[\mathbf{n},\mathbf{n}']|$. Последнее, очевидно, соответствует условию $\varphi=0$.

При таком выборе осей выражение (53.8) примет вид

$$\langle\mathbf{n}'\lambda_1\lambda_2|S|\mathbf{n}\lambda_I\lambda_{II}\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum(2J+1)(\lambda_1\lambda_2|S^J|\lambda_I\lambda_{II})\,d^J_{\lambda\mu}(\theta)=$$

$$=\langle\lambda_1\lambda_2|S(\mathbf{n},\mathbf{n}')|\lambda_1\lambda_{II}\rangle, \quad (53.14)$$

ибо $\theta=\arccos[(\mathbf{n},\mathbf{n}'')]$. Поскольку инвариантность по отношению к поворотам, а следовательно, и закон сохранения момента уже

учтены явно, то для дальнейшего упрощения S-матрицы (выделения независимых параметров) необходимо учесть другие законы сохранения. Рассмотрим инвариантность S-матрицы по отношению к отражению пространства:

$$\hat{P}\hat{S}\hat{P}^{-1} = \hat{S}. \tag{53.15}$$

Действие оператора $\hat{P}$ на вектор состояния, заданный квантовыми числами импульса $\mathbf{p}$ и проекции спина μ на ось z, как известно, имеет вид

$$\hat{P}\,|\,\mathbf{p}\mu\alpha\rangle = \eta_\alpha\,|\,-\mathbf{p}\mu\alpha\rangle, \tag{53.16}$$

где η_α не зависит от $\mathbf{p}$ и является, по определению, внутренней четностью частицы или системы. Отвлекаясь от переменных, характеризующих внутреннее состояние частиц, матрица оператора четности в $\mathbf{n}\mu$-представлении имеет, следовательно, вид

$$\delta(\mathbf{n}' + \mathbf{n})\,\delta_{\mu'\mu}. \tag{53.17}$$

Для того чтобы воспользоваться выражением (53.15), надо найти этот оператор в представлении спиральностей. Связь представления $(\mathbf{n}, \mu)$ с $(\mathbf{n}, \lambda)$ по определению спиральности дается формулой

$$|\,\mathbf{n}j\lambda\rangle = \sum_\mu D^j_{\mu\lambda}(\varphi, \vartheta, \psi)\,|\,\mathbf{n}j\mu\rangle, \tag{53.18}$$

где φ, ϑ — угловые координаты вектора $\mathbf{n}$; выбор угла ψ определяется соглашением. Следует подчеркнуть, что определение спиральности (53.18) неоднозначно (произвольность выбора ψ). В некоторых работах [35, 37] принимают $\psi = -\varphi$, а в некоторых работах [34] полагают $\psi = 0$.

Преобразуя оператор (53.17) с помощью функций $D^j_{\mu\lambda}(\varphi, \vartheta, \psi)$ в интересующее нас представление спиральностей и используя формулу

$$D^j_{\mu\lambda}(-\mathbf{n}) \equiv D^j_{\mu\lambda}(\varphi + \pi, \pi - \vartheta, \pi - \psi) =$$
$$= (-1)^{j-\lambda} D^j_{\mu-\lambda}(\varphi, \vartheta, \psi) = (-1)^{j-\lambda} D^j_{\mu-\lambda}(\mathbf{n}), \tag{53.19}$$

найдем

$$\langle\lambda'\mathbf{n}'\,|\,\hat{P}\,|\,\mathbf{n}\lambda\rangle = (-1)^{j+\lambda'}\,\delta_{\lambda_1'-\lambda}\cdot\delta(\mathbf{n}'+\mathbf{n}). \tag{53.20}$$

Соответственно результат действия оператора четности на векторы состояния запишется:

$$\hat{P}\,|\,\mathbf{p}\lambda\alpha\rangle = \eta_\alpha\cdot(-1)^{j-\lambda}\,|\,-\mathbf{p}, -\lambda, \alpha\rangle. \tag{53.21}$$

Применяя этот результат к выражению (53.15), получаем

$$\langle\lambda_1, \lambda_2, \alpha'\,|\,S(E, x)\,|\,\alpha, \lambda_1, \lambda_{II}\rangle = \eta_t(-1)^{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_{II}}\times$$

$$\times\langle-\lambda_1, -\lambda_2, \alpha'\,|\,S(E, x)\,|\,\alpha, -\lambda_I-\lambda_{II}\rangle,$$

где $x = (\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_i) = \cos\theta$ и $\eta_t = \eta_1\eta_2\eta_I\eta_{II}(-1)^{j_I+j_{II}-j_1-j_2}$. (53.22)

Здесь мы воспользовались сделанным выше замечанием о том, что матричные элементы S-матрицы зависят от векторов начального и конечного импульсов через их скалярное произведение. Кроме того, использованы равенства $(-1)^{j_i-\lambda_i} = (-1)^{-j_i+\lambda_i}$, вытекающие из целочисленности показателя степени.

Нетрудно также получить следствия закона сохранения четности в случае задания состояния квантовыми числами полного момента и спиральностей. Это проще всего сделать, подставив разложение (53.14) в соотношение (53.22):

$$\sum_J(2J+1)(\lambda_1\lambda_2\,|\,S^J\,|\,\lambda_I\lambda_{II})\,d^J_{\lambda\mu}(\varphi, \theta, 0) =$$
$$= \eta_t(-1)^{\mu-\lambda}\sum_J(2J+1)(-\lambda_1-\lambda_2\,|\,S^J\,|\,-\lambda_I-\lambda_{II})\,d^J_{-\lambda-\mu}(\varphi, \theta, 0).$$

Используя свойство симметрии d-функций (см. § 49)

$$d^j_{mm'}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{m-m'}\,d^j_{-m-m'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

и их ортогональность, находим

$$(\lambda_1, \lambda_2\,|\,S^J\,|\,\lambda_I\lambda_{II}) = \eta_t(-\lambda_1, -\lambda_2\,|\,S^J\,|\,-\lambda_1, -\lambda_{II}). \tag{53.23}$$

К этому результату можно прийти, переводя оператор четности из представления $(\lambda\mathbf{n})$ [формула (53.20)] в представление $JM\lambda$ с помощью функций преобразования (53.3) (для одной частицы) или (53.4) (для двух частиц). Это преобразование легко выполнить, если воспользоваться формулой (53.19). Мы не будем здесь проделывать это преобразование, а только приведем полезный в приложениях результат:

$$\hat{P}\,|\,JM;\,\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^{J-j_1-j_2}\,|\,JM;\,-\lambda_1-\lambda_2\rangle. \tag{53.24}$$

С помощью последнего выражения сразу получается (53.22), если учесть, что $(J - j_1 - j_2)$ — целое число.

Из формул (53.22) и (53.23) особенно наглядно следует, что учет закона сохранения четности вдвое сокращает число независимых параметров S-матрицы. Формула (53.23) имеет значение правила отбора по l в случае параметризации S-матрицы в представлении (l, J, s). Полезная особенность правила отбора (53.23) — независимость фазового множителя η_t от J и λ. Из формулы (53.22) следует, что вклады в сечение (53.7) членов с противоположными спиральностями одинаковы. Следовательно, можно сократить в два раза число членов суммы (53.7).

Следствия закона сохранения четности можно выразить в виде свойств матриц плотности и статистических тензоров. По определению матрицы плотности, например частицы 1, имеем

$$\langle \lambda_1' | \rho | \lambda_1 \rangle = \frac{1}{(2j_1+1)(2j_{II}+1)} \left(\frac{2\pi}{p_i}\right)^2 \sum_{\lambda_2 \lambda_I \lambda_{II}} (\lambda_1' \lambda_2 | S | \lambda_I \lambda_{II})^* \times$$

$$\times (\lambda_1, \lambda_2 | S | \lambda_I \lambda_{II}) \qquad (53.25)$$

Применяя к этому выражению формулу (53.22), находим

$$\langle -\lambda_1' | \rho | -\lambda_1 \rangle = (-1)^{\lambda_1' - \lambda_1} \langle \lambda_1' | \rho | \lambda_1 \rangle. \qquad (53.26)$$

Это условие означает, что некоторые из статистических тензоров равны нулю. Инвариантность по отношению к обращению времени накладывает на S-матрицу условие (35.8)

$$\hat{V}^+ \hat{S} \hat{V} = \hat{S}^T.$$

Для того чтобы воспользоваться этим условием, надо найти оператор V в представлении спиральностей. В представлении, задаваемом квантовыми числами $\mathbf{p}j\mu$, действие оператора V (как было показано в § 35) определяется соотношением

$$\hat{V} | \mathbf{p}j\mu \rangle = (-1)^{j+\mu} | -\mathbf{p}j - \mu \rangle. \qquad (53.27)$$

При переходе к другому представлению необходимо помнить, что $\hat{V}$ преобразуется не как обычный оператор, а согласно соотношению (35.16). Соответственно этому он определен с точностью до фазового множителя, не зависящего от μ. В некоторых работах фазовый множитель отличается от нашего множителем $(-1)^{2j}$.

Применяя к оператору $\hat{V}$ в представлении $\mathbf{p}j\mu$

$$\langle j\mu' \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p}j\mu \rangle = \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \cdot (-1)^{j-\mu} \delta_{-\mu', \mu} \qquad (53.28)$$

формулу (35.16), на основе (53.18) находим

$$\langle \lambda' \mathbf{p}' | V | \lambda \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \cdot \delta_{\lambda' \lambda},$$

откуда с помощью формул (35.8) и (53.14) получаем

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | S[(\mathbf{n}, \mathbf{n}')] | \lambda_I \lambda_{II} \rangle = \langle \lambda_I \lambda_{II} | S[(\mathbf{n}, \mathbf{n}')] | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

и

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | S^J | \lambda_I \lambda_{II} \rangle = \langle \lambda_I \lambda_{II} | S^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \qquad (53.29)$$

Таким образом, в представлении спиральностей теорема взаимности имеет более простой вид по сравнению с формулой (35.15).

Рассмотрение случая тождественных частиц сводится к преобразованиям оператора перестановки P_{12}. Эти преобразования совершенно аналогичны преобразованиям оператора четности и приводят к следующему результату:

$$P_{12} | JM\lambda_1 \lambda_2 \rangle = (-1)^{J-2j} | JM\lambda_2, \lambda_1 \rangle. \qquad (53.30)$$

Исходя из связи спина и статистики, симметризованное состояние следует записать так:

$$\{1 + (-1)^{2j} P_{12}\} | JM\lambda_1 \lambda_2 \rangle = | JM\lambda_1 \lambda_2 \rangle + (-1)^J | JM\lambda_2 \lambda_1 \rangle. \qquad (53.31)$$

Интересно отметить, что результирующее соотношение не зависит от типа статистики. Другой интересный вывод из выражения (53.31) состоит в том, что для нечетных J запрещены состояния $\lambda_1 = \lambda_2$.

Как уже отмечалось, одним из наиболее существенных преимуществ представления спиральностей является возможность релятивистских обобщений изложенных выше кинематических формул.

Особенностью релятивистского рассмотрения является довольно сложный характер изменения спина при преобразованиях Лоренца. Можно показать, что преобразование спина частицы при переходе от одной системы координат к другой зависит от импульса, причем спин претерпевает специфический поворот, изученный Ю. М. Широковым [38]. Изложение релятивистской теории спина выходит за рамки настоящей книги. В связи с этим приведем несколько результатов без доказательства, отсылая читателя, интересующегося обоснованием этих положений, к книгам [6, 8]:

1) состояние свободного движения частицы в релятивистской квантовой механике задается (помимо внутренних, инвариантных переменных) квантовыми числами массы, четырехмерного импульса, квадрата спина и проекций спина на ось, в частности, спиральностью;

2) преобразование Лоренца вдоль направления импульса частицы оставляет спиральность неизменной

$$\hat{\Lambda} | \mathbf{p}\lambda \rangle = | \mathbf{p}' \lambda \rangle.$$

(явный вид преобразования Лоренца нам в дальнейшем не понадобится);

3) частица произвольного спина j с массой, равной нулю, имеет только два значения спиральности $\lambda = \pm j$. Напомним, что частица с массой, не равной нулю, имеет $2j + 1$ значений λ: $j, j-1, \ldots, -j$;

4) преобразования трехмерных поворотов изменяют направление импульсов, но не меняют направления спиральностей;

5) отражение пространства меняет знак λ.

Этих положений достаточно для вывода интересующих нас релятивистских кинематических соотношений.

С помощью положения 2) можно определить состояние $| \mathbf{p}\lambda \rangle$ как результат действия преобразования Лоренца на состояние, описывающее частицу в ее системе покоя (для частиц с массой, не равной нулю). Это определение позволяет утверждать, что все формулы настоящего параграфа справедливы и в релятивистском случае. Следует оговориться, что все рассмотрение мы выше вели в системе центра инерции. Перевод S-матрицы в любую другую систему требует специальных преобразований, рассмотренных в работах [34, 38, 39]. Переход в другие движущиеся системы координ-

нат необходим при обсуждении кратных столкновений и вторичных реакций. Однако этот переход не вызывает затруднений, если совершать преобразование Лоренца вдоль импульса частицы, реакцию или распад которой мы хотим изучать. Согласно положению 2), спиральность, а следовательно, и спиновая матрица плотности в представлении спиральностей при таком преобразовании не изменяются. Это обстоятельство очень сильно упрощает кинематические расчеты.

Вектор состояния $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ нормирован следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}'\lambda' | \mathbf{p}\lambda\rangle = E\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,\delta_{\lambda'\lambda},$$

так что элемент фазового объема имеет релятивистски инвариантный вид $d\mathbf{p}/E$ (см. § 37). Для частицы с массой, равной нулю, нельзя определять состояние $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ на основе перехода к системе покоя, однако в этом случае имеется существенное упрощение: $-\lambda$ может принимать только два значения $\pm j$. Эти состояния можно связать с помощью операции отражения. Введем комбинацию из оператора отражения $\hat{P}$ и оператора поворота относительно оси y. Эта операция означает отражение в плоскости xz, обсуждавшееся выше:

$$\hat{Y} = e^{-i\pi\hat{J}_y}\hat{P}. \tag{53.32}$$

Согласно положениям 5) и 4), действие этого оператора можно записать в виде

$$\hat{Y}|\mathbf{p}j\rangle = \eta|\mathbf{p}-j\rangle. \tag{53.33}$$

По определению, η называется четностью частицы с массой, равной нулю. Например, для фотона состояния с $\lambda = \pm 1$ описываются вектор-потенциалом $A = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x \pm i\varepsilon_y)e^{ipz}$. Действие $\hat{Y}$ на A меняет знак A_y, т. е. обычное определение состояния фотона соответствует $\eta = -1$.

Таким образом, приведенные выше результаты справедливы и для частиц с массой, равной нулю. В частности, из соотношения (53.31) сразу следует запрет распада частицы со спином *1* на два фотона. В случае реакций с фотонами, как отмечалось в § 47, вместо *Jls*-представления вводят представление *Jgp* — мультипольное представление. Состояния с $p = 0$ называются состояниями магнитного типа и имеют четность $(-1)^{g+1}$, а состояния с $p = 1$ называются состояниями электрического типа и имеют четность $(-1)^g$, где g — полный момент фотона. Для связи амплитуд в представлении спиральностей с мультипольными амплитудами необходима функция преобразования:

$$\langle JM\lambda_\gamma\lambda_2 \;\; JMgp\rangle = \sum_{ls}\langle JM\lambda_\gamma\lambda_2|JMls\rangle\langle ls|gp\rangle.$$

Используя формулу (53.12) и результаты § 47, найдем

$$\langle JM\lambda_\gamma\lambda_2|JMgp\rangle = \sum_l \frac{(2l+1)^{1/2}}{(2J+1)^{1/2}}\langle l01\lambda_\gamma|g\lambda_\gamma\rangle\times$$

$$\times\langle g\lambda_\gamma j_2 -\lambda_2|-J\lambda\rangle(-1)^p(-\sqrt{2})\langle g-111|l0\rangle\delta(l,p),$$

откуда для состояний магнитного типа получаем

$$\langle JM\lambda_\gamma\lambda_2|JMg0\rangle = (-\lambda_\gamma)\sqrt{\frac{g+1}{2(2J+1)}}\langle g\lambda_\gamma j_2-\lambda_2|J\lambda\rangle, \tag{53.34}$$

а для состояний электрического типа

$$\langle JM\lambda_\gamma\lambda_2|JMg1\rangle = \sqrt{\frac{2g+1}{2(2J+1)}}\langle g\lambda_\gamma j_2-\lambda_2|J\lambda\rangle. \tag{53.34a}$$

Здесь было использовано то обстоятельство, что спиральность фотона может принимать два значения $\lambda_\gamma = \pm 1$. Применение представления спиральностей к процессам физики электромагнитных взаимодействий проиллюстрировано в следующем параграфе.

Поскольку S-матрица в представлении спиральностей при переходе из одной инерциальной системы координат в другую требует специальных преобразований, то для ряда задач оказывается очень полезной релятивистски инвариантная параметризация S-матрицы.

Широко применяется релятивистская параметризация S-матрицы, основанная на свойствах матриц Дирака γ_μ. Этот метод параметризации — естественное обобщение метода, изложенного в § 51. S-матрица записывается в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_I-p_{II})\left(\frac{m^2}{4E_1E_2E_IE_{II}}\right)^{1/2}F_{fi},$$

где F_{fi} — релятивистски инвариантная матрица. Энергетические знаменатели выделены в соответствии с § 37, а числовые множители выбраны так, чтобы F_{fi} совпадали с амплитудами, встречающимися в теории поля. Частицы *1* и I обладают спином 1/2, а спины частиц *2* и II пока не фиксируем. Поскольку матрица F_{fi} — четырехмерный скаляр, то, согласно теории Дирака, для частицы со спином 1/2 она должна иметь вид

$$\bar{u}_f(p_1)\sum_i A_i B_i(p,\xi)\cdot u(p_1), \tag{53.35}$$

где $u(p_j)$ — решение уравнения Дирака

$$(i\gamma\cdot p_j + M_j)u_j = 0. \tag{53.36}$$

Принимается нормировка $\bar{u}u = 1$, A_i — скаляры, не зависящие от спиновых переменных; B_i зависят от векторов импульса и спиновых переменных ξ. Если выделить среди спиновых переменных пере-

менные частиц *1* и I, то B_i можно разложить по матрицам Дирака: *1*, $i\gamma_\mu$, γ_5, $i\gamma_\mu\gamma_5$ и $\gamma_\mu\gamma_\nu$. Аналогично тому, как в § 51 была разложена *S*-матрица по матрицам Паули. Зависимость B_i от импульсов обычно задают с помощью следующих четырехмерных векторов:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(p_1 + p_1); \quad Q = \frac{1}{2}(p_{11} - p_2); \\ K &= \frac{1}{2}(p_{11} + p_2); \quad P' = P - \frac{P\cdot K}{K^2} K; \end{aligned}\right\} \tag{53.37}$$

$$N_\mu = i\varepsilon_{\mu\nu\varphi\sigma} P'_\nu K_\varphi Q_\sigma,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\varphi\sigma}$ — полностью антисимметричный единичный тензор. Отдельного рассмотрения требует зависимость от спиновых переменных. Рассмотрим сначала рассеяние бесспиновой частицы на частице со спином 1/2 (т. е. $j_2 = j_{11} = 0$).

Скаляр B_i будет иметь вид $C_i^\nu(p)\cdot D_i^\nu(\xi)$, где $C_i^\nu(p)$ зависит только от переменных (53.37), а $D_i^\nu(\xi)$ — комбинация матриц Дирака, причем следует учитывать уравнение (53.36). Это означает, что те из скаляров B_i, которые содержат $i\gamma\cdot p_1$ или $i\gamma\cdot p_1$, могут быть упрощены. Упрощение достигается коммутацией множителей $i\gamma\cdot p_1$ или $i\gamma\cdot p_{11}$ в крайнее левое или крайнее правое положение внутри B_i так, чтобы они действовали на спиноры $\bar{u}_1$ или $\bar{u}_1$. То же самое относится к скалярам B_i, содержащим $iQ\gamma$, ибо $p_{11} - p_2 = p_1 - p_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае F_{fi} должна иметь вид

$$\bar{u}(p_1)\left[A_1 + i\gamma\cdot KA_2\right] u(p_1), \tag{53.38}$$

где A_1 и A_2 — функции четырехмерных скалярных произведений импульсов. Для бинарных реакций в качестве таких скаляров обычно выбирают

$$\left.\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_{11})^2; \\ t &= -(p_{11} - p_2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{53.39}$$

Остальные скаляры выражают через (53.39) и квадраты масс частиц. Выражение (53.38) осуществляет релятивистски инвариантную параметризацию *S*-матрицы.

Рассмотрим релятивистскую параметризацию *S*-матрицы для процессов фоторождения псевдоскалярных мезонов. В отличие от предыдущего, B_i должно содержать вектор поляризации фотона ε, причем матричные элементы *S*-матрицы должны быть линейны по ε. Независимыми скалярами, включающими вектор ε, являются $\gamma\cdot\varepsilon$, $P\cdot\varepsilon$ и $q\cdot\varepsilon$, ибо $k\cdot\varepsilon = 0$. Здесь и в дальнейшем обозначим $p_2 = q$ — 4— импульс мезона, а $p_{11} = k$ — импульс фотона. Скаляр B_i должен содержать линейно $\gamma\cdot k$. Так как $\gamma\cdot k$ антикоммутирует $\gamma\cdot\varepsilon$, то все множители $\gamma\cdot k$ можно собрать вместе и получить или нуль, или первую степень этого выражения. Кроме того, необходимо учесть

градиентную инвариантность. Это можно сделать, произведя формальную замену $\varepsilon_\mu \to k_\mu$ в F_{fi}; результат такой замены должен равняться нулю.

Окончательное выражение для инвариантно параметризованной *S*-матрицы фоторождения псевдоскалярных мезонов имеет вид

$$F_{fi} = \bar{u}(p_1)\gamma_5\{A_1 i\gamma\cdot\varepsilon\gamma\cdot k + A_2 2i[P\cdot\varepsilon q\cdot k - P\cdot kq\cdot\varepsilon] + A_3[\gamma\cdot\varepsilon q\cdot k -$$

$$-\gamma\cdot kq\cdot\varepsilon] + A_4 2[\gamma\cdot\varepsilon P\cdot k - \gamma\cdot kP\cdot\varepsilon - iM\gamma\cdot\varepsilon\gamma\cdot k]\} u(p_1), \tag{53.40}$$

где A_1, A_2, A_3 и A_4 — релятивистски инвариантные функции. Они зависят от квадратов четырехмерных векторов

$$s = -(p_1 + k)^2 \quad \text{и} \quad t = -(q - k)^2.$$

Чтобы получить релятивистскую параметризацию фоторождения векторных мезонов, помимо вектора поляризации фотона ε необходимо еще учесть вектор поляризации векторного мезона η. Инвариантную амплитуду можно записать в виде

$$\bar{u}(p_1)\eta_\mu \sum_{ij} A_{ij}[C_i(p) D_j(\xi)]_{\mu\nu}\varepsilon_\nu u(p_1). \tag{53.41}$$

Оператор $D_j(\xi)$ опять разложим по матрицам Дирака. Параметризация *S*-матрицы для рассматриваемого случая тесно связана с параметризацией *S*-матрицы для комптон-эффекта. Отличие состоит лишь в том, что масса векторного мезона отлична от нуля и возможна его продольная поляризация, поэтому разделим поляризацию мезона η_μ на продольную и поперечную части: τ_μ — поперечная часть, λ_μ — продольная.

Вектор η_μ удовлетворяет условиям*

$$\eta^2 = 1; \quad \eta\cdot q = 0. \tag{53.42}$$

τ_μ разложим на $\eta_\mu^{(1)}(q)$ и $\eta_\mu^{(2)}(q)$ — ортогональные единичные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{q}$, и имеющие четвертую компоненту, равную нулю $\tau_\mu = (\boldsymbol{\eta}_\mu^{(1,\,2)}, 0)$; λ_μ — вектор, направленный по импульсу $\mathbf{q}$ $\lambda_\mu \equiv \eta_\mu^{(3)}(q)$. Из условий (53.42) найдем, что λ_μ имеет следующие компоненты:

$$\lambda_\mu \equiv \left(\frac{\omega\boldsymbol{\varkappa}}{m}, \frac{q}{m}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\varkappa} = \dfrac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$; m — масса векторного мезона. Условия (53.42) можно записать также в виде соотношений

$$\sum_{s=1}^{3} \eta_\mu^{(s)}(q)\,\eta_\nu^{(s)}(q) = \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}.$$

* См., например, книгу [10].

Напомним, что для поляризаций фотона имеет место соотношение

$$\sum_{s=1}^{2} \varepsilon_i^{(s)}(\mathbf{k})\,\varepsilon_j^{(s)}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Релятивистски инвариантная параметризация амплитуды F_{ij} для фоторождения векторных мезонов на нуклонах имеет вид

$$\bar{u}(p_1)\left[\frac{\varepsilon\cdot P'\tau\cdot P'}{P'^2}(A_1+i\gamma\cdot KA_2)+\frac{\varepsilon\cdot N\tau\cdot N}{N^2}(A_3+i\gamma\cdot KA_4)+\right.$$

$$+\frac{\tau\cdot P'\varepsilon\cdot N-\tau\cdot N\varepsilon\cdot P'}{\sqrt{P'^2N^2}}\gamma_5(A_5+i\gamma\cdot KA_6)+\frac{\tau\cdot P'\varepsilon\cdot N+\tau\cdot N\varepsilon\cdot P'}{\sqrt{P'^2N^2}}\gamma_5(A_7+i\gamma\cdot KA_8)+$$

$$\left.+\frac{\lambda_0\frac{m}{q}\varepsilon P'}{\sqrt{P'^2}}(A_9+i\gamma\cdot KA_{10})+\frac{\lambda_0\frac{m_\nu}{q}\varepsilon N}{\sqrt{N^2}}\gamma_5(A_{11}+i\gamma\cdot KA_{12})\right]u(p_1). \tag{53.43}$$

Из формулы (53.43) легко получается релятивистски инвариантная параметризация амплитуды F_{ij} для γN-рассеяния. Для этого надо заменить $\tau \to \varepsilon'$ (ε' — вектор поляризации рассеянного фотона) и положить равными нулю члены с продольной поляризацией. Если потребовать инвариантности по отношению к обращению времени, то амплитуда F_{ij} для γN-рассеяния примет вид

$$\bar{u}(p_1)\left\{\frac{\varepsilon'\cdot P'\varepsilon\cdot P'}{P'^2}[A_1+i\gamma\cdot KA_2]+\frac{\varepsilon'\cdot N\varepsilon\cdot N}{N^2}[A_3+i\gamma\cdot KA_4]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\varepsilon'\cdot P'\varepsilon\cdot N-\varepsilon'\cdot N\varepsilon\cdot P'}{\sqrt{P'^2N^2}}i\gamma_5\cdot A_5+\frac{\varepsilon'\cdot P'\varepsilon\cdot N+\varepsilon'\cdot N\varepsilon\cdot P'}{\sqrt{P'^2N^2}}\gamma_5\gamma\cdot KA_6\right]\right\}u(p_1). \tag{53.44}$$

Таким образом, требование инвариантности по отношению к обращению времени уменьшает число независимых скалярных функций, с 8 до 6. Релятивистски инвариантную параметризацию F_{fi} для рассеяния нуклона на нуклоне записывают [40] в виде

$$A_1(S-\tilde{S})+A_2(T+\tilde{T})+A_3(A-\tilde{A})+$$

$$+A_4(V+\tilde{V})+A_5(P-\tilde{P}). \tag{53.45}$$

Принятые обозначения аналогичны используемым в теории β-распада:

$$\left.\begin{aligned}
S &= \bar{u}(p_2)\,u(p_{11})\,\bar{u}(p_1)\,u(p_1);\\
T &= \frac{1}{2}\,\bar{u}(p_2)\,\sigma_{\mu\nu}u(p_{11})\,\bar{u}(p_1)\,\sigma_{\mu\nu}u(p_1);\\
A &= \bar{u}(p_2)\,i\gamma_5\gamma_\mu u(p_{11})\,\bar{u}(p_1)\,i\gamma_5\gamma_\mu u(p_1);\\
V &= \bar{u}(p_2)\,\gamma_\mu u(p_{11})\,\bar{u}(p_1)\,\gamma_\mu u(p_1);\\
P &= \bar{u}(p_2)\,\gamma_5 u(p_{11})\,\bar{u}(p_1)\,\gamma_5 u(p_1),
\end{aligned}\right\} \tag{53.46}$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{T}$ и т. д. получаются из A, T и т. д. заменой $\bar{u}(p_2) \rightleftarrows \bar{u}(p_1)$. Приведем матрицу, связывающую эти инварианты:

$$\begin{pmatrix}\tilde{S}\\ \tilde{V}\\ \tilde{T}\\ \tilde{A}\\ \tilde{P}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4\\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6\\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\ V\\ T\\ A\\ P\end{pmatrix}.$$

Мы всюду опускали изотопические переменные, включение которых очевидно. Например, для N — N-рассеяния каждая из инвариантных амплитуд A_i разбивается на

$$A_i^0\,\frac{(1-\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)}{4}+A_i^1\,\frac{3+\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}{4},$$

где τ — обычные операторы изоспина. Учет принципа Паули в случае N — N-рассеяния означает наложение требования

$$A_i^T(s,\bar{t},t) = (-1)^{i+T}A_i^T(s,t,\bar{t}). \tag{53.47}$$

Здесь $\bar{t} = -(p_1-p_2)^2$, причем $s+t+\bar{t}=4m^2$, m — масса нуклона; s и t определяются формулой (53.39).

§ 54. СВЯЗЬ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ S-МАТРИЦЫ. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ НА ПРАКТИКЕ ПРИМЕРЫ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ. РАСПАДЫ

Как было показано выше, разделение свойств ядерных реакций на свойства, вытекающие из законов сохранения, и свойства, определяющиеся динамикой процессов, находят свое выражение в параметризации S-матрицы. Обсуждались три основных типа параметризации:

а) параметризация S-матрицы в представлении Jls, в котором явно выделен орбитальный момент l. Это представление удобно в тех случаях, когда участвующие в реакции частицы достаточно медленны, чтобы центробежный барьер обеспечил быструю сходимость разложения S-матрицы по степеням $\cos^l\theta$. Оно часто используется в ядерной физике;

б) параметризация S-матрицы в представлении спиральностей оказывается наиболее удобной в применениях релятивистской кинематики, для рассмотрения вторичных реакций (особенно распадов нестабильных частиц). Эта параметризация имеет целый ряд преимуществ и находит все более широкое применение. Основное достоинство этой параметризации состоит в простоте формул и в отсутствии необходимости табулирования сложных коэффициентов, являющихся функциями многих переменных. Она допускает очевидные обобщения аппарата на случаи реакций частиц с массой, равной нулю, и на случаи реакций с участием многих частиц;

в) параметризация S-матрицы с помощью инвариантных выражений, включающих операторы спина и поляризации частиц, как было показано в §51, 53, эффективна для обсуждения кинематических соотношений в случае реакций с участием частиц со спином 1/2. Кроме того, явно релятивистски инвариантная параметризация S-матрицы очень полезна в целом ряде теоретических вопросов, особенно в приложениях дисперсионных соотношений.

Таким образом, все перечисленные способы параметризации находят применение. Обсудим связь между ними. Связь S-матрицы, заданной в представлении спиральностей, с S-матрицей, заданной в представлении Jls, осуществляется с помощью функций преобразования $\langle JMLs|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$, которые обсуждались выше. Упрощение полученных в результате преобразования формул фактически сводится к упрощению сумм произведений коэффициентов векторного сложения. Специального рассмотрения заслуживает связь S-матрицы, параметризованной через релятивистские инварианты, с S-матрицей в представлении спиральностей. Чтобы получить ее, необходимо вычислить матричные элементы инвариантных амплитуд по состояниям с определенными проекциями спинов — спиральностями в системе центра инерции. Спинор Дирака, описывающий состояние с определенной спиральностью λ, имеет вид

$$u_\lambda(p) = N\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{2p\lambda}{E+m} \end{pmatrix}\chi_\lambda, \qquad (54.1)$$

где χ_λ — спинор Паули; он описывает состояние с определенной проекцией спина на ось z, в качестве которой выбрано направление импульса частицы; $N = \sqrt{\dfrac{E+m}{2m}}$ — нормировка. Спинор конечного состояния задан также спиральностью, т. е. проекцией спина на направление импульса частицы конечного состояния. Эти спиноры заданы в системах координат, отличающихся поворотом вокруг оси y (ось y направлена по нормали к плоскости реакции) на угол θ (угол рассеяния). Для того чтобы спиноры были заданы в одной системе координат, необходимо сделать поворот. Поэтому спинор Дирака в конечном состоянии запишется так:

$$u_{\lambda'}(p') = N'\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{2p'\lambda'}{E'+m'} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\chi_{\lambda'}. \qquad (54.2)$$

Рассмотрим для простоты задачу упругого рассеяния, когда $m' = m$, $p' = p$, $E' = E$.

Представление матриц Дирака (см., например, [10]) выберем так, что $\gamma_0 = \rho_3$, $\boldsymbol{\gamma} = \rho_2\boldsymbol{\sigma}$; $\gamma_5 = -\rho_1$. Простое вычисление дает:

$$\bar{u}_{\lambda'}u_\lambda = \frac{1}{2m}[(E+m) - 4\lambda\lambda'(E-m)]\left(\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\chi_\lambda\right);$$

$$\bar{u}_{\lambda'}\gamma_5 u_\lambda = \frac{p}{m}(\lambda' - \lambda)\left(\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\chi_\lambda\right);$$

$$\bar{u}_{\lambda'}\gamma_5\gamma_4 u_\lambda = \frac{p}{m}(\lambda' + \lambda)\left(\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\chi_\lambda\right);$$

$$\bar{u}_{\lambda'}\gamma_5\boldsymbol{\gamma}u_\lambda = -\frac{i}{2m}[(E+m) + 4\lambda\lambda'(E-m)]\left(\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\boldsymbol{\sigma}\chi_\lambda\right) \qquad (54.3)$$

и

$$\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}\chi_\lambda = |\lambda' + \lambda|\cos\theta/2 + (\lambda' - \lambda)\sin\theta/2;$$

$$\chi^+_{\lambda'}e^{i\frac{\sigma_y}{2}\theta}(\mathbf{a},\boldsymbol{\sigma})\chi_\lambda = (\lambda' + \lambda)[a_z\cos\theta/2 + i(\lambda' + \lambda)a_y\sin\theta/2 +$$

$$+ a_x\sin\theta/2] - |\lambda' - \lambda|[a_z\sin\theta/2 + i(\lambda' - \lambda)a_y\cos\theta/2 + a_x\cos\theta/2], \qquad (54.4)$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор.

Вычисления других матричных элементов можно избежать, если воспользоваться соотношениями

$$V + \tilde{V} = S + \tilde{S} - P - \tilde{P}; \quad T + \tilde{T} = S + \tilde{S} + P + \tilde{P}$$

[обозначения те же, что и в выражении (53.46)]. С помощью формул (54.3) и (54.4) нетрудно найти связь амплитуд в представлении спиральностей с инвариантными амплитудами.

Для матрицы

$$\langle\lambda_1\lambda_2|R|\lambda_I\lambda_{II}\rangle = \frac{1}{p}\sum_J(2J+1)\langle\lambda_1\lambda_2|R^J|\lambda_I\lambda_{II}\rangle d^J_{\lambda\mu}(\theta)$$

в задаче N — N-рассеяния, исходя из формул (53.45), (53.46) 54.3) и (54.4), можно получить:

$$R_1 = \langle++|R|++\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi E}\{m^2[A_1 + (A_2 + A_4)\cos\theta] - (3E^2 + p^2)A_3\}; \qquad (54.5a)$$

$$R_2 = \langle++|R|--\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi E}\{-E^2A_1 + [(E^2+p^2)A_2 + m^2A_4]\cos\theta + 3m^2A_3 - p^2A_5\}; \quad (54.5б)$$

$$R_3 = \langle + - | R | + - \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi E}\{2m^2A_2 + 2E^2A_4 + p^2(-A_1 + 2A_3 + A_5)\}\cos^2\theta/2; \quad (54.5в)$$

$$R_4 = \langle + - | R | - + \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi E}\{2m^2A_2 + 2E^2A_4 - p^2(-A_1 + 2A_3 + A_5)\}\sin^2\theta/2; \quad (54.5г)$$

$$R_5 = \langle + + | R | + - \rangle = -m(A_2 + A_4)\sin\theta. \quad (54.5д)$$

Здесь символ «+» означает $+1/2$; «—» означает $-1/2$.

Амплитуды $\langle \lambda_1\lambda_2 | R^J | \lambda_I \lambda_{II}\rangle$ удовлетворяют ряду соотношений:

а) сохранение четности (53.23) дает

$$\langle \lambda_1\lambda_2 | R^J | \lambda_I\lambda_{II}\rangle = \langle -\lambda_1 -\lambda_2 | R^J | -\lambda_I - \lambda_{II}\rangle;$$

б) из инвариантности по отношению к обращению времени (53.29)

$$\langle \lambda_1\lambda_2 | R^J | \lambda_I\lambda_{II}\rangle = \langle \lambda_1\lambda_{II} | R^J | \lambda_1\lambda_2\rangle;$$

в) сохранение полного спина (см. § 51) дает

$$\langle \lambda_1\lambda_2 | R^J | \lambda_I\lambda_{II}\rangle = \langle \lambda_2\lambda_1 | R^J | \lambda_{II}\lambda_I\rangle;$$

г) ограничения, налагаемые принципом Паули, следуют из (53.47) и (54.5):

$$R_1(\pi-\theta) = (-1)^{T+1}R_1(\theta);$$
$$R_2(\pi-\theta) = (-1)^{T+1}R_2(\theta);$$
$$R_3(\pi-\theta) = (-1)^{T}R_4(\theta);$$
$$R_5(\pi-\theta) = (-1)^{T}R_5(\theta).$$

Используя соотношение

$$d^J_{\lambda\mu}(\theta) = (-1)^{J+\lambda}d^J_{\lambda-\mu}(\pi-\theta),$$

нетрудно получить соотношения для амплитуды $\langle \lambda_1\lambda_2 | R^J | \lambda_I\lambda_{II}\rangle$:

$$\langle + + | R^J | \pm\pm\rangle = (-1)^{J+T+1}\langle + + | R^J | \pm\pm\rangle;$$
$$\langle + - | R^J | + - \rangle = (-1)^{J+T+1}\langle + - | R^J | - + \rangle;$$
$$\langle + + | R^J | + - \rangle = (-1)^{J+T+1}\langle + + | R^J | + - \rangle.$$

Использованные состояния не являются собственными состояниями оператора четности и суммарного спина. Можно, однако, ввести линейные комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|J++\rangle \pm |J--\rangle) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|J+-\rangle \pm |J-+\rangle).$$

Первая из них с верхним знаком соответствует четности $(-1)^{J-1}$, а остальные $(-1)^J$. Причем первая комбинация со знаком минус образует синглетное состояние, а остальные комбинации — триплетное состояние. Таким образом, получаем амплитуды с полным моментом J и определенной величиной суммарного спина s R^{Js}:

синглет $R^{J0} = \langle + + | R^J | + + \rangle - \langle + + | R^J | - - \rangle;$

триплет $(J = l)\, R^{J1} = \langle + - | R^J | + - \rangle - \langle + - | R^J | - + \rangle;$

триплет $J = l \pm 1$
$$\begin{cases} R^{J1}_{11} = \langle + + | R^J | + + \rangle + \langle + + | R^J | - - \rangle; \\ R^{J1}_{12} = 2\langle + + | R^J | + - \rangle; \\ R^{J1}_{22} = \langle + - | R^J | + - \rangle + \langle + - | R^J | - + \rangle, \end{cases}$$

т. е. приходим к результатам, обсуждавшимся в § 40.

Рассмотрим теперь случай, когда спин частиц 2 и II равен нулю (πN-рассеяние). S-матрица $\langle \lambda_1 | S^J | \lambda_I\rangle$ является теперь двухрядной, причем в силу закона сохранения четности (53.23) независимыми являются только два ее элемента, например $\langle + | S^J | + \rangle$ и $\langle + | S^J | - \rangle$.

Связь матрицы $\langle \lambda_1 | S^J | \lambda_I\rangle$ с S-матрицей в представлении Jls осуществляется функциями преобразования $\langle JMls | JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ [формула (53.12)] и в рассматриваемом случае сводится к

$$\left.\begin{aligned} \langle + | S^J | + \rangle = \langle - | S^J | - \rangle &= \frac{1}{2}(e^{2i\delta_{l+}} + e^{2i\delta_{(l+1)-}}); \\ \langle + | S^J | - \rangle = \langle - | S^J | + \rangle &= \frac{1}{2}(e^{2i\delta_{l+}} - e^{2i\delta_{(l+1)-}}), \end{aligned}\right\} \quad (54.6)$$

где $\delta_{l\pm}$ — фазы рассеяния в состояниях $(l,\ J = l \pm 1/2)$.

Рассеяние обычно описывается парциальными амплитудами, которые определяются выражением

$$f_{l\pm} = \frac{1}{p}e^{i\delta_{l\pm}}\sin\delta_{l\pm}. \quad (54.7)$$

Подставляя формулы (54.6) и (54.7) в выражение (53.8) и используя формулы

$$d^J_{1/2\,1/2} = (l+1)^{-1}\cos\frac{\theta}{2}\,(P'_{l+1} - P'_l)^*;$$
$$d^J_{-1/2\,1/2} = (l+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\,(P'_{l+1} + P'_l),$$ (54.8)

находим

$$f_{++} = \cos\frac{\theta}{2}(f_1+f_2); \quad f_{+-} = \sin\frac{\theta}{2}(f_1-f_2),$$ (54.9)

где введены обозначения

$$f_1 = \sum_l (f_{l+}P'_{l+1} - f_{l-}P'_{l-1});$$
$$f_2 = \sum_l (f_{l-} - f_{l+})P'_l.$$ (54.10)

Связь f_{++} и f_{+-} с инвариантными амплитудами A_1 и A_2 получим, если перейдем в формуле (53.38) от спиноров Дирака к спинорам Паули определенной спиральности на основе (54.1) и (54.2). Результат этого перехода запишем для f_1 и f_2:

$$f_1 = \frac{E+M}{8\pi W}[A_1 + (W-M)A_2];$$
$$f_2 = \frac{E-M}{8\pi W}[-A_1 + (W+M)A_2].$$ (54.11)

Здесь W — полная энергия в системе центра инерции $W = \sqrt{\mathbf{P}^2+M} + \sqrt{\mathbf{P}^2+\mu^2}$; M и μ — массы нуклона и мезона соответственно, $E = \sqrt{\mathbf{P}^2+M^2}$.

Иногда полезны следующие соотношения:

$$f_{l\pm} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} d\cos\theta\,(P_l f_1 + P_{l\pm1} f_2)$$

или через инвариантные амплитуды:

$$f_{l\pm} = \frac{1}{16\pi W}\{(E+M)[A^{(1)}_l + (W-M)A^{(2)}_l] +$$
$$+ (E-M)[-A^{(1)}_{l\pm1} + (W-M)A^{(2)}_{l\pm1}]\},$$

где

$$A^{(i)}_l(s) = \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, A_i(s,t)\cdot P_l(\cos\theta).$$

* Здесь P'_l означает производную от полинома Лежандра $dP_l/d\cos\theta$.

В случае процессов фоторождения псевдоскалярных мезонов целесообразно ввести такие линейные комбинации состояний с определенной спиральностью, которые являются собственными состояниями оператора четности. В матричных элементах S-матрицы будем указывать суммарную спиральность:

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_\gamma = \pm 1/2; \quad \pm 3/2;$$
$$\mu = \lambda_1 = \pm\frac{1}{2}.$$ (54.12)

Эти квантовые числа однозначно фиксируют спиральности отдельных частиц. Принимая $\eta_p = \eta_n\,\eta_\gamma = \eta_\pi = -1$ и учитывая результат действия оператора четности (53.24) на вектор состояния $|JM\lambda\rangle$, найдем, что линейные комбинации

$$|JM\lambda_1\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|JM\lambda\rangle \pm |JM-\lambda\rangle];$$
$$|JM\mu\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|JM\mu\rangle \pm |JM-\mu\rangle]$$ (54.13)

являются собственными векторами оператора четности P^*:

$$P|JM\lambda\pm\rangle = \pm(-1)^{J-1/2}|JM\lambda\pm\rangle;$$
$$P|JM\mu\pm\rangle = \pm(-1)^{J-3/2}|JM\mu\pm\rangle.$$ (54.14)

Введем определения

$$R^{J+}_{\lambda\mu} = \langle JM\mu - |R|JM\lambda + \rangle;$$
$$R^{J-}_{\lambda\mu} = \langle JM\mu + |R|JM\lambda - \rangle.$$ (54.15)

Остальные две амплитуды в силу закона сохранения четности равны нулю.

Амплитуды (54.15) связаны с амплитудами $R^J_{\lambda\mu} = \langle JM\mu|R|JM\lambda\rangle$ соотношениями

$$R^{J\pm}_{\lambda\mu} = R^J \pm R^J_{-\lambda\mu}.$$ (54.16)

Из этих соотношений и закона сохранения четности

$$R^J_{-\lambda-\mu} = -R^J_{\lambda\mu}$$ (54.17)

найдем

$$R^{J\pm}_{-\lambda-\mu} = -R^{J\pm}_{\lambda\mu} \quad R^{J\pm}_{-\lambda\mu} = \pm R^{J\pm}_{\lambda\mu};$$
$$R^{J\pm}_{\lambda-\mu} = \mp R^{J\pm}_{\lambda\mu}.$$ (54.18)

* Обращаем внимание на то, что $|JM\lambda\pm\rangle$ и $|JM\mu\pm\rangle$ не являются состояниями с определенным значением спиральности.

Иначе говоря, можно выбрать четыре независимые амплитуды $R^{J+}_{3/2\,1/2}$, $R^{J-}_{3/2\,1/2}$, $R^{J+}_{1/2\,1/2}$, $R^{J-}_{1/2\,1/2}$, а остальные через них выразить с помощью соотношений (54.18). Второй нижний индекс $y^{\pm}_{\lambda}$ этих амплитуд одинаковый, и его можно опустить, введя обозначение

$$R^{J\pm}_{\lambda} \equiv R^{J\pm}_{\lambda\,1/2}. \tag{54.19}$$

Амплитуды, соответствующие состояниям с определенной полной четностью, запишутся:

$$\left.\begin{aligned} P &= +1;\ R^{1/2+}_{\lambda};\ R^{3/2-}_{\lambda};\ R^{5/2+}_{\lambda};\ R^{7/2-}_{\lambda};\ \ldots \\ P &= -1;\ R^{1/2-}_{\lambda};\ R^{3/2+}_{\lambda};\ R^{5/2-}_{\lambda};\ R^{7/2+}_{\lambda};\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{54.20}$$

Связь амплитуд с мультипольными амплитудами найдем с помощью функций преобразования (53.34). В теории фоторождения мезонов мультипольные амплитуды принято определять следующим образом: $E_{l\pm}$ — амплитуды электрического типа, $M_{l\pm}$ — амплитуды магнитного типа, индекс l означает орбитальный момент π-мезона, вылетающего в результате реакции. Полный момент системы J связан с l; $J=l\pm 1/2$, индекс «+» у мультипольной амплитуды соответствует состоянию $J = l + 1/2$, а индекс «—» состоянию $J = l - 1/2$.

Связь амплитуд (54.20) с амплитудами $M_{l\pm}$, $E_{l\pm}$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\, R^{J-}_{3/2} &= [l(l+2)]^{1/2}[E_{l+} - M_{l+}]; \\ \sqrt{2}\, R^{J+}_{3/2} &= -[l(l+2)]^{1/2}[M_{(l+1)-} + E_{(l+1)-}]; \\ \sqrt{2}\, R^{J-}_{1/2} &= (l+2)E_{l+} + lM_{l+}; \\ \sqrt{2}\, R^{J+}_{1/2} &= -(l+2)M_{(l+1)-} + lE_{(l+1)-}. \end{aligned}\right\} \tag{54.21}$$

При анализе фоторождения псевдоскалярных мезонов наряду с релятивистски инвариантной параметризацией (53.40) применяется параметризация, использованная в § 51. Связь этих параметризаций нетрудно получить, если в (53.40) перейти от спиноров Дирака u к спинорам Паули χ:

$$u = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma\mathbf{p}}{E+M} \end{pmatrix} \chi. \tag{54.22}$$

Подставляя это выражение для спиноров в формулу (53.40) и используя явный вид матриц Дирака, находим

$$F = \chi^{+}_{f}\left[i(\sigma\varepsilon)F_1 + \frac{(\sigma q)(\sigma[k\varepsilon])}{qk}F_2 + i\frac{(\sigma k)(q\varepsilon)}{qk}F_3 + i\frac{(\sigma q)(q\varepsilon)}{q^2}F_4\right]\chi_i. \tag{54.23}$$

Амплитуды F_i следующим образом связаны с инвариантными амплитудами A_i:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= N\left[A_1 + (W-M)A_4 - \frac{t-\mu^2}{(W-M)\cdot 2}(A_3 - A_4)\right]; \\ F_2 &= N\frac{q}{M+E_1}\left[-A_1 + (W+M)A_4 - \frac{t-\mu^2}{2(W+M)}(A_3 - A_4)\right]; \\ F_3 &= Nq[(W-M)A_2 + A_3 - A_4]; \\ F_4 &= N\frac{q^2}{M+E_1}[-(W+M)A_2 + A_3 - A_4]. \end{aligned}\right\} \tag{54.24}$$

Здесь общий множитель

$$N = \frac{W-M}{8\pi W}\sqrt{(M+E_1)(M+E_1)}\,;$$

M — масса нуклона; μ — масса π-мезона; $W = \sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2} + \sqrt{\mathbf{q}^2+M^2}$ — полная энергия в системе центра инерции: A_i — функции инвариантов s и t (53.39). В системе центра инерции:

$$s = W^2;\ t = \mu^2 - 2k\left(\sqrt{\mu^2+\mathbf{q}^2} - \mathbf{q}\cos\theta\right).$$

В применениях амплитуд (54.24) полезны формулы

$$k = \frac{W^2 - M^2}{2W};$$

$$\sqrt{q^2+\mu^2} = \frac{W^2 - M^2 + \mu^2}{2W}.$$

Связь амплитуд (54.24) с мультипольными амплитудами имеет вид

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \sum_{l=1}^{\infty}\left\{[lM_{l+} + E_{l+}]P'_{l+1}(\cos\theta) + [(l+1)M_{l-} + E_{l-}]P'_{l-1}(\cos\theta)\right\}; \\ F_2 &= \sum_{l=1}^{\infty}[(l+1)M_{l+} + lM_{l-}]P'_{l}(\cos\theta); \\ F_3 &= \sum_{l=1}^{\infty}\left\{[E_{l+} - M_{l+}]P''_{l+1}(\cos\theta) + [E_{l-} + M_{l-}]P''_{l-1}(\cos\theta)\right\}; \\ F_4 &= \sum_{l=1}^{\infty}[M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}]P''_{l}(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{54.25}$$

Дифференциальное сечение фоторождения π-мезонов, выраженное через амплитуды F_i, нетрудно получить из (54.23):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q}{k}\left\{|F_1|^2 + |F_2|^2 - 2\mathrm{Re}\, F_1^* F_2 \cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin^2\theta\,[|F_3|^2 + |F_4|^2 + 2\mathrm{Re}\, F_2^* F_3 + 2\mathrm{Re}\, F_1^* F_4 + 2\mathrm{Re}\, F_3^* F_4 \cos\theta]\right\}. \quad (54.26)$$

Эффекты, связанные с фоторождением мезонов на поляризованных нуклонах и поляризацией нуклонов отдачи, обсуждались в § 51. Явное выражение для использовавшихся в § 51 параметров K и L сразу следует из соотношения (54.23).

Представление спиральностей очень удобно для изучения поляризационных явлений. Определим амплитуды фоторождения мезонов следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H^{\pm} &= \langle \lambda_1 = +1/2\,|\,S(W,\ \cos\theta)\,|\,\lambda_\gamma = \pm 1,\ \lambda_1 = +1/2\rangle; \\ \Phi^{\pm} &= \langle \lambda_1 = +1/2\,|\,S(W,\ \cos\theta)\,|\,\lambda_\gamma = \pm 1,\ \lambda_1 = -1/2\rangle. \end{aligned}\right\} \quad (54.27)$$

Поляризация нуклонов отдачи имеет вид

$$P = \frac{1}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\,\mathrm{Im}\,[\Phi^{-*} H^{+} + \Phi^{+*} H^{-}].$$

Дифференциальное сечение рождения мезонов циркулярно поляризованными фотонами запишется:

$$\frac{d\sigma^{\pm}}{d\Omega} = \frac{q}{k}\,[\,|H^{\pm}| + |\Phi^{\pm}|\,],$$

а сечение в случае неполяризованных фотонов:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma^{+}}{d\Omega} + \frac{d\sigma^{-}}{d\Omega}\right).$$

Матрица плотности фотонного пучка обычно задается параметрами Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 [20]:

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{i=1}^{3} \xi_i \hat{\tau}_i\right];$$

τ_i совпадают с матрицами Паули.

В представлении спиральностей матрица плотности γ-пучка имеет вид

$$\rho_\gamma = \frac{1}{2}\left[1 + \rho_1 \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2i\varphi} \\ -e^{+2i\varphi} & 0 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]; \quad (54.28)$$

ρ_1 характеризует степень линейной поляризации; ρ_2 — степень циркулярной поляризации. Эти параметры просто связаны с параметрами Стокса; φ — азимутальный угол:

$$\cos\varphi = \frac{(\varepsilon \cdot \mathbf{q})}{|\,\mathbf{q}\,|\sin\theta}.$$

С помощью (54. 27) и (54. 28) нетрудно получить сечение фоторождения мезонов в самом общем случае поляризации фотонного пучка. Определения (54.27) легко допускают обобщение на случай, когда состояние $\lambda_\gamma = 0$ (продольная поляризация) дает вклад. Это, например, соответствует электророждению мезонов. С небольшими изменениями результаты, относящиеся к этому случаю, применимы к анализу образования векторных мезонов в πN- и KN-столкновениях. Обобщение заключается в добавлении двух амплитуд H^0 и Φ^0.

Мультипольное разложение амплитуд H и Φ имеет вид [42]

$$\left.\begin{aligned} H^{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\sum_l (P'_{l+1} + P'_l)\,\{(l+2)\,[E_{l+} + M_{(l+1)-}] + \\ &\quad + l\,[M_{l+} - E_{(l+1)-}]\}; \\ H^{-} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\sum_l \left[lP'_{l+1} + (l+2)\,P'_l\right]\cdot[E_{l+} - M_{(l+1)-} - \\ &\quad - M_{l+} - E_{(l+1)-}]; \end{aligned}\right\} \quad (54.29)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\sum_l \left[lP'_{l+1} - (l+2)\,P'_l\right][E_{l+} + M_{(l+1)-} - \\ &\quad - M_{l+} + E_{(l+1)-}]; \\ \Phi^{-} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\sum_l (P'_{l+1} - P'_l)\,[(l+2)\,(E_{l+} - M_{(l+1)-}) + \\ &\quad + l\,(M_{l+} + E_{(l+1)-})]; \\ H^{\circ} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\sum_l (l+1)\,(P'_{l+1} - P'_l)\,[L_{l+} - L_{(l+1)-}]\frac{\sqrt{\varkappa^2}}{k_0}; \\ \Phi^{\circ} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\sum_l (l+1)\,(P'_{l+1} + P'_l)\,[L_{l+} + L_{(l+1)-}]\frac{\sqrt{\varkappa^2}}{k_0}, \end{aligned}\right\} \quad (54.30)$$

где $\varkappa^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ — масса виртуального фотона.

Амплитуды фоторождения мезонов имеют еще изотопическую

структуру. S-матрица однофотонных процессов, как показывает опыт, имеет вид

$$S + V_3, \tag{54.31}$$

т. е. содержит не только скаляр, но и третью компоненту вектора в изотопическом пространстве. Параметризация оператора (54,31) легко достигается применением теоремы Вигнера—Эккарта (49.20):

$$\langle T'T_3' | S + V_3 | TT_3 \rangle = S^T \delta_{T'T} \delta_{T_3' T_3} + V^{T'} < T' T_3' | 0TT_3 >. \tag{54.32}$$

Здесь TT_3 — полный изоспин и его проекция. Из формулы (54.32) следует, что при $T = {}^1/_2$ величина T' может быть равна ${}^1/_2$ и ${}^3/_2$. Таким образом, каждая из четырех обсуждавшихся выше амплитуд фоторождения $A_1A_2A_3A_4$ или $F_1F_2F_3F_4$ распадается на три изоспиновых амплитуды. Иногда вместо параметризации (54.32) используют параметризацию вида

$$\delta_{\tau 3} F^{(1)} + \hat{\tau}_\rho F^{(2)} + \frac{1}{2}[\hat{\tau}_\rho, \hat{\tau}_3] F^{(3)}, \tag{54.33}$$

здесь τ — матрицы Паули; $\rho = 1, 2, 3$.

Волновые функции имеют вид

$$\langle \rho | \pi^\pm \rangle = \mp (\delta_{\tau 1} \pm i\delta_{\tau 2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \rho | \pi^0 \rangle = \delta_{\tau 3} | p \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad | n \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Связь с параметризацией (54.32) дается формулами

$$S^{1/2} = F^{(2)}; \; V^{1/2} = F^{(1)} + 2F^{(3)}; \; V^{3/2} = F^{(1)} - F^{(3)}. \tag{54.34}$$

§ 55. РЕАКЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ И РАСПАДЫ НЕСТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ. G-ЧЕТНОСТЬ

Обычным объектом применения рассматриваемой теории являются резонансы — крайне нестабильные частицы. В связи с этим экспериментаторы фактически наблюдают только частицы — продукты распада. Пусть имеется реакция с образованием трех частиц в конечном состоянии, две из которых образуют короткоживущее резонансное состояние

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \to (1 + 2) + 3. \tag{55.1}$$

Дифференциальное сечение этой реакции, согласно (37.16) имеет вид:

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{v E_\mathrm{I} E_\mathrm{II}} \cdot \frac{d\mathbf{p}_1}{E_1} \cdot \frac{d\mathbf{p}_2}{E_2} \cdot \frac{d\mathbf{p}_3}{E_3} \delta^4 (p_1 + p_2 + p_3 - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) \frac{1}{(2j_\mathrm{I}+1)(2j_\mathrm{II}+1)} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} | \langle \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 \lambda_3 p_3 | \hat{F} | \lambda_\mathrm{I} \mathbf{p}_\mathrm{I} \lambda_\mathrm{II} \mathbf{p}_\mathrm{II} \rangle |^2. \tag{55.2}$$

где $\mathbf{p}_\mathrm{I}\, \mathbf{p}^\mathrm{II}\, E_\mathrm{I}\, E_\mathrm{II}$ — импульсы и энергии четырех начальных частиц; v — их относительная скорость; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$; $E_1 E_2 E_3$ — трехмерные импульсы и энергии конечных частиц; λ_i — спиральности; $\hat{F}$ — релятивистски инвариантная амплитуда.

Реакцию (55.1) мы будем рассматривать как идущую в два этапа: 1) образование нестабильной частицы V; 2) распад частицы $V \to 1 + 2$. Кинематика этих процессов принимает особенно простой вид, когда первый этап рассматривается в системе центра инерции частиц I + II, а распад в системе покоя V. В связи с этим введем суммарный 4-мерный импульс частиц *1* и *2* (импульс частицы V) $t = p_1 + p_2$ и импульс $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ и преобразуем инвариантный фазовый объем следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{E_1} \cdot \frac{d\mathbf{p}_2}{E_2} \cdot \frac{d\mathbf{p}_3}{E_3} \delta^4 (t + p_3 - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) =$$

$$= \left[\frac{dt}{t_0} \cdot \frac{d\mathbf{p}_3}{E_3} \delta^4 (t + p_3 - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) \right] \left[\frac{t_0 \cdot d\mathbf{q}}{E_1 E_2} \right]. \tag{55.3}$$

Поскольку первый множитель явно релятивистски инвариантен, то второй множитель также инвариантен, и их можно рассматривать в разных системах координат. В системе, где $\mathbf{t} = 0$ (система покоя частицы V) второй множитель имеет вид:

$$\frac{m}{\sqrt{m_1^2 + q^2}\sqrt{m_2^2 + q^2}} q^2\, dq\, d\Omega_q,$$

где $m = \sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2}$, по определению, масса частицы V. Переходя от переменной q к переменной m, имеем для фазового объема

$$\frac{d\mathbf{p}_3}{E_3} \cdot \frac{dt}{t_0} \delta^4 (t + p_3 - p_\mathrm{I} - p_\mathrm{II}) \cdot q\, \frac{dm^2}{2m} d\Omega_\mathbf{q}. \tag{55.4}$$

Если частицу V можно рассматривать как стабильную, то инвариантный матричный элемент содержит множитель $\delta(m^2 - m_V^2)$, и интегрирование по эффективной массе пропадает. Если же по условиям опыта необходимо учитывать конечную ширину резонанса, то вместо δ-функции вводят распределение типа

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(m)}{(m_V^2 - m^2)^2 + \Gamma^2(m)}. \tag{55.5}$$

Матричный элемент F надо также представить в виде суммы произведений инвариантных сомножителей:

$$\langle \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 \lambda_3 p_3 \alpha | \hat{F}' | \lambda_\mathrm{I} p_\mathrm{I} \lambda_\mathrm{II} p_\mathrm{II} \rangle =$$

$$= \sum_{\lambda_V} \langle \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 \alpha | \hat{A} | \mathbf{t} \lambda_V J_V \rangle \times \langle \mathbf{t} \lambda_V J_V p_3 \lambda_3 | \hat{R} | \lambda_\mathrm{I} p_\mathrm{I} \lambda_\mathrm{II} p_\mathrm{II} \rangle.$$

Здесь $\langle \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 \alpha | \hat{A} | t \lambda_V J_V \rangle$ — амплитуда распада; J_V — спин нестабильной частицы; λ_V — ее спиральность; α — нумерует канал распада. Мы рассматриваем случай, когда нестабильная частица может распадаться несколькими способами; $\langle t \lambda_V J_V p_3 \lambda_3 | \hat{R} | \lambda_I p_I \lambda_{II} p_{II} \rangle$ — амплитуда реакции. Штрих у буквы F означает, что $\hat{F}'$ отличается от $\hat{F}$ множителем типа (55.5). Воспользуемся релятивистской инвариантностью теории и запишем A в системе покоя частицы V:

$$\langle \lambda_1, p_1, \lambda_2 p_2 \alpha | \hat{A} | t J_V \lambda_V \rangle = \langle \lambda_1', \mathbf{q}, \lambda_2' - \mathbf{q}\alpha | \hat{A} | 0 J_V \lambda_V \rangle.$$

Спиральности конечных частиц при таком преобразовании Лоренца меняются, однако по ним в дальнейшем будет проведено суммирование и это изменение никак не скажется.

Относительная вероятность распада по каналу α запишется [с учетом соотношения (55.4)]:

$$\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} = \frac{q}{2m} \cdot \frac{1}{2J_V + 1} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_V} \int d\Omega_{\mathbf{q}} | \langle A \rangle |^2. \qquad (55.6)$$

Амплитуда A нормирована таким образом, чтобы, суммировав сечение по всем парциальным каналам, мы получили сечение образования нестабильной частицы.

Для того чтобы рассмотреть корреляцию образования и распада нестабильной частицы, выберем в качестве оси z направление импульса частицы I, а ось y направим по нормали к плоскости реакции: I + II→V + 3. Переход к этой системе осей осуществляется с помощью поворота в системе покоя частицы V:

$$\langle \lambda_1', \mathbf{q}, \lambda_2' - \mathbf{q}, \alpha | A | 0 J_V \lambda_V \rangle =$$
$$= \sum_M \langle \lambda' \mathbf{q}, \lambda' - \mathbf{q}\alpha | A | 0 JM \rangle D^{J*}_{M\lambda_V}(\omega).$$

Этот поворот переносит проекцию спина с импульса частицы V на импульс частицы I.

Введем матрицу плотности

$$\langle M' | \rho | M \rangle = \frac{4\pi^2}{v E_I E_{II}} \cdot \frac{1}{(2i_I + 1)(2i_{II} + 1)} \cdot \frac{p_3}{(E_I + E_{II})} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_V \lambda_I \lambda_{II} \lambda_V'} D^{J*}_{M'\lambda_V'}(\omega) \langle \lambda_V' J_V t | \hat{R} | \lambda_I p_I \lambda_{II} p_{II} \rangle \times$$

$$\times \langle \lambda_I p_I \lambda_{II} p_{II} | \hat{R} | \lambda_V J_V t \rangle^* D^J_{\lambda_V M}(\omega).$$

Дифференциальное сечение образования V-частицы равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Sp\rho.$$

Введем также нормированную матрицу плотности

$$\langle M' | \bar{\rho} | M \rangle = \frac{\langle M' | \rho | M \rangle}{Sp\rho}.$$

С помощью введенных определений сечение реакции (55.1) можно записать в виде

$$d\Omega_3 d\Omega_{\mathbf{q}} \sum_{MM'\lambda_1'\lambda_2'} \langle \lambda_1' \mathbf{q} \lambda_2' - \mathbf{q}\alpha | \hat{A} | 0 J_V M' \rangle^* \langle M | \rho | M' \rangle \times$$
$$\times \langle J_V M' 0 | \hat{A} | \lambda_1' \mathbf{q}, \lambda_2' - \mathbf{q}\alpha \rangle \frac{q}{2m} f(m^2)\, dm^2, \qquad (55.7)$$

где $f(m^2) = \delta(m^2 - m_2^2)$, или выражение (55.5).

Матричные элементы амплитуды $\hat{A}$ можно записать в виде

$$\langle \lambda_1' \mathbf{q} \lambda_2' - \mathbf{q}\alpha | \hat{A} | J_V M \rangle = \sum_{JM'\lambda_1\lambda_2} \langle \lambda_1' \mathbf{q} \lambda_2' - \mathbf{q} | JM' \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times$$
$$\times \langle JM' \lambda_1 \lambda_2 \alpha | \hat{A} | J_V M \rangle.$$

Используя закон сохранения момента $\langle JM'\lambda_1\lambda_2\alpha | A | J_V M \rangle = A^V_\alpha(\lambda_1\lambda_2)\, \delta_{JJ_V}\, \delta_{M'M}$ и явный вид функции преобразования (53.4), найдем

$$\langle \lambda_1' \mathbf{q} \lambda_2' - \mathbf{q}\alpha | \hat{A} | J_V M \rangle = \left(\frac{2J_V + 1}{4\pi} \right)^{1/2} D^{J*}_{M\lambda}(\varphi, \theta, 0) A^V_\alpha(\lambda_1' \lambda_2'), \qquad (55.8)$$

где $\lambda = \lambda_1' - \lambda_2'$.

Эта формула является основой для рассмотрения двухчастичных распадов. Исходя из формулы (55.8), определения парциальной ширины (55.6) и нормированной матрицы плотности $\langle M' | \bar{\rho} | M \rangle$, можно записать (55.7) в виде:

$$d\sigma_V\, d\Omega_{\mathbf{q}}\, f(m^2)\, dm^2 \frac{q}{2m} \cdot \frac{2J_V + 1}{4\pi} \sum_{\lambda_1'\lambda_2' MM'} | A^V_\alpha(\lambda_1'\lambda_2') |^2 e^{i(M - M')\varphi} \times$$
$$\times d^{J_V}_{\lambda M}(\theta)\, d^{J_V}_{\lambda M'}(\theta) \langle M | \bar{\rho} | M' \rangle = d\sigma_V W_\alpha(\theta, \varphi) \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} f(m^2)\, dm^2\, d\Omega_q, \qquad (55.9)$$

где $d\sigma_V = Sp\rho\, d\Omega_3$;

$$W_\alpha(\theta,\ \varphi) = \frac{2J_V+1}{4\pi} \sum_{\lambda_1'\lambda_2' MM'} \overline{|A_\alpha^V(\lambda_1'\lambda_2')|^2}\, e^{i(M-M')\varphi} d^{J_V}_{\lambda M} d^{J_V}_{\lambda M'} \langle M|\bar{\rho}|M'\rangle,$$

причем

$$\overline{|A_\alpha^V(\lambda_1'\lambda_2')|^2} = \frac{|A_\alpha^V(\lambda_1'\lambda_2')|^2}{\sum\limits_{\lambda_1'\lambda_2'} |A_\alpha^V(\lambda_1'\lambda_2')|^2}$$

и

$$\int W(\theta,\ \varphi)\, d\Omega_q = 1.$$

Воспользуемся инвариантностью по отношению к отражениям. Из формулы (53.23) следует

$$A_\alpha^V(\lambda_1',\ \lambda_2') = \eta_V \eta_1 \eta_2 (-1)^{J_V - j_1 - j_2} A_\alpha^V(-\lambda_1',\ -\lambda_2'), \quad (55.10)$$

что означает симметрию углового распределения распада

$$W(\theta,\ \varphi) = W(\pi - \theta,\ \pi + \varphi).$$

Из инвариантности по отношению к отражению S-матрицы реакции образования V следует

$$W(\theta,\ \varphi) = W(\theta,\ -\varphi).$$

Отмеченная симметрия и действительность W означают, что произведение $e^{i(M-M')\varphi}\langle M|\bar{\rho}|M'\rangle$ можно заменить на $\cos[(M-M')\varphi]\times$ $\times \mathrm{Re}\langle M|\bar{\rho}|M'\rangle$. Применим эти результаты к распадам нейтральных векторных мезонов (например, ω^0- или φ^0-мезонов):

$$V \to \begin{cases} P + P & \text{(а)} \\ P + \gamma & \text{(б)} \\ e^+ + e^- & \text{(в)}, \end{cases}$$

где P означает псевдоскалярный мезон.

Используя свойство (53.26), эрмитовость $\bar{\rho}$ и $Sp\bar{\rho} = 1$ для матрицы плотности $\langle M|\bar{\rho}|M'\rangle \equiv \rho_{MM'}$, получаем выражение

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} & \rho_{1-1} \\ \rho_{10}^* & 1-2\rho_{11} & -\rho_{10}^* \\ \rho_{11} & -\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}; \quad \rho_{00} = 1 - 2\rho_{11}, \quad (55.11)$$

где ρ_{11} и ρ_{1-1} — действительные числа. Для процесса (а) $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$, поэтому процесс распада описывается лишь одним параметром $|A|^2$. Для процесса (б) $\lambda_1' = \pm 1$, $\lambda_2' = 0$, но из условия (55.10) имеем $|A(+1,0)|^2 = |A(-1,0)|^2$, т. е. процесс (б) также описывается только одним параметром. Для процесса (в) условие (55.10) дает $|A(+1/2, +1/2)|^2 = |A(-1/2, -1/2)|^2$ $|A(+1/2, -1/2)|^2 = |A(-1/2, +1/2)|^2$, т. е. процесс (в) описывается двумя независимыми параметрами. Угловое распределение $W(\theta, \varphi)$ для всех этих случаев легко вычисляется с помощью таблицы $d^J_{mm'}$-функций, приведенной в приложении V, и явного вида матрицы плотности (55. 11).

Для случая (а):

$$W_а(\theta,\ \varphi) = \Big[\rho_{00}\cos^2\theta + \rho_{11}\sin^2\theta - \rho_{1-1}\sin^2\theta\cos 2\varphi - \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\rho_{10}\sin 2\theta\cos\varphi\Big]\frac{3}{4\pi}. \quad (55.12)$$

Для случая (б):

$$W_б(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4\pi} - W_а(\theta,\ \varphi)\right]. \quad (55.13)$$

Для случая (в):

$$W_в(\theta,\ \varphi) = |\overline{A(+1/2,\ +1/2)}|^2 W_а(\theta,\ \varphi) + |\overline{A(+1/2,\ -1/2)}|^2 W_б(\theta,\ \varphi). \quad (55.14)$$

Если воспользоваться тем обстоятельством, что процесс (в) описывается квантовой электродинамикой, то можно показать, что отношение первого члена (55.14) ко второму равно $2\left(\frac{m_e}{m_V}\right)^2$, где m_e — масса электрона, а m_V — масса векторной частицы. С точностью до этой ничтожно малой величины мы можем положить $|\overline{A(+1/2, +1/2)}|^2 = 0$, $|\overline{A(+1/2, -1/2)}|^2 = 1$.

Таким образом, угловые распределения процессов (а), (б), (в) определяются только динамикой образования векторной частицы и связаны между собой простыми соотношениями, а угловые распределения процессов (б) и (в) с большой точностью совпадают.

На основе формулы (55.8) нетрудно провести рассмотрение корреляций в каскадах распадов, например в распадах типа

$$1 \to 2 + 3;$$

$$2 \to 4 + 5.$$

Каждый из распадов следует рассматривать в системе покоя распадающейся частицы [условие применимости (55.8)]:

$$\langle \mathbf{q}\lambda_2 - \mathbf{q}\lambda_3 | \hat{A}_1 | J_1 M_1 \rangle = D^{J_1^*}_{M_1 \lambda}(\varphi,\ \theta,\ 0) \left(\frac{2J_1+1}{4\pi}\right)^{1/2} A_1(\lambda_2,\ \lambda_3);$$

$$\lambda = \lambda_2 - \lambda_3;$$

$$\langle \mathbf{p}',\ \lambda_4' - \mathbf{p}'\lambda_5' | \hat{A}_{2_1} | J_2 \lambda_2 \rangle = D^{J_2^*}_{M_2 \lambda'}(\varphi',\ \theta',\ 0) \left(\frac{2J_2+1}{4\pi}\right)^{1/2} A_2(\lambda_4,\ \lambda_5);$$

$$\lambda' = \lambda_4 - \lambda_5.$$

При этом используется то обстоятельство, что λ_2 не меняется при преобразовании Лоренца вдоль $\mathbf{q}$. Вероятность распада найдем согласно

$$W = Sp(\hat{A}_2 \hat{A}_1)\, \hat{\rho}\, (\hat{A}_2 \hat{A}_1)^+,$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности частицы *1*;

$$W = \sum_{\lambda_2 \lambda_2'} \langle \lambda_2 | \rho' | \lambda_2' \rangle \Lambda(\lambda_2',\ \lambda_2), \qquad (55.15)$$

где

$$\langle \lambda_2 | \rho' | \lambda_2' \rangle = \sum_{\lambda_3} \sum_{M_1 M_1'} e^{i(M_1 - M_1')\varphi} \langle M_1 | \rho | M_1' \rangle d^J_{M_1 \lambda_2 - \lambda_3}(\theta)\, d_{M_1' \lambda_2' - \lambda_3}(\theta) \times$$

$$\times A_1(\lambda_2,\ \lambda_3)\, A_1^*(\lambda_2' \lambda_3);$$

$$\Lambda(\lambda_2',\ \lambda_2) = \sum_{\lambda_4 \lambda_5} | A_2(\lambda_4,\ \lambda_5) |^2 d^{J_2}_{\lambda_2,\ \lambda_4 - \lambda_5}(\theta') \cdot d^{J_2}_{\lambda_2',\ \lambda_4 - \lambda_5}(\theta')\, e^{i(\lambda_2 - \lambda_2')\varphi'}.$$

Случай распада нестабильной частицы на три частицы требует особого рассмотрения. Состояние трех частиц задается вектором

$$| \lambda_1,\ \mathbf{p}_1,\ \lambda_2\, \mathbf{p}_2,\ \lambda_3\, \mathbf{p}_3 \rangle.$$

Все три частицы рассматриваются равноправно в системе покоя распадающейся частицы.

Инвариантный фазовый объем запишется:

$$d\rho_f = \frac{d\mathbf{p}_1}{E_1} \cdot \frac{d\mathbf{p}_2}{E_2} \cdot \frac{d\mathbf{p}_3}{E_3}\, \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\, \delta(E_1 + E_2 + E_3 - m),$$

где m — масса распадающейся частицы; $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$ — энергии частиц продуктов распада.

Обычно ρ_f записывают в виде

$$d\rho_f = dE_1 dE_2 d\varphi_1 d\cos\theta_1 d\varphi_{12} \times$$

$$\times \delta\left[\cos\theta_{12} - \frac{(m - E_1 - E_2)^2 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2 - m_3^2}{2\sqrt{p_1^2 p_2^2}}\right], \qquad (55.16)$$

где φ_{12} и θ_{12} — азимутальный и полярный углы $\mathbf{p}_2$ по отношению к $\mathbf{p}_1$.

Если проинтегрировать вероятность распада по углам, то получим распределение по энергиям E_1 и E_2 — так называемую диаграмму Далица (см. часть I). В нашем рассмотрении будут фигурировать угловые переменные, а по энергетическим переменным будет проводиться интегрирование. Диаграмма Далица дает информацию, которая не зависит от выстроенности спина распадающейся частицы. Угловые же характеристики полностью определяются выстроенностью спина. В этом смысле рассматриваемые ниже характеристики являются дополнительными по отношению к диаграмме Далица.

В качестве угловых переменных удобно выбрать три угла Эйлера $\alpha\beta\gamma$, характеризующих направление нормали к плоскости реакции. Углы α и β — соответственно азимутальные и полярные углы нормали по отношению к неподвижной системе координат. Угол γ характеризует вращение треугольника импульсов $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ вокруг нормали. Поскольку мы работаем в системе центра инерции, то полный момент системы трех частиц может иметь определенное значение. Зададим состояние системы полным моментом J и его проекциями на направление нормали K и на фиксированную ось z—M. Задача отыскания функции преобразования

$$\langle \alpha\beta\gamma | JKM \rangle$$

сводится к случаю двухтельной задачи. Роль направления импульса относительного движения играет нормаль. Роль спиральности — проекция полного момента на нормаль. Таким образом,

$$\langle \lambda\beta\gamma | JKM \rangle = D^{J^*}_{MK}(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (55.17)$$

и экспериментаторам предлагается измерять угловое распределение нормали к плоскости распада в системе покоя распадающейся частицы. В выражении для инвариантного фазового объема (55.16) следует заменить $d\varphi_1\, d\cos\theta_1\, d\varphi_{12}$ на $d\alpha\, d\cos\beta\, d\gamma$, ибо якобиан перехода равен единице.

Угловое распределение нормали запишется:

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \sum_{MM'} \sum_{KK'} \langle M | \rho | M' \rangle \int D^{J^*}_{MK}(\alpha, \beta, \gamma) \times$$

$$\times D^J_{M'K'}(\alpha, \beta, \gamma)\, d\gamma \int dE_1 dE_2 F_K(E_1\lambda_1; E_2\lambda_2; ; E_3\lambda_3) \times$$

$$\times F^*_{K'}(E_1\lambda_1;\ E_2\lambda_2;\ E_3\lambda_3).$$

Амплитуды распада F_K зависят только от K, от M они зависеть не могут [см. обсуждение формулы (34.3)]. Так как зависимость D-функций от γ имеет вид $e^{-iK\gamma}$, то интегрирование по γ дает $\delta_{K'K}$, и мы получаем

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{MM'} \langle M | \rho | M' \rangle \sum_K D^J_{MK}(\alpha, \beta, 0)\, D^J_{M'K}(\alpha, \beta, 0) |A_K|^2, \quad (55.18)$$

где

$$|A_K|^2 = 2\pi \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \int |F_K(E_1\lambda_1; E_2\lambda_2; E_3\lambda_3)|^2\, dE_1 dE_2.$$

Эту формулу можно упростить, воспользовавшись (49.15), (49.19):

$$W = \sum_{MM'} \langle M | \rho | M' \rangle \sum_K \sum_l \langle lm | JM'J - M \rangle \langle l0 | JKJ - K \rangle \times$$

$$\times (-1)^{K-M} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y^*_{lm}(\beta, \alpha) |A_K|^2. \quad (55.19)$$

Из этой формулы следует, что при заданном спине частицы J максимальный номер шаровой гармоники в угловом распределении нормали равен $2J$. Действие оператора четности на состояние $|E_1\lambda_1;\ E_2\lambda_2; E_3\lambda_3; JMK\rangle$ имеет вид

$$\hat{P} |E_1\lambda_1;\ E_2\lambda_2;\ E_3\lambda_3;\ JMK\rangle = (-1)^K (-1)^{j_1-\lambda_1+j_2-\lambda_2+j_3-\lambda_3} \times$$

$$\times \eta_1\eta_2\eta_3 |E_1 - \lambda_1;\ E_2 - \lambda_2;\ E_3 - \lambda_3;\ JMK\rangle. \quad (55.20)$$

В случае, когда все три частицы-продукта являются бесспиновыми частицами, формула (55.20) дает

$$\hat{P} |E_1, E_2, E_3; JMK\rangle = (-1)^{K+1} |E_1, E_2, E_3; JMK\rangle, \quad (55.21)$$

откуда следует, что если четность частицы $+1$, то участвуют состояния с нечетными K. Если же четность исходной частицы равна -1, то разрешены только состояния с четными K.

Если две (или все три) из дочерних частиц являются тождественными, то амплитуда должна удовлетворять условиям симметрии. В частности,

$$P_{12} |E_1\lambda_1;\ E_2\lambda_2;\ E_3\lambda_3 JMK\rangle = (-1)^{J+2K} |E_2\lambda_2; E_1\lambda_1; E_3\lambda_3 JM - K\rangle.$$

Как пример применения соотношения (55.18) приведем угловые распределения нормали к плоскости распада в случае, когда конечное состояние — три нетождественных бесспиновых частицы.

1. Векторная частица $J^{\text{четность}} = 1^-$.

Благодаря (55.21) и закону сохранения четности амплитуды с $K = \pm 1$ обращаются в нуль и распад описывается одним физическим параметром $|A_0|^2$. Подставляя в выражение (55.18) d-функции из приложения V, находим

$$W(\alpha, \beta) = |A_0|^2 \{2\cos^2\beta \cdot \rho_{00} + \sin^2\beta (\rho_{11} + \rho_{-1-1}) -$$

$$- 2\sqrt{2} \sin\beta \cos\beta [(\mathrm{Re}\,\rho_{10} - \mathrm{Re}\,\rho_{-10}) \cos\alpha - (\mathrm{Im}\,\rho_{10} +$$

$$+ \mathrm{Im}\,\rho_{-10}) \sin\alpha] - 2\sin^2\beta (\mathrm{Re}\,\rho_{1-1} \cos 2\alpha - \mathrm{Im}\,\rho_{1-1} \sin 2\alpha)\}.$$

Таким образом, из углового распределения можно определить шесть элементов матрицы плотности из девяти.

2. Псевдовекторная частица (случай 1^+).

Из (55.21) и закона сохранения четности находим, что в этом случае отличны от нуля амплитуды, имеющие $K = \pm 1$. Соответственно распад будет описываться двумя параметрами: $|A_{+1}|^2$ и $|A_{-1}|^2$.

На основе (55.18) и приложения V найдем:

$$W(\alpha\beta) = S_1 \left\{(\rho_{11} + \rho_{-1-1}) \frac{1 + \cos^2\beta}{2} + \rho_{00} \sin^2\beta + \sqrt{2} \sin\beta \cos\beta \times \right.$$

$$\times [(\mathrm{Re}\,\rho_{10} - \mathrm{Re}\,\rho_{-10}) \cos\alpha - (\mathrm{Im}\,\rho_{10} + \mathrm{Im}\,\rho_{-10}) \sin\alpha] +$$

$$\left. + \sin^2\beta (\cos 2\alpha\, \mathrm{Re}\,\rho_{1-1} - \sin 2\alpha\, \mathrm{Im}\,\rho_{1-1})\right\} + R_1 \{(\rho_{11} - \rho_{-1-1}) \cos\beta +$$

$$+ \sqrt{2} \sin\beta [\cos\alpha (\mathrm{Re}\,\rho_{10} + \mathrm{Re}\,\rho_{-10}) - \sin\alpha (\mathrm{Im}\,\rho_{10} - \mathrm{Im}\,\rho_{-10})]\},$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}[|A_{+1}|^2 + |A_{-1}|^2], \text{ а } R_1 = \frac{1}{2}[|A_{+1}|^2 - |A_{-1}|^2].$$

Перегруппировка членов в формуле (55.18) так, чтобы выделить сумму и разность $|A_{\pm K}|^2$: S_K и R_K, оказывается иногда очень удобной. Нетрудно показать, что преобразование $\{\alpha \to \pi + \alpha, \beta \to \pi - \beta\}$ (обращение направления нормали) меняет знак коэффициентов при R_K и оставляет неизменными коэффициенты при S_K.

Когда две из частиц являются тождественными, согласно сказанному выше:

$$F_K(E_1, E_2, E_3) = \pm F_{-K}(E_2, E_1, E_3)$$

и величины $\frac{1}{2}[|F_K|^2 + |F_{-K}|^2|$ и $\frac{1}{2}[|F_K|^2 - |F_{-K}|^2]$ являются соответственно симметричными и антисимметричными функциями

$(E_1 - E_2)$. Антисимметричное распределение, проинтегрированное по диаграмме Далица, дает нуль. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае направление нормали оказывается неопределенным. Для того чтобы хорошо определить направление нормали, необходимо проинтегрировать диаграмму Далица отдельно по областям $E_2 > E_1$ и $E_2 < E_1$.

Приведенные выражения для углового распределения нормали можно упростить, если учесть особенности образования распадающейся частицы. В случае, если за ось z выбрано направление импульса распадающейся частицы, матрица плотности удовлетворяет условию (53.26). Если ось z направлена по нормали к плоскости реакции образования, то из закона сохранения четности для процесса образования следует $< M' \,|\, \rho \,|\, M > = 0$, если $M' - M$ нечетно. Часто оказывается, что трехчастичный распад является каскадом из двух двухчастичных распадов, в этом случае следует воспользоваться формулой (55.15). Если четность в этих распадах сохраняется, то целесообразно (как это мы делали при рассмотрении бинарных реакций) ввести состояния определенной четности

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\,|\, jm\lambda\rangle \pm \hat{P} \,|\, jm\lambda\rangle].$$

Рассмотрим, например, случай, когда промежуточный двухмезонный резонанс является векторной частицей. Амплитуда первой ступени каскада запишется:

$$F_1 \frac{1}{\sqrt{2}} [\,|J, M, +1\rangle + \eta\,(-1)^J \,|\, J, M, -1\rangle] +$$

$$+ F_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [\,|\, J, M0\rangle + \eta\,(-1)^J \,|\, J, M, 0\rangle], \qquad (55.22)$$

где J — спин исходной частицы; M — его проекция на фиксированное направление; η — относительная четность векторного мезона и исходной частицы.

Из этой формулы следует, что спиральность векторного мезона $\lambda = 0$ возможна только в том случае, когда $\eta(-1)^J = +1$. Угловое распределение распада векторного мезона на две бесспиновые частицы имеет вид $|\, Y_{1m}(\vartheta, \varphi)\,|^2$, т. е. относительно направления импульса векторного мезона продукты его распада будут иметь угловое распределение: $\sin^2\theta$ — в случае $\lambda = \pm 1$ и $\cos^2\theta$ в случае $\lambda = 0$.

Таким образом, если частица со спином J и неизвестной четностью распадается на три π-мезона через промежуточное состояние (ρ-мезон + π-мезон), то по угловому распределению π-мезонов распада ρ-мезона относительно направления импульса последнего можно определить его четность. Наличие в этом угловом распределении члена $\sim\cos^2\theta$ означает, что четность частицы равна $(-1)^{J+1}$.

Обнаружение корреляций в каскадах распадов может служить хорошим средством для определения спина частиц (вернее, оценки его наименьшего значения). Применим формулу (55.15) к случаю, когда спин частицы *1* равен J, спин частиц *2* и *4* равен $1/2$, а спин частиц *3* и *5* равен нулю. Причем не будем предполагать, что четность в этих распадах сохраняется. Примером такого каскада может служить

$$\Xi \to \Lambda + \pi$$
$$\quad\;\; \big|\!\to N + \pi$$

Введем обозначения:

$$C_\lambda = A_1(\lambda_2, \lambda_3) \;\; (\lambda = \lambda_2 - \lambda_3);$$

$$E_{\lambda'} = A_2(\lambda_4, \lambda_5) \;\; (\lambda' = \lambda_4 - \lambda_5).$$

Распад частицы со спином $1/2$ на частицу со спином $1/2$ и на частицу со спином 0 обычно характеризуют параметрами

$$\alpha = \frac{|E_{1/2}|^2 - |E_{-1/2}|^2}{|E_{1/2}|^2 + |E_{-1/2}|^2}; \quad \beta = -\frac{2\,\mathrm{Im}\,(E_{1/2}E^*_{-1/2})}{|E_{1/2}|^2 + |E_{-1/2}|^2};$$

$$\gamma = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,(E_{1/2}E^*_{-1/2})}{|E_{1/2}|^2 + |E_{-1/2}|^2}.$$

Первую ступень каскада можно характеризовать аналогичными параметрами α_J, β_J, γ_J, которые получаются из α, β, γ заменой $E_{\pm 1/2}$ на $C_{\pm 1/2}$.

Введем тройку ортогональных векторов:

k — единичный вектор в направлении поляризации частицы *1*.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{\sin\theta}\,[\mathbf{p}_2, \mathbf{k}] \\ \mathbf{i} &= [\mathbf{j}, \mathbf{k}] \end{aligned}\right\} \text{ единичные векторы,}$$

где $\mathbf{p}_2$ — единичный вектор в направлении импульса частицы *2*. Усредняя вероятность распада (55.15) по всем переменным, за исключением заданной, нетрудно найти корреляционные формулы, аналогичные полученной в конце § 51. Эти корреляционные формулы с точностью до общего множителя имеют вид [43]

для реакций (a):

1) **корреляция** по углу $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4) = \cos\theta'$

$$\langle W \rangle = 1 + \alpha\alpha_J \cos\theta';$$

2) **корреляция** по $(\mathbf{p}_4\mathbf{j}) = \sin\theta' \sin(\varphi' - \varphi)$

$$\langle W \rangle = 1 + \alpha\beta_J\,(\mathbf{p}_4\mathbf{j}) \cdot F_1;$$

3) **корреляция** по $(\mathbf{p}_4\mathbf{i}) = \sin\theta' \cos(\varphi' - \varphi)$

$$\langle W\rangle = 1 - \alpha\gamma_J\,(\mathbf{p_4 i})\cdot F_1;$$

4) корреляция по $(\mathbf{kp}_2) = \cos\theta$

$$\langle W\rangle = \sum_M I_M\,(-1)^{M-1/2}\Big\{\sum_{l\ (\text{четн})}\langle JMJ-M\,|\,l0\rangle\times$$

$$\times\langle J1/2J-1/2\,|\,l0\rangle\,P_l(\cos\theta)+\alpha_J\sum_{l\ (\text{нечетн})}\langle JMJ-M\,|\,l0\rangle\times$$

$$\langle J1/2J-1/2\,|\,l0\rangle\,P_l(\cos\theta);$$

5) корреляция $(\mathbf{kp_4}) = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)$

$$\langle W\rangle = 1 + (\mathbf{k},\,\mathbf{p_4})\,F_2,$$

где

$$F_1 = \frac{2J+1}{2}\sum_M I_M\,(-1)^{M+1/2}\sum_{l\ (\text{нечетн})}\langle JMJ-M\,|\,l0\rangle\langle J\ \tfrac{1}{2}\,J-\tfrac{1}{2}|l0\rangle\times$$

$$\times\left[\frac{l}{(l+1)^3}\right]^{1/2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}\right]^2;$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{2J(J+1)}\,[1+(2J+1)\,\gamma_J]\sum_M I_M M;$$

I_M — диагональные элементы матрицы плотности:

$$\langle M\,|\,\rho\,|\,M'\rangle = \delta_{MM'}\,I_M.$$

Недиагональные элементы равны нулю, ибо мы проводим усреднение по всем направлениям импульсов и спинам частиц, участвующим в реакции, в которой образуется частица со спином J. Единственное выделенное направление — это нормаль к плоскости реакции образования частицы, принятая нами за ось z:

для $J = 1/2$ $F_1 = -\frac{\pi}{4}(I_{1/2} - I_{-1/2})$; $F_2 = \frac{\alpha}{3}(1+2\gamma_J)(I_{1/2} - I_{-1/2})$;

для $J = 3/2$ $F_1 = -\frac{\pi}{32}[9\,(I_{3/2} - I_{-3/2}) + 5\,(I_{1/2} - I_{-1/2})]$;

$$F_2 = \frac{2\alpha}{15}(1+4\gamma_J)\sum_M I_M M.$$

Рассмотрим теперь случай, когда четность в распаде $1\to 2+3$ сохраняется. Пусть вторая ступень каскада $2\to 4+5$ дает нам возможность изучить поляризацию частицы 2. Спины частиц принимаются такими же, как и в предыдущем примере.

Состояние частиц в первой ступени каскада, имеющее определенную четность, согласно сказанному выше, описывается вектором

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|\,JM1/2\rangle + \eta\,(-1)^{J+1/2}\,|\,JM-1/2\rangle], \qquad (55.23)$$

η — относительная четность.

Продольная поляризация частицы 2 (среднее значение спиральности) запишется:

$$P_L(\theta,\varphi)\,W(\theta,\varphi) = \frac{|F|^2}{4}\sum_{MM'}\{\cos(M-M')\,\varphi\,\mathrm{Re}\,[\langle M\,|\,\rho\,|\,M'\rangle -$$

$$-(-1)^{M-M'}\langle -M\,|\,\rho\,|\,-M'\rangle] - \sin(M-M')\,\varphi\,\mathrm{Im}\,|\langle M\,|\,\rho|\,M'\rangle +$$

$$+(-1)^{M-M'}\langle -M\,|\,\rho|\,-M'\rangle]\}\,[d^J_{M1/2}(0)\,d^J_{M'1/2}(\theta) - d^J_{M-1/2}(\theta)\,d^J_{M'-1/2}(\theta)].$$

Поперечная поляризация частицы 2 (вектор поляризации лежит в плоскости, проходящей через $\mathbf{p}_2$ и ось z) имеет вид

$$P_T(\theta,\varphi)\,W(\theta,\varphi) = \eta\,(-1)^{J+1/2}\,\frac{|F|^2}{2}\sum_{MM'}\langle M\,|\,\rho\,|\,M'\rangle\times$$

$$\times\{D^J_{M'1/2}(\varphi,\theta,0)\cdot D^{J*}_{M1/2}(\varphi,\theta,0) + D^J_{M'-1/2}(\varphi,\theta,0)\,D^{J*}_{M1/2}(\varphi,\theta,0)\}.$$

Образуем отношение

$$R_l = \frac{\langle P_L(\theta,\varphi)\,W(\theta,\varphi)\,P_l(\cos\theta)\rangle}{\langle P_T(\theta,\varphi)\,W(\theta,\varphi)\,P'_l(\cos\theta)\rangle},$$

где скобки означают усреднение по всем направлениям, а

$$P^m_l(\theta) = e^{-im\varphi}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}.$$

Использование свойств D-функций и свойств коэффициентов векторного сложения дает [47]

$$R_l = \frac{\dfrac{1}{2l+1}\cdot\dfrac{|F|^2}{2}\sum_M(-1)^{M-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\,[\langle M\,|\,\rho\,|\,M\rangle - \langle -M\,|\,\rho\,|\,-M\rangle]\times}{\times\langle JMJ-M\,\big|\,l0\rangle\langle J\,\frac{1}{2}\,J-\frac{1}{2}\,\big|\,l0\rangle} =$$

$$= \frac{\eta\,\dfrac{1}{2l+1}\dfrac{|F|^2}{2}\sum_M(-1)^{M+\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\,[\langle M\,|\,\rho\,|\,M\rangle - \langle -M\,|\,\rho\,|\,-M\rangle]\times}{\times\langle JMJ-M\,\big|\,l0\rangle\langle J\,\frac{1}{2}\,J\,\frac{1}{2}\,\big|\,l0\rangle} =$$

$$= \eta\,(-1)^{J-1/2}\,\frac{\sqrt{l\,(l+1)}}{2J+1}.$$

Эти формулы используются для определения спина и четности резонансов. Многие резонансы распадаются как по двухчастичному, так и по трехчастичному каналам (например, $Y_1^* \to \Lambda\pi$ и $Y_1^* \to \Lambda\pi\pi$ или $Y_0^* \to \Sigma\pi$ и $Y_0^* \to \Lambda\pi\pi$ и т. п.). Оба типа распадов можно рассматривать вместе, ибо они имеют одну и ту же матрицу плотности. Для трехчастичного распада можно совершенно аналогично рассмотренному определить продольную и поперечную поляризацию гиперона. (См. работу [44], где систематически изложены результаты по трехчастичным распадам). Распады Λ- и Σ-частиц, идущие с несохранением четности, являются хорошими анализаторами поляризаций. В связи с этим приведенные примеры довольно типичны.

При анализе явлений распада большое значение имеет рассмотрение законов сохранения дискретных динамических переменных $\hat{P}$, $\hat{T}$ и $\hat{C}$, ибо именно в распадах обнаружено нарушение этих законов сохранения. Выше довольно подробно обсуждались следствия $\hat{P}$- и $\hat{T}$-инвариантности. Рассмотрим теперь следствия $\hat{C}$-инвариантности. Оператор $\hat{C}$ обычно определяется как оператор, антикоммутирующий со всеми операторами зарядов и коммутирующий с операторами всех пространственно-временных динамических переменных: импульс, момент, спин, спиральность и т. п. Это определение является математическим выражением того факта, что античастицы отличаются от соответствующих им частиц знаками зарядов, а остальные их свойства совпадают.

Обнаружение нарушения закона сохранения $\hat{C}$ внесло в это определение поправку: $\hat{C}$ может не коммутировать с гамильтонианом, что, однако, не приводит к различию масс частицы и античастицы. Равенство масс частиц и античастиц следует из $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-инвариантности, являющейся значительно более фундаментальной симметрией по сравнению с $\hat{C}$.

Оператор $\hat{C}$ иногда называют зарядовым сопряжением, а его собственные значения $\gamma = \pm 1$ называются зарядовой четностью. Физические состояния частиц обычно характеризуются определенными значениями зарядов. В таких состояниях $\hat{C}$ не имеет определенного значения. Исключение составляют системы, обладающие всеми зарядами, равными нулю, т. е. системы, у которых частица совпадает с античастицей (истинно нейтральные частицы).

Примерами таких частиц являются: γ-квант, π^0-, η-, ω-,φ-, X^0-мезоны. Действие оператора $\hat{C}$ на произвольный вектор состояния имеет вид

$$\hat{C}\,|\,\alpha_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle = \eta_c'\,|\,\bar{\alpha}_i \mathbf{p}_i\,\lambda_i\rangle,$$

где η_c' — фазовый множитель; α_i — внутренние динамические переменные; $\bar{\alpha}_i$ означает, что все переменные частиц заменены на

переменные античастиц. Мы пока не фиксируем тип процесса (распад или реакция) и число участвующих частиц; α_i, $\mathbf{p}_i$, λ_i обозначают совокупности соответствующих переменных: α_1, $\mathbf{p}_1$, λ_1; ...; α_n, $\mathbf{p}_n$, λ_n.

Применение явного выражения законов сохранения (34.1) к $\hat{C}$ дает

$$|\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\alpha_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2 = |\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \bar{\alpha}_f\,|\,R\,|\,\bar{\alpha}_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2. \qquad (55.24)$$

Приведем для справок сводку следствий законов сохранения других дискретных величин в представлении спиральностей:

(1) P-инвариантность:

$$|\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\alpha_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2 = |\langle -\mathbf{p}_f - \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\alpha_i - \mathbf{p}_i - \lambda_i\rangle|^2; \qquad (55.25)$$

(2) CP-инвариантность:

$$|\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\bar{\alpha}_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2 = |\langle -\mathbf{p}_f - \lambda_f \bar{\alpha}_f\,|\,R\,|\,\bar{\alpha}_i - \mathbf{p}_i - \lambda_i\rangle|^2; \qquad (55.26)$$

(3) T-инвариантность:

$$|\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\alpha_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2 = |\langle -\mathbf{p}_i \lambda_i \alpha_i\,|\,R\,|\,\alpha_f - \mathbf{p}_f \lambda_f\rangle|^2; \qquad (55.27)$$

(4) CPT-инвариантность

$$|\langle \mathbf{p}_f \lambda_f \alpha_f\,|\,R\,|\,\alpha_i \mathbf{p}_i \lambda_i\rangle|^2 = |\langle -\mathbf{p}_i - \lambda_i \bar{\alpha}_i\,|\,R|\,\mathbf{p}_f - \lambda_f \bar{\alpha}_f\rangle|^2. \qquad (55.28)$$

Здесь выписаны выражения для квадратов амплитуд, для того чтобы не выписывать фазовых множителей, которые зависят от внутренних четностей частиц, спинов и зарядовых четностей.

Выбор фазовых множителей в случае P- и T-преобразований обсуждался выше. Несколько замечаний следует сделать о выборе фазовых множителей при C-преобразовании.

Выделим явно переменные изотопического спина

$$\hat{C}\,|\,TT_3\alpha\rangle = \beta\,(T_3)\,|\,T - T_3\bar{\alpha}\rangle. \qquad (55.29)$$

Из формулы (55.29) видно, что античастице следует приписать проекцию изотопического спина, противоположную проекции изотопического спина соответствующей частицы.

Зависимость фазового множителя $\beta(T_3)$ от T_3 определяется соглашением относительно коммутационных свойств оператора $\hat{C}$ с операторами проекций изотопического спина. Соотношение

$$\hat{T}_3\hat{C} = -\hat{C}T_3$$

следует из определения оператора $\hat{C}$ и связи T_3 с электрическим зарядом. Остальные два коммутационных соотношения обычно выбирают следующим образом:

$$\hat{C}\hat{T}_1 = -\hat{T}_1\hat{C} \text{ и } \hat{C}\hat{T}_2 = \hat{T}_2\hat{C}$$

или в циклических проекциях:

$$\hat{C}\hat{T}_- = -\hat{T}_+\hat{C} \text{ и } \hat{C}\hat{T}_+ = -\hat{T}_-\hat{C}, \qquad (55.30)$$

где

$$\hat{T}_+ = \mp\frac{1}{2}[\hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2].$$

Матричную запись операторных равенств (55.30) в представлении $|TT_3\alpha>$ нетрудно получить, если воспользоваться (55.29) и теоремой Вигнера—Экарта.

Из этой матричной записи и явного вида коэффициентов векторного сложения сразу следует

$$\beta(T_3 - 1) = -\beta(T_3)$$

или

$$C|TT_3\alpha\rangle = \eta_c(-1)^{T_3}|T - T_3\bar{\alpha}\rangle, \qquad (55.31)$$

η_c не зависит от T_3 и является общим множителем для всего изотопического мультиплета.

Весьма полезной является комбинированная операция, составленная из $\hat{C}$ и оператора поворота на угол π вокруг оси 2 в изопространстве: $\hat{G} = \hat{C}\hat{R}_T$ $(0, \pi, 0)$.

Используя формулу (55.31), найдем

$$\hat{G}|TT_3\alpha\rangle = \eta_c(-1)^T|TT_3\bar{\alpha}\rangle. \qquad (55.32)$$

В отличие от оператора $\hat{C}$ оператор $\hat{G}$ может иметь определенное значение (одинаковое для всех компонент изотопического мультиплета) для состояний частиц с отличным от нуля электрическим зарядом. Остальные заряды при этом должны быть равны нулю.

Собственные значения оператора $\hat{G}$ называются G-четностью системы. Поскольку $\hat{G}$-четность фотона равна $\eta_c = -1$, то, предполагая C-инвариантность электромагнитных взаимодействий, можно определить η_c других частиц по их электромагнитным распадам. Например, из существования распадов $\pi^0 \to 2\gamma$, $\eta \to 2\gamma$ следует, что η_c для этих частиц равно $+1$. Откуда на основе (55.32) находим, что G-четность π-мезонов равна -1, а G-четность η-мезона равна $+1$. Аналогично из существования распада $\omega \to \pi^0 + \gamma$ следует, что для ω-мезона $\eta_c = -1$ и G-четность равна -1. Из сохранения G-четности сразу следует, что ω-мезон может распадаться только на нечетное число π-мезонов. Таким образом, G-четность является важным квантовым числом, регулирующим распады частиц с равными нулю барионным зарядом и гиперзарядом. Следует иметь в виду, что электромагнитные взаимодействия нарушают изотопическую симметрию, а следовательно, и G-четность. Поэтому по G-четности распады запрещены с точностью до электромагнитных взаимодействий. Например, распад $\eta \to 3\pi$ хотя и запрещен по G-четности, но является одним из основных типов распада η-мезона. Последнее связано с тем, что η-распад не обусловлен сильными взаимодействиями. Эта ситуация довольно типична для явлений распада, когда осуществляются процессы, запрещенные приближенными законами сохранения. Причем существует своеобразная иерархия процессов: процесс идет тем интенсивнее, чем меньше законов сохранения он нарушает. Поскольку распады по самому своему смыслу являются процессами, идущими с малой вероятностью, то нарушения законов сохранения выявляются прежде всего в распадах.

Если ставится задача измерения динамических характеристик процессов, для которых выполняются соответствующие законы сохранения, то формулы (55. 24)—(55.27) позволяют уменьшить число независимых опытов, получить информацию о процессах, которые вряд ли в обозримое время будут измерены (например, процессы столкновения позитронов с антипротонами или процессы типа $\bar{\Lambda} + K^0 \to \pi^+ + \bar{p}$). В то же время результаты исследований в области физики элементарных частиц научили нас относиться с осторожностью к справедливости законов сохранения.

Может оказаться, что слабые взаимодействия, нарушающие C- и P-инвариантность, необходимо подразделить на взаимодействия, обладающие большей и меньшей симметрией. Широко обсуждается гипотеза о нарушении T-инвариантности в электромагнитных взаимодействиях. Проверка справедливости законов сохранения на одной группе реакций часто еще не означает, что они не будут нарушены в другой группе реакций. В связи с этим в литературе обсуждаются возможные проверки справедливости дискретных симметрий. Главным образом такие проверки касаются поляризационных экспериментов. Ибо, как видно из формул (55.24)—(55.27), одной из наиболее критичных зависимостей является зависимость от знаков спиральностей.

Нарушение C-инвариантности можно проиллюстрировать на примере распада пионов:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu \text{ и } \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}. \qquad (55.33)$$

Начальные состояния этих распадов являются C-сопряженными. C-инвариантность (55.24) требует, чтобы μ^+ и μ^--мезоны обладали одинаковой спиральностью. Эксперименты показали (на основе изучения распадов μ-мезонов), что μ^+- и μ^--мезоны в системе центра инерции полностью продольно поляризованы, но что их спиральности противоположны.

Эти эксперименты одновременно демонстрируют, что в распадах (55.33) нарушается P-инвариантность, но CP-симметрии реализуется. Справедливость CP-симметрии следует из того обстоятельства, что спиральности ν и $\bar{\nu}$ равны, но противоположны по знаку. Возможные экспериментальные проверки CP- и CPT-ин-

вариантности были проанализированы в обзоре [48] еще до открытия нарушения CP-инвариантности.

Особенно богатую и принципиально новую информацию о законах сохранения дали опыты с K-мезонами. Достаточно напомнить, что исследования реакций образования K-мезонов привели к открытию нового интеграла движения — гиперзаряда. Изучение распадов K-мезонов дало первые указания о нарушении законов сохранения C-, P- и CP-четности. Как известно, K-мезоны обладают спином, равным нулю, четностью $P = -1$, гиперзарядом $Y = \pm 1$, изотопическим спином $T = {}^1/_2$. Особенностью распадов K-мезонов является нарушение законов сохранения следующих динамических переменных: C, P, CP, T_3, T и Y. В связи с этим K-мезоны — чрезвычайно интересный объект для исследования законов сохранения. K-мезонная физика настолько бурно развивается и настолько многообразна, что мы не имеем возможности отразить ее надлежащим образом в этой книге. Ознакомиться с достижениями в этой области можно по обзорам [49—51].

Приложение I

ЗАВИСИМОСТЬ ВЕЛИЧИН $\beta,\lambda-1$, p и $p\beta$ от кинетической энергии ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТИЦ (РИС. 54—84) [84].

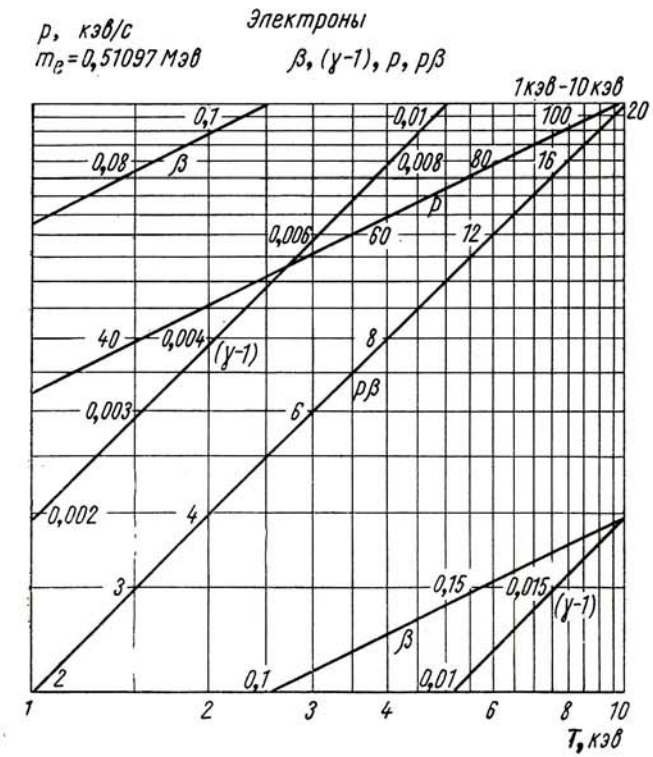


Рис. 54

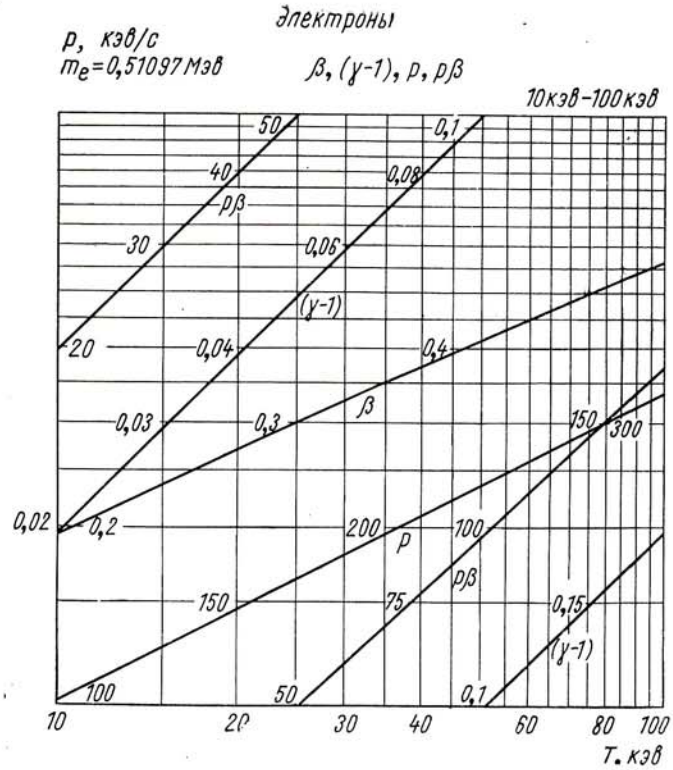


Рис. 55

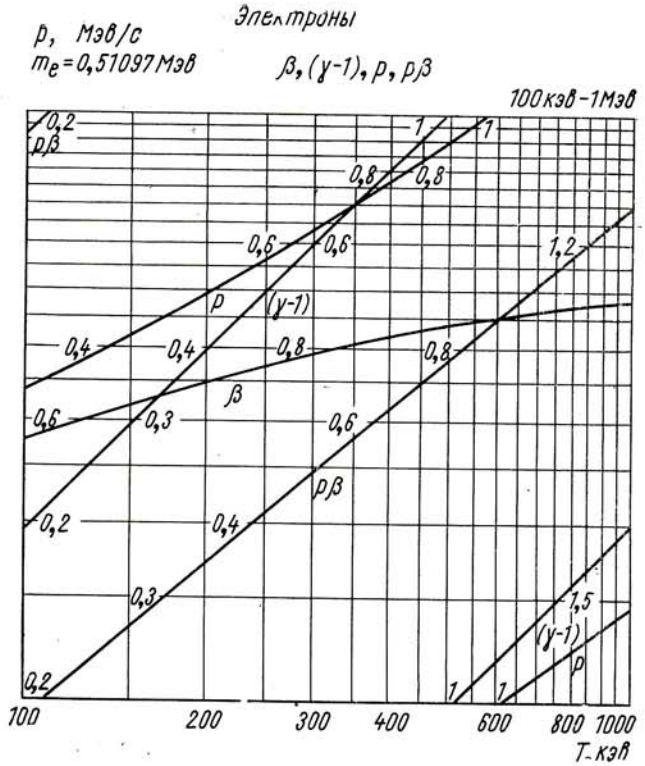


Рис. 56

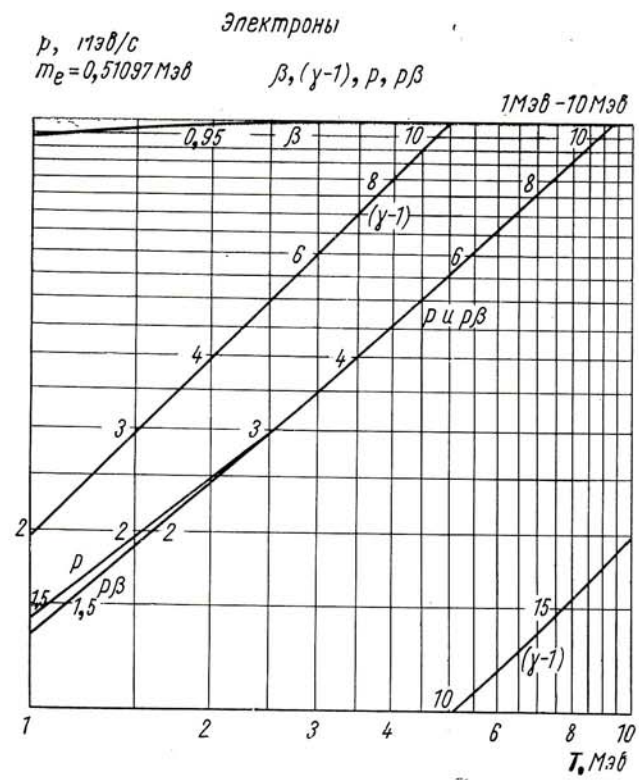


Рис. 57

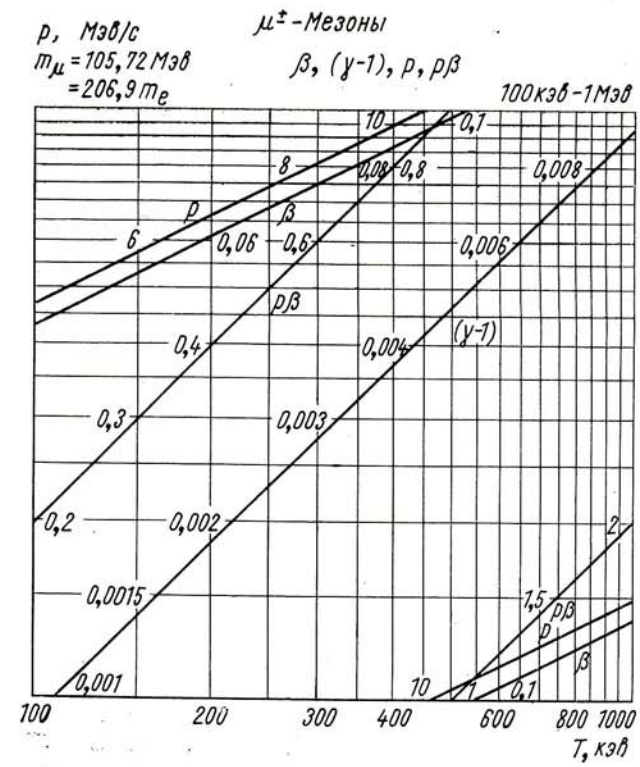


Рис. 58

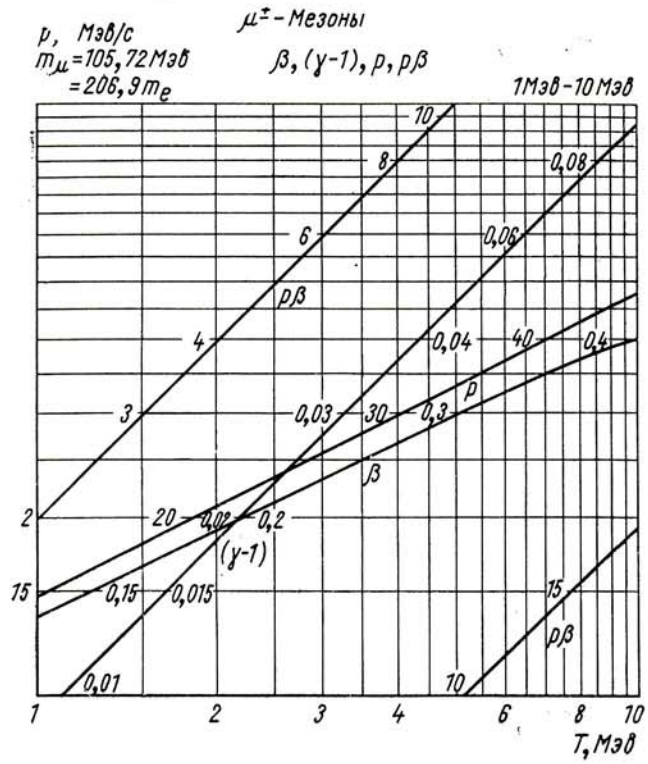


Рис. 59

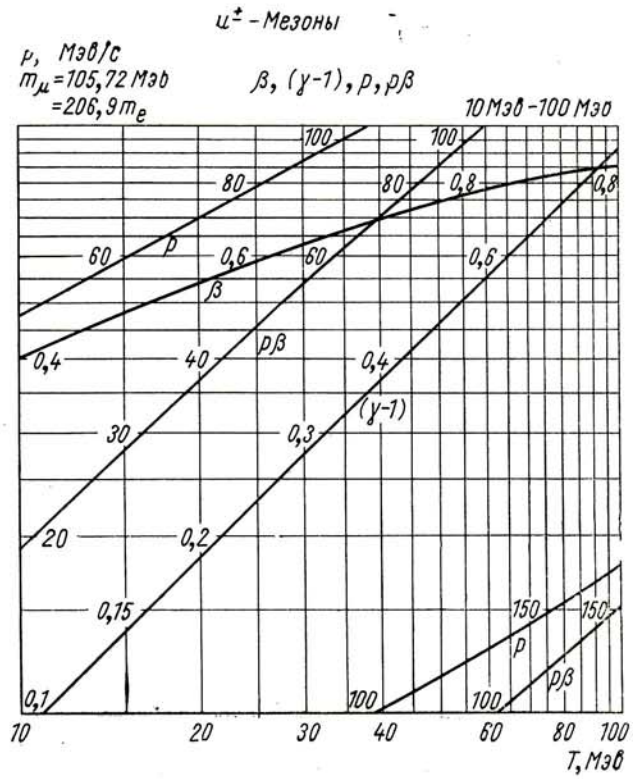


Рис. 60

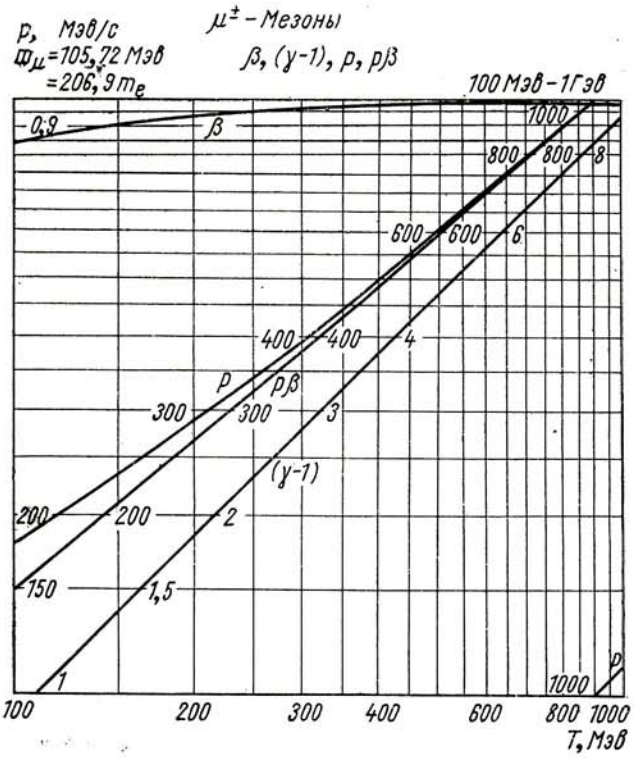


Рис 61

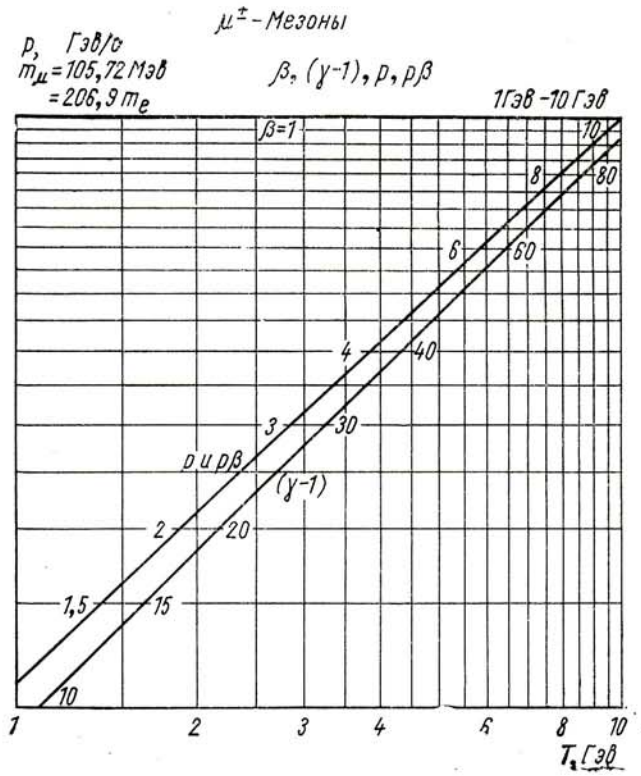


Рис. 62

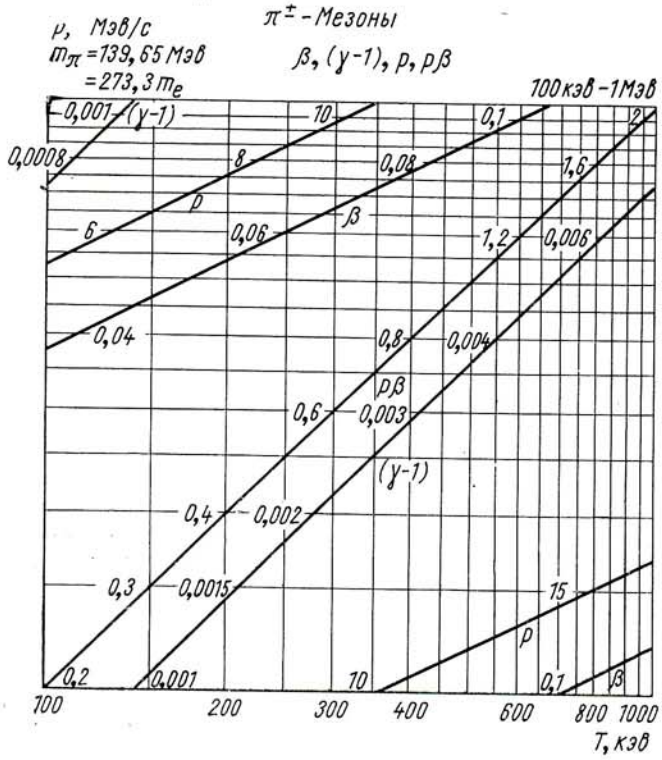


Рис. 63

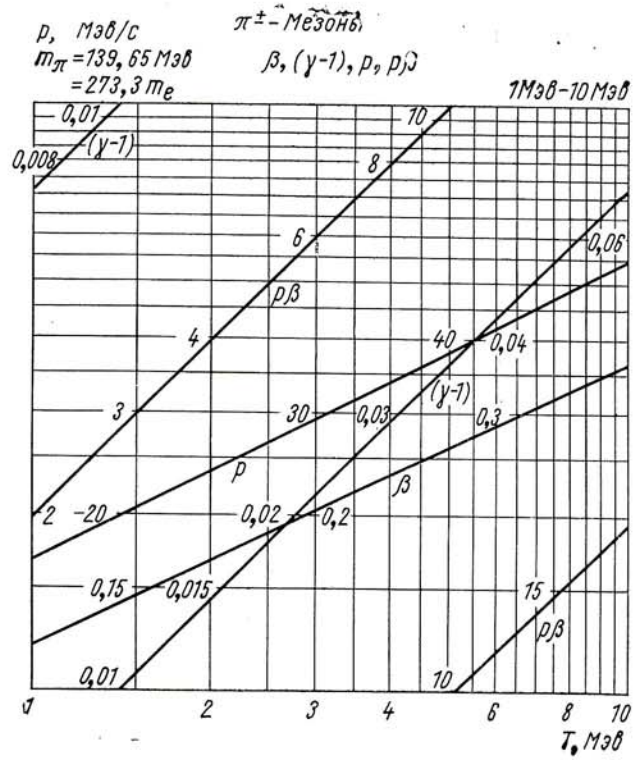


Рис. 64

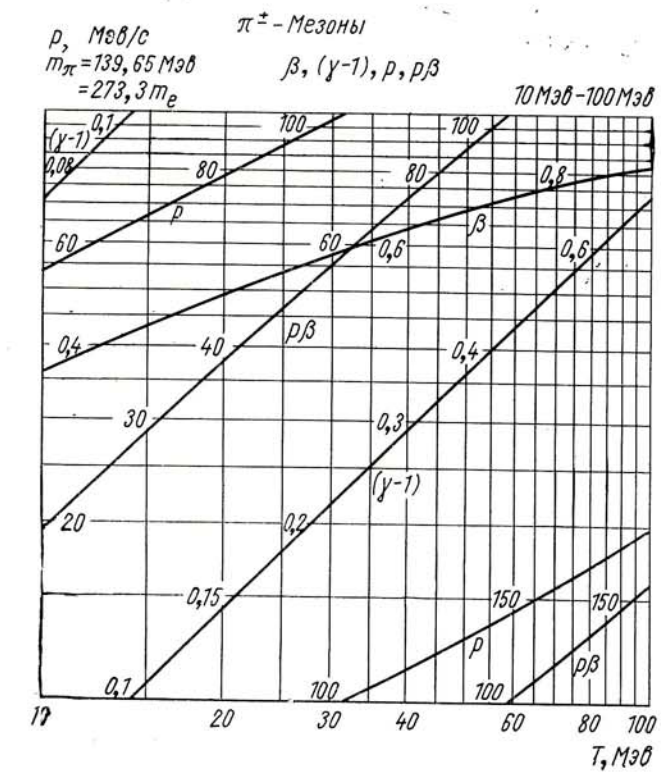


Рис. 65

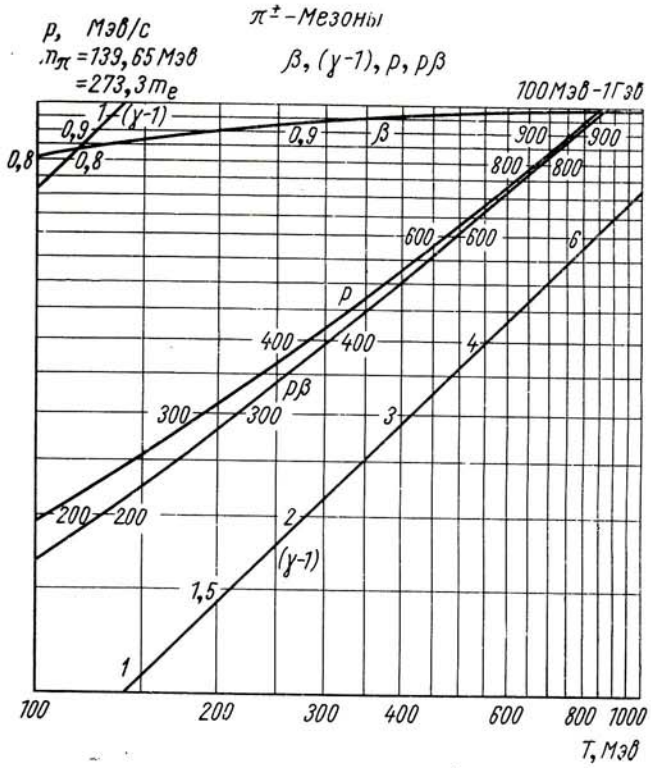


Рис. 66

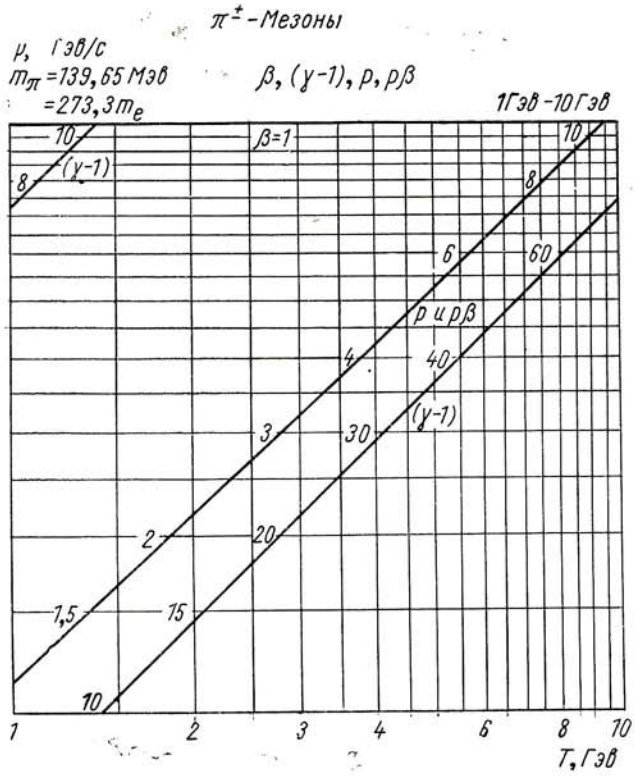


Рис. 67

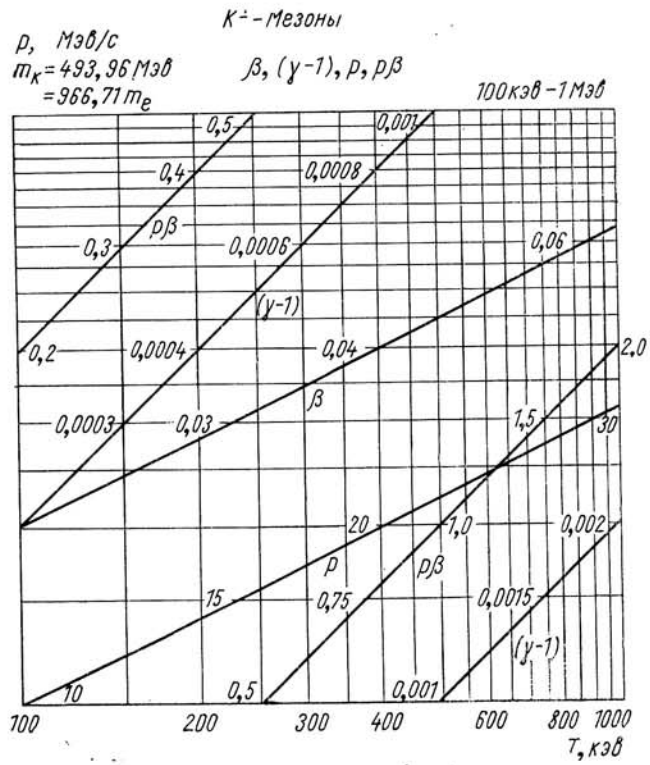


Рис 68

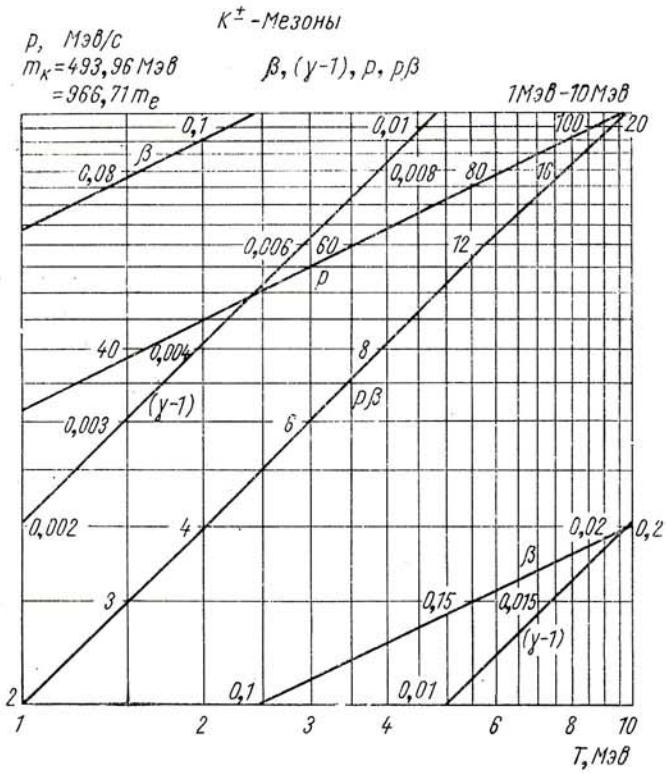


Рис. 69

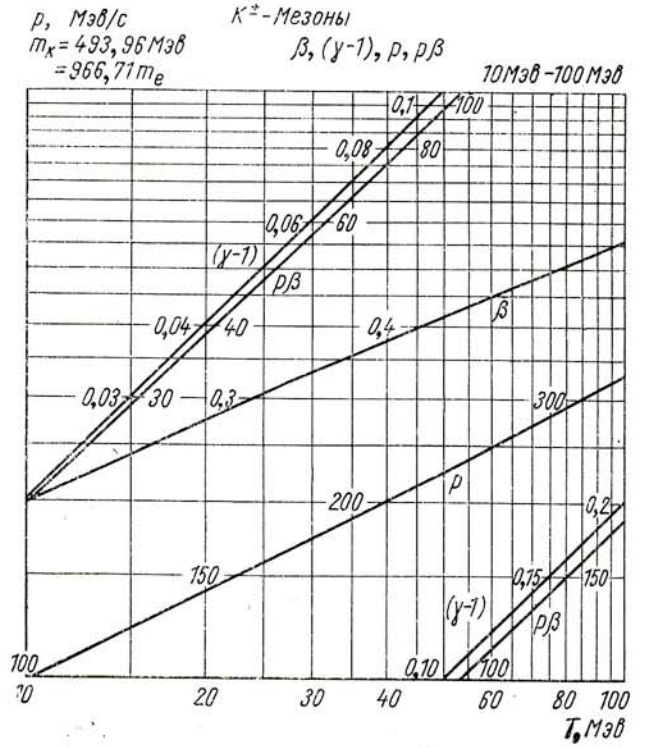


Рис. 70

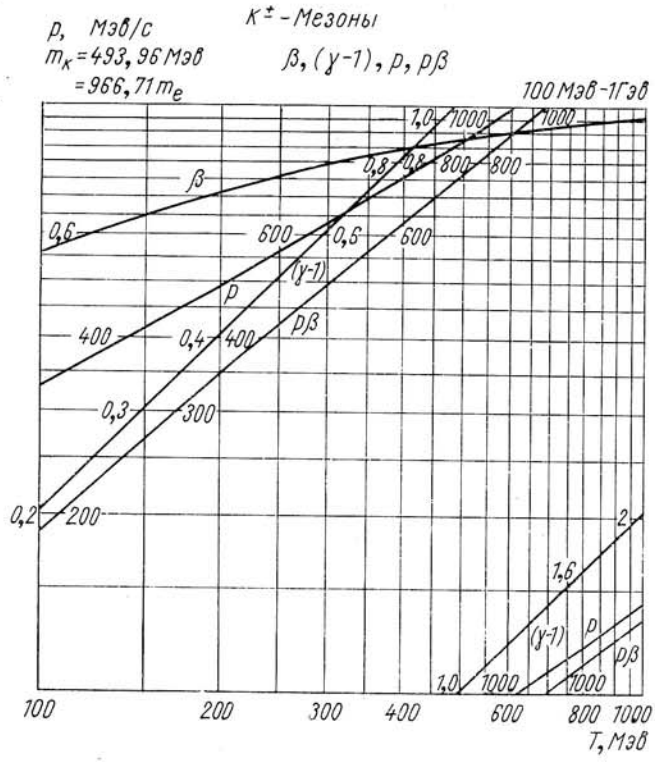


Рис. 71

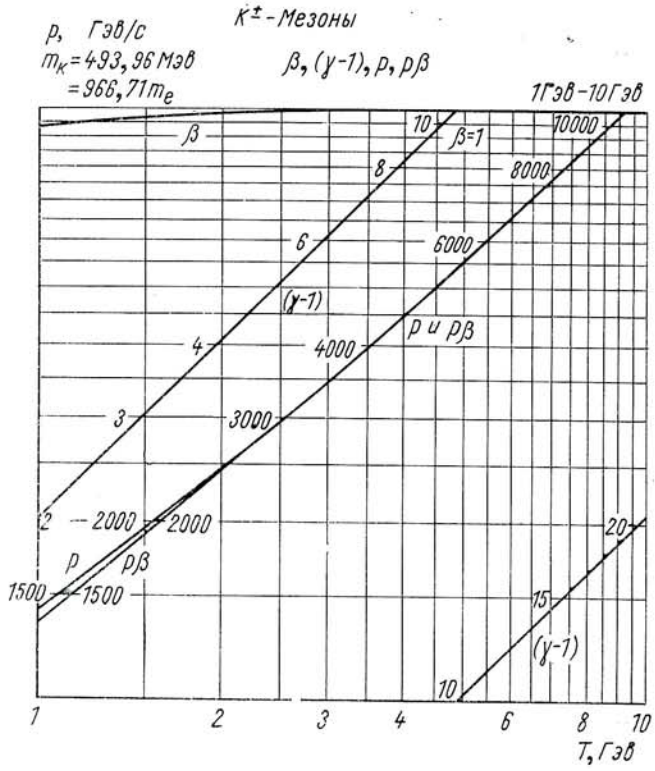


Рис. 72

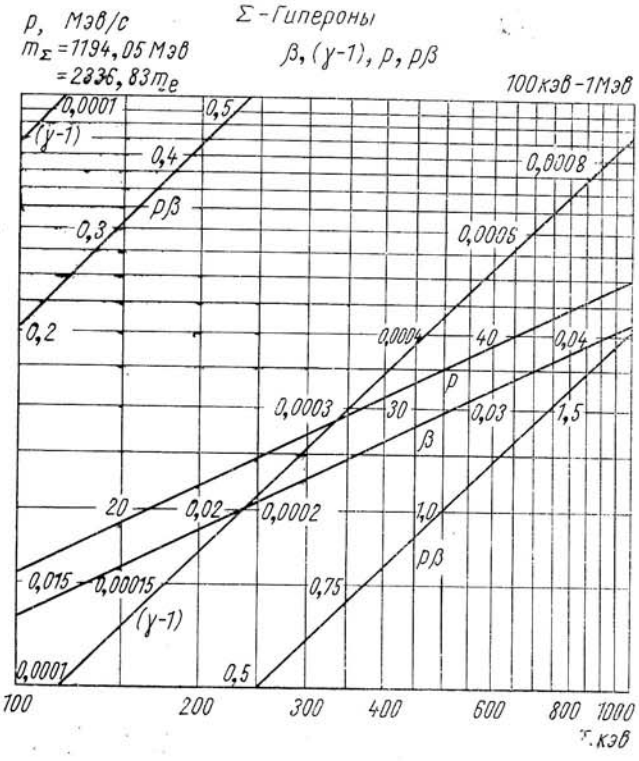


Рис. 73

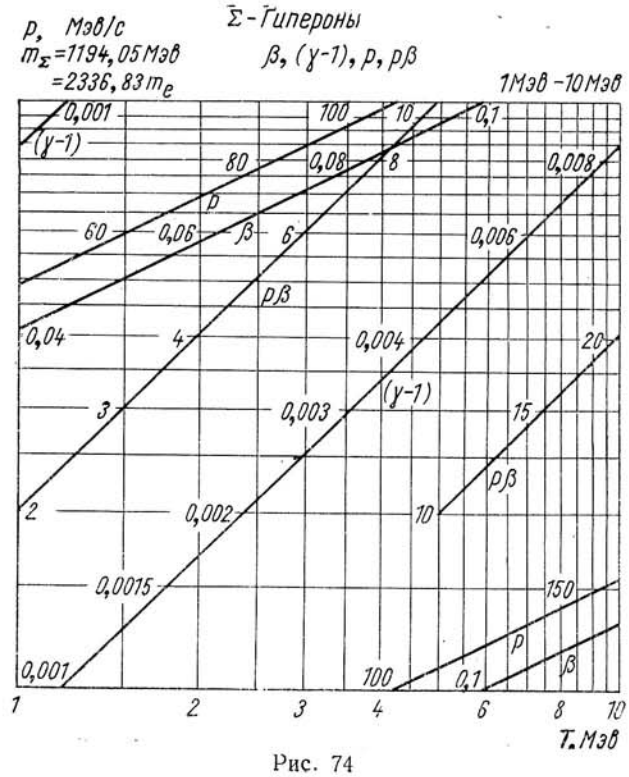


Рис. 74

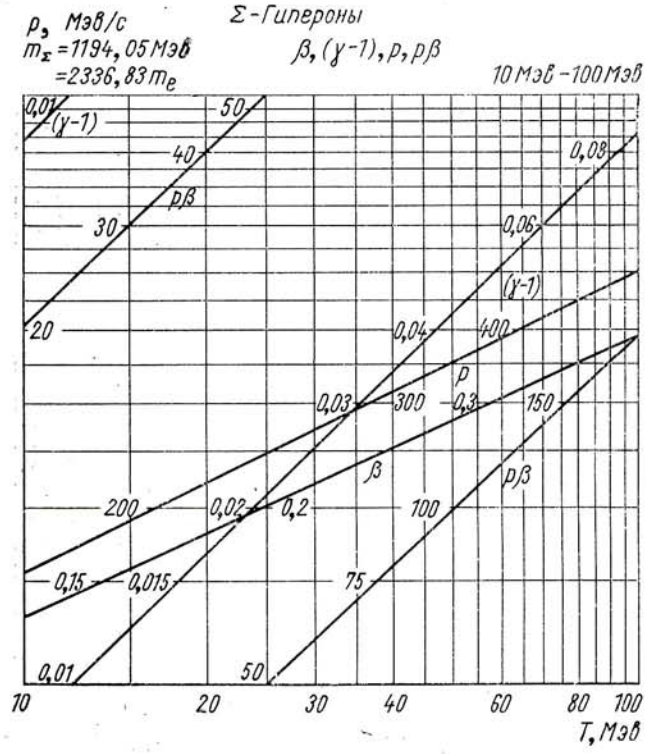


Рис. 75

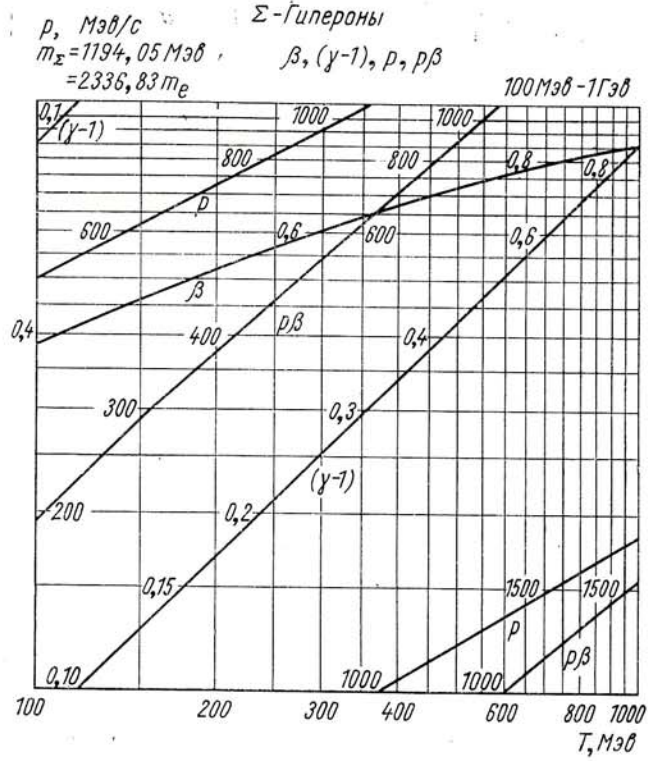


Рис. 76

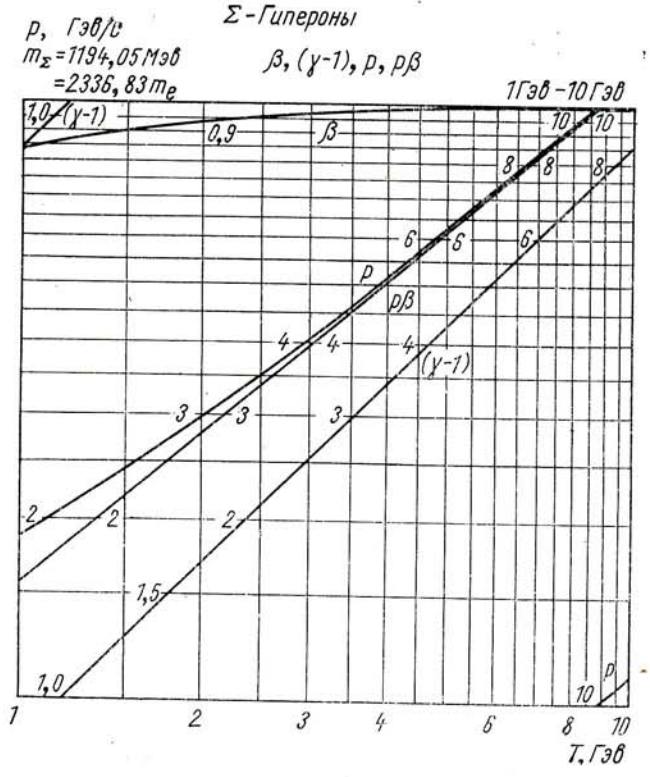


Рис. 77

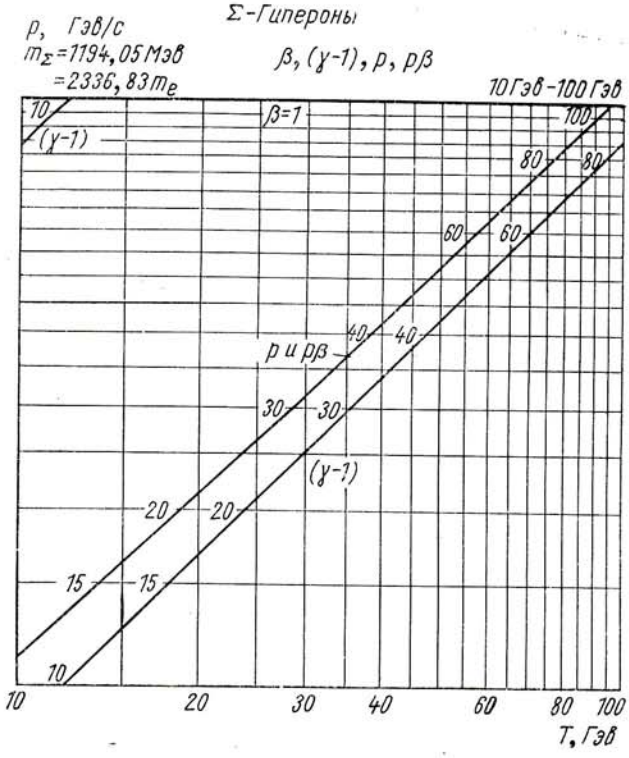


Рис. 78

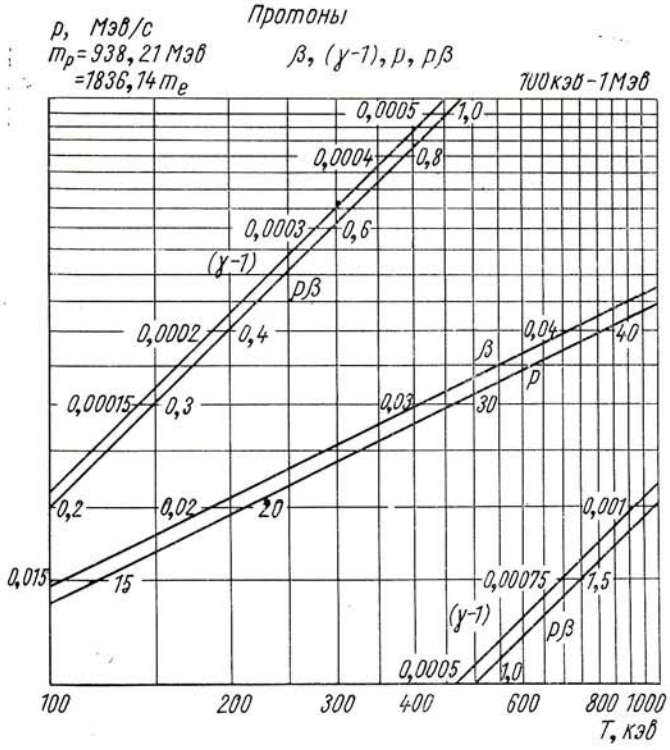


Рис. 79

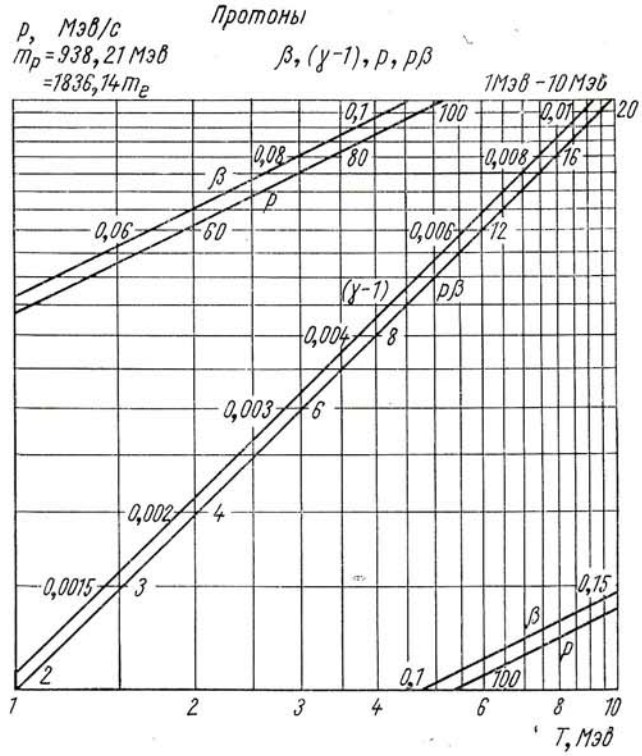


Рис. 80

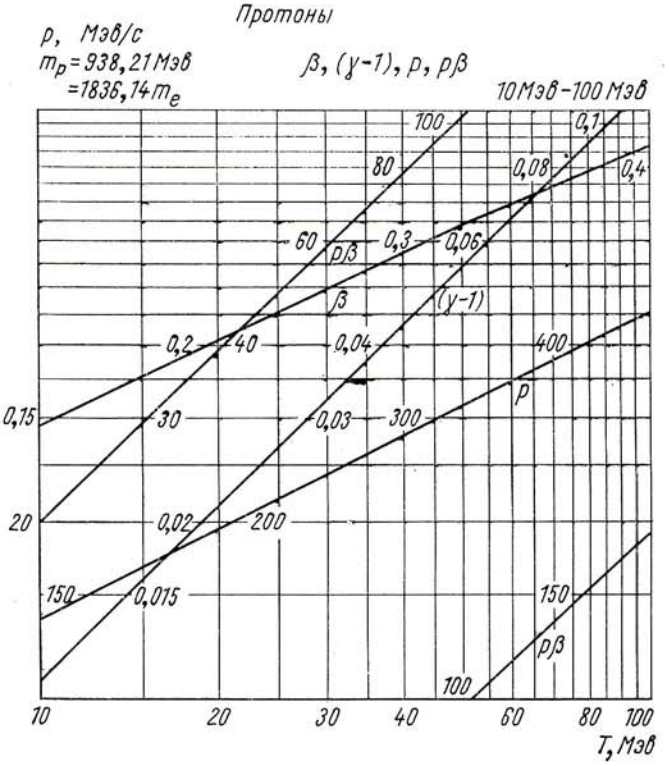


Рис. 81

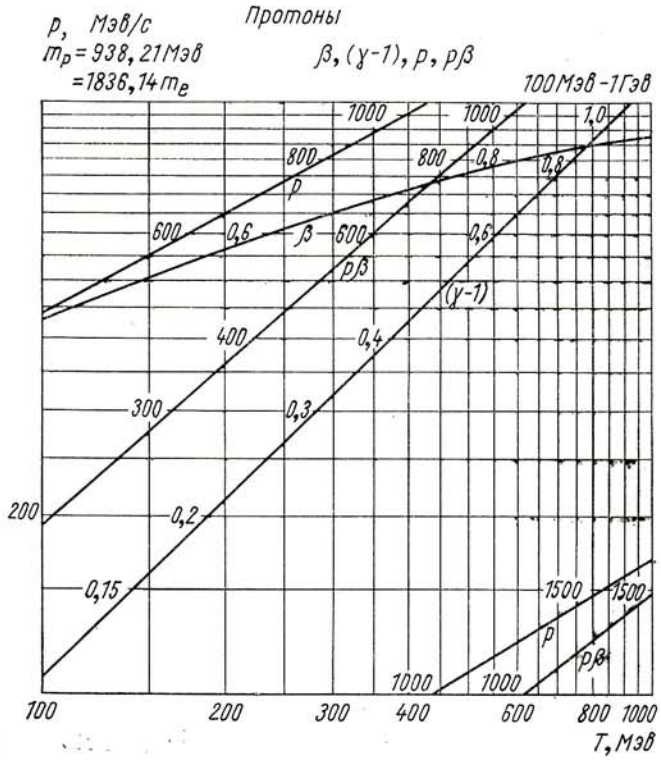


Рис. 82

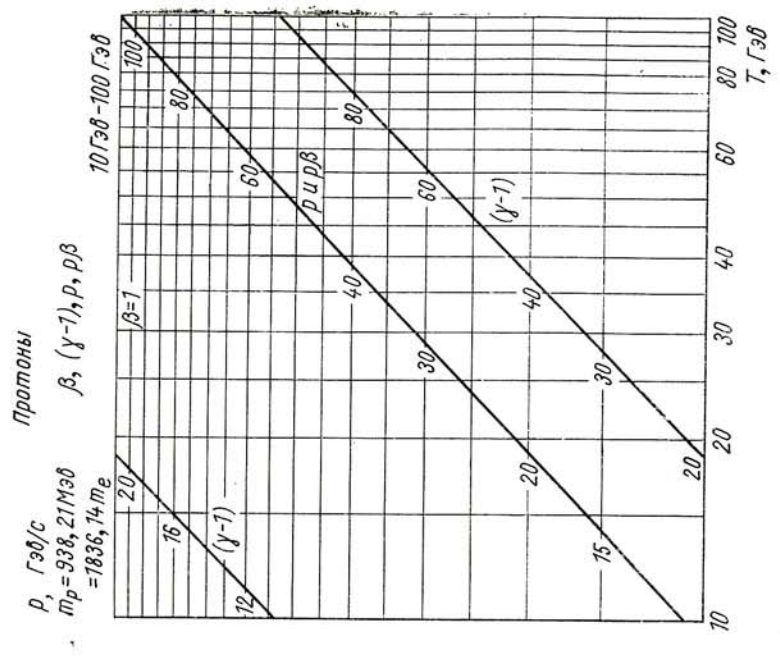


Рис. 82

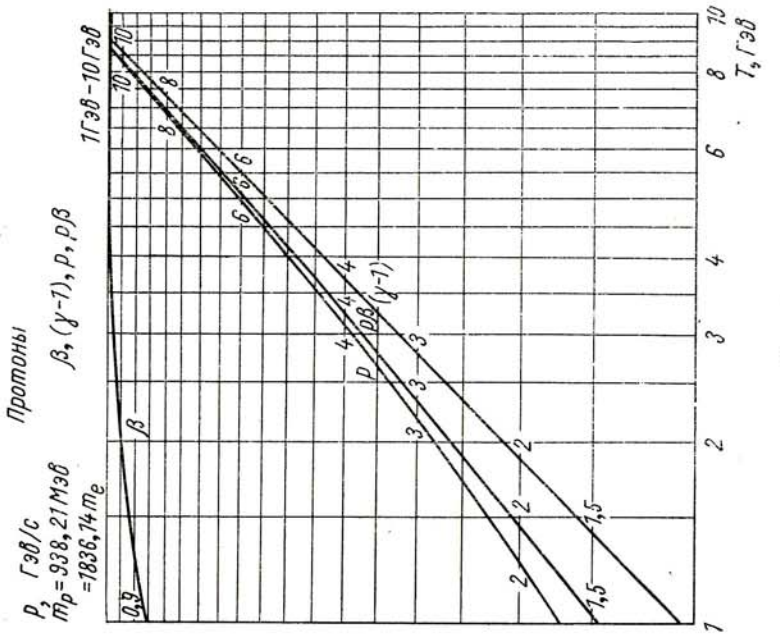


Рис. 83

Приложение II

ПЕРЕХОД ОТ ПОЛЯРНЫХ УГЛОВ ϑ В *Л*-СИСТЕМЕ К ПОЛЯРНЫМ УГЛАМ ϑ^* В *Ц*-СИСТЕМЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ γ_c И β (РИС. 86—100).

Для построения графиков были использованы таблицы, рассчитанные в секторе сильных взаимодействий Лаборатории космических лучей ордена Ленина Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР. Авторы выражают свою признательность этому коллективу за предоставление указанных таблиц.

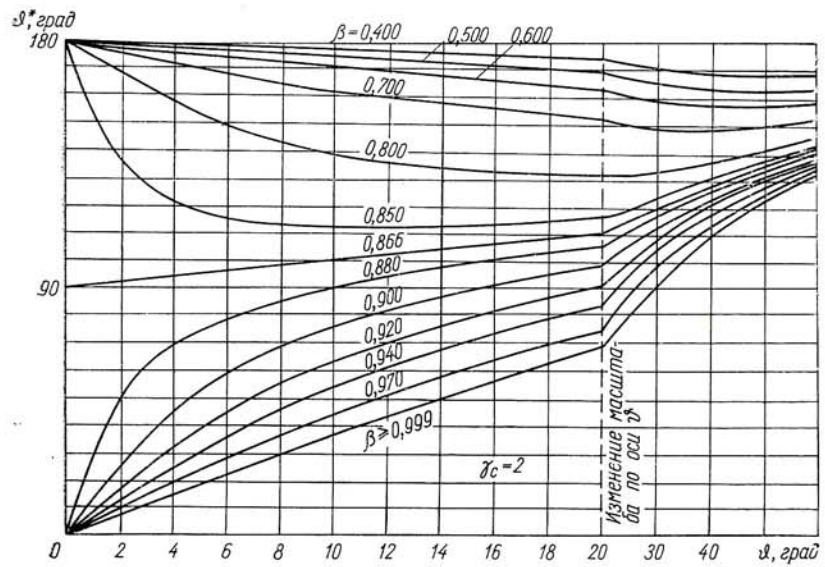


Рис. 85

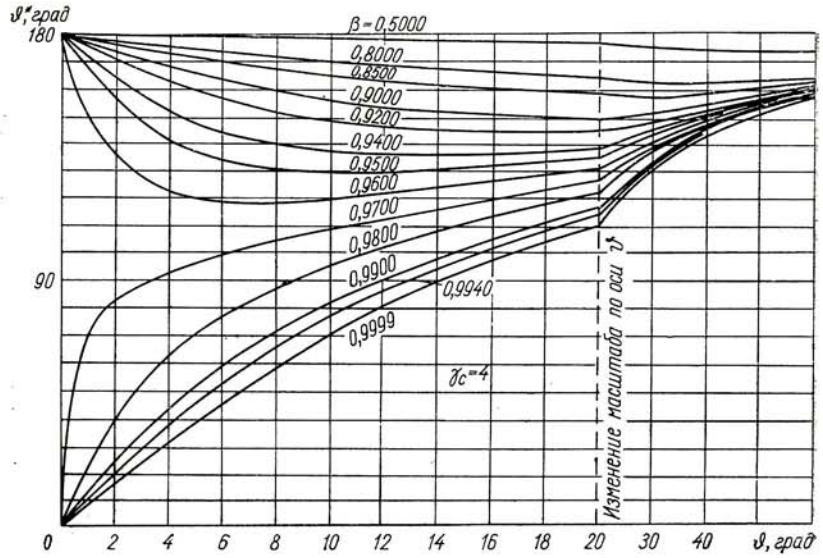


Рис 86

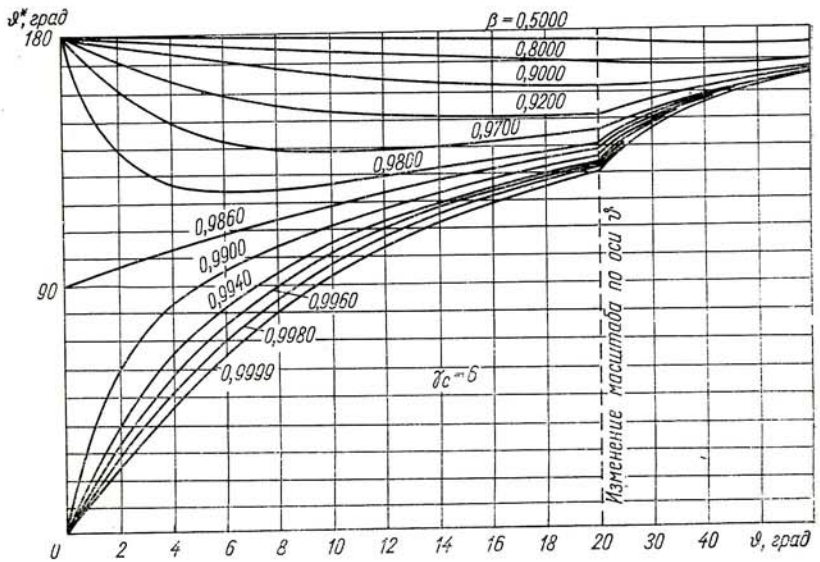


Рис. 87

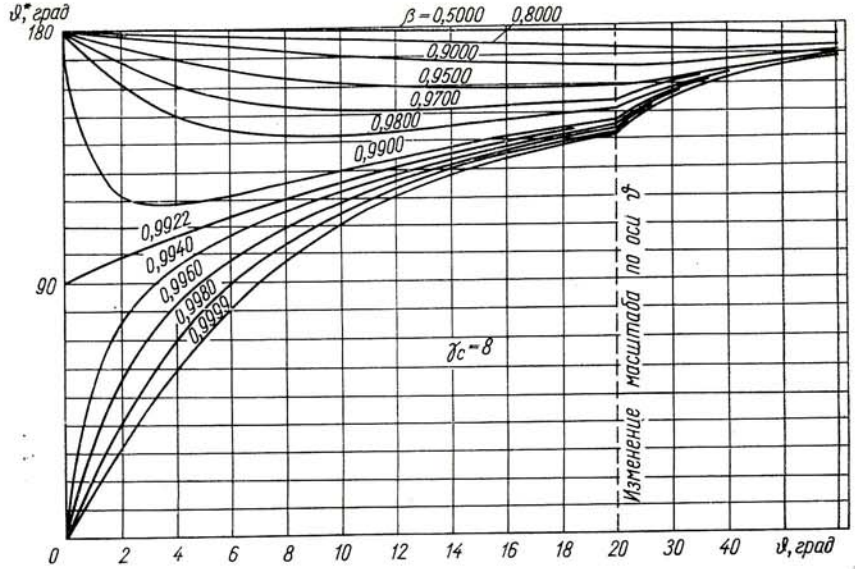


Рис. 88

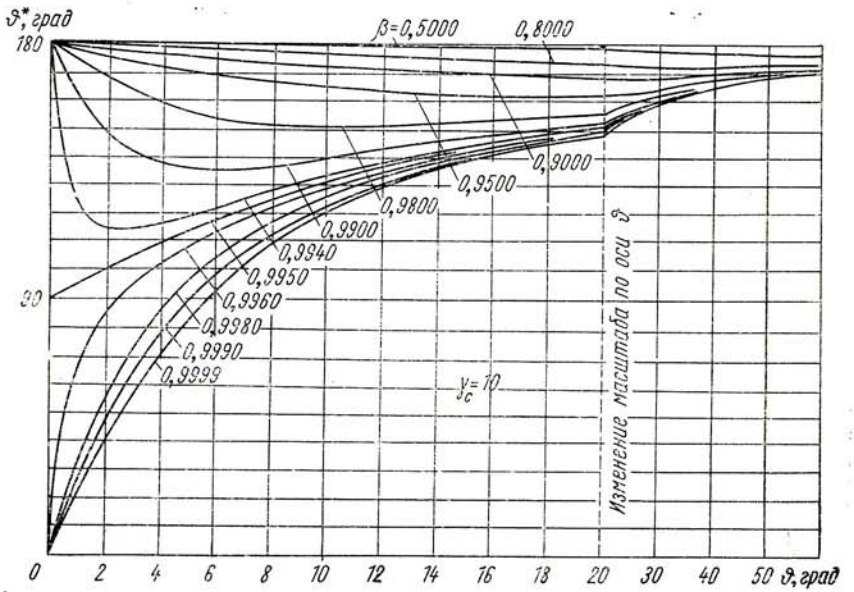


Рис. 89

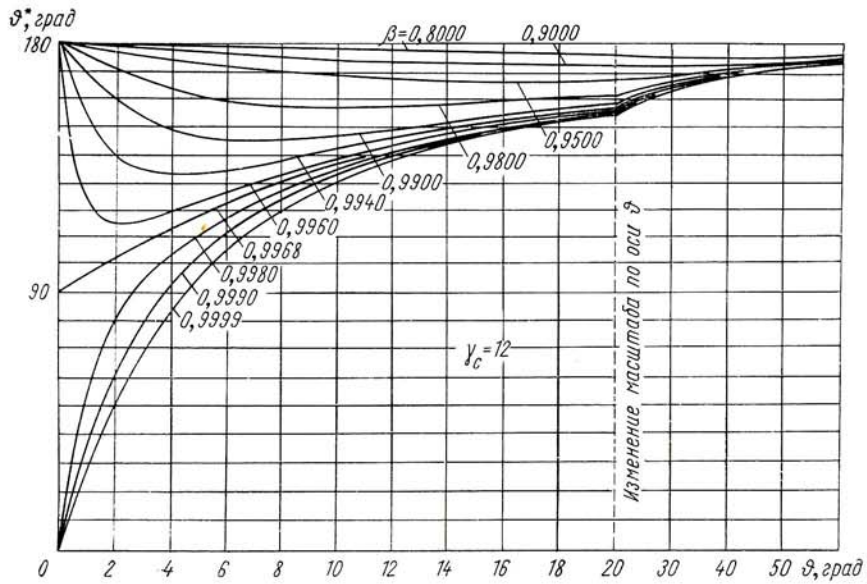


Рис. 90

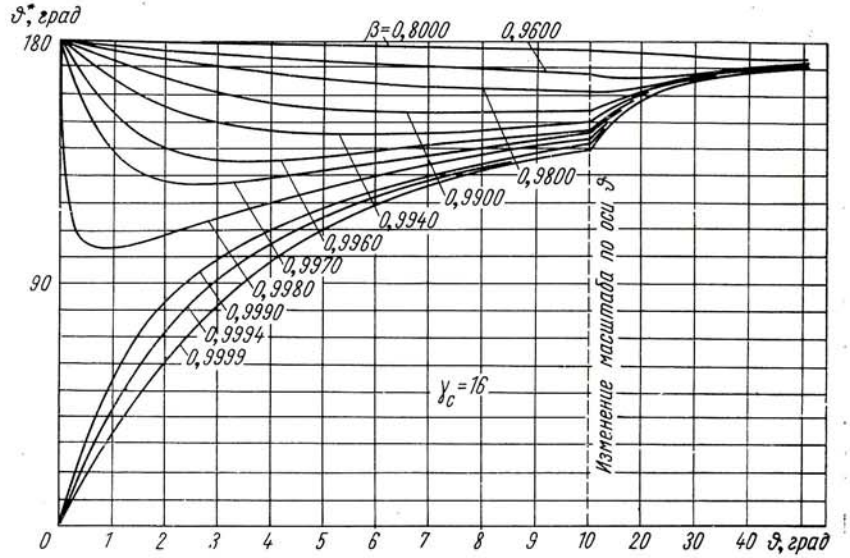


Рис. 92

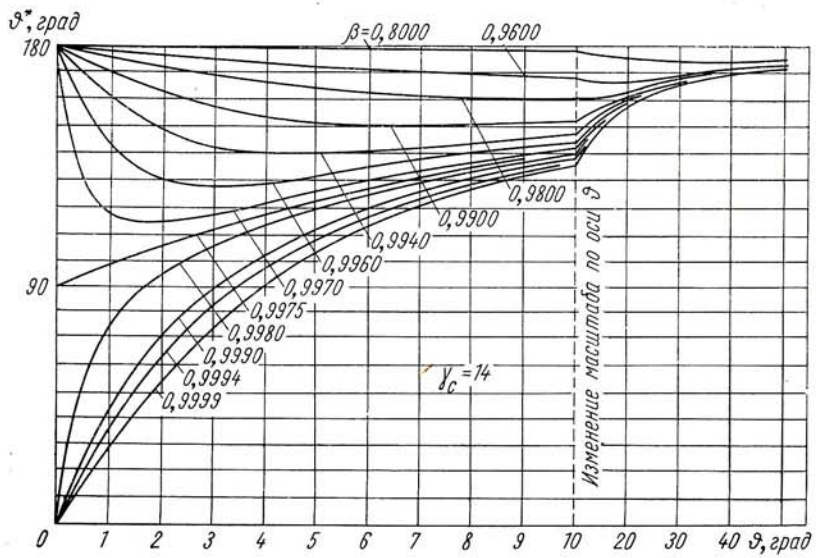


Рис. 91

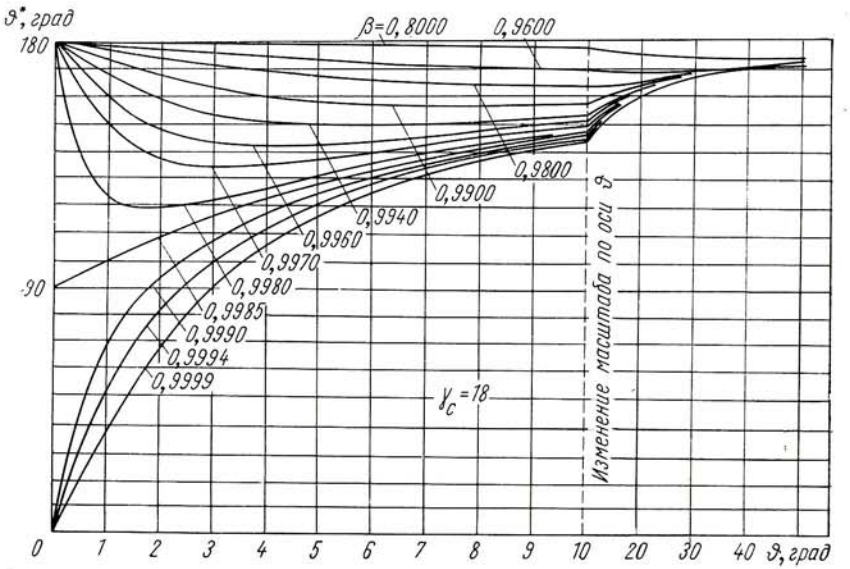


Рис. 93

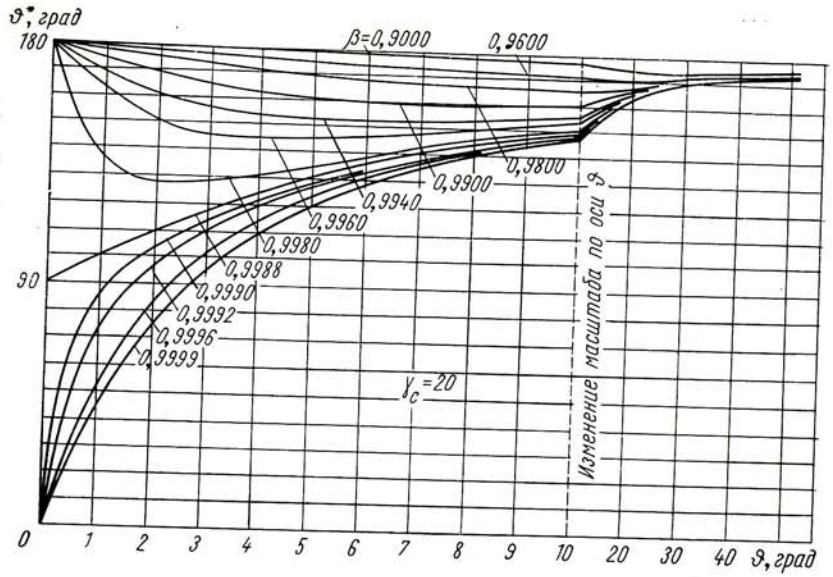


Рис. 94

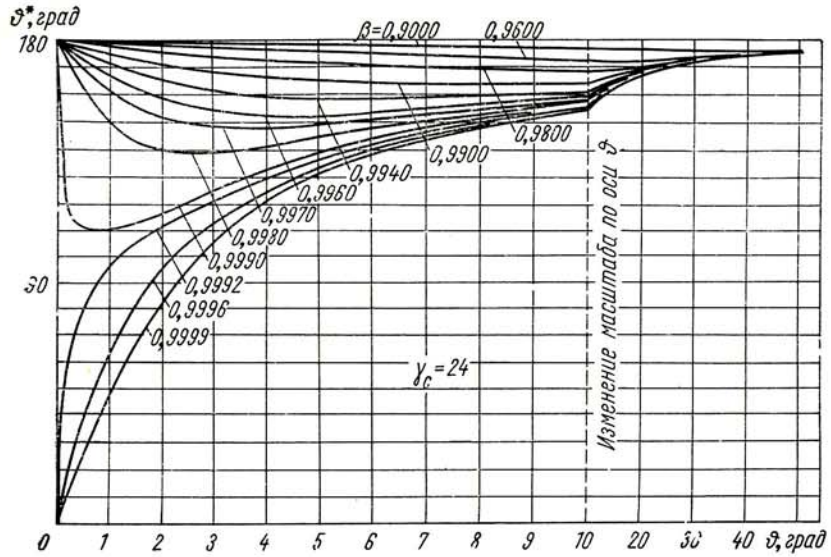


Рис. 96

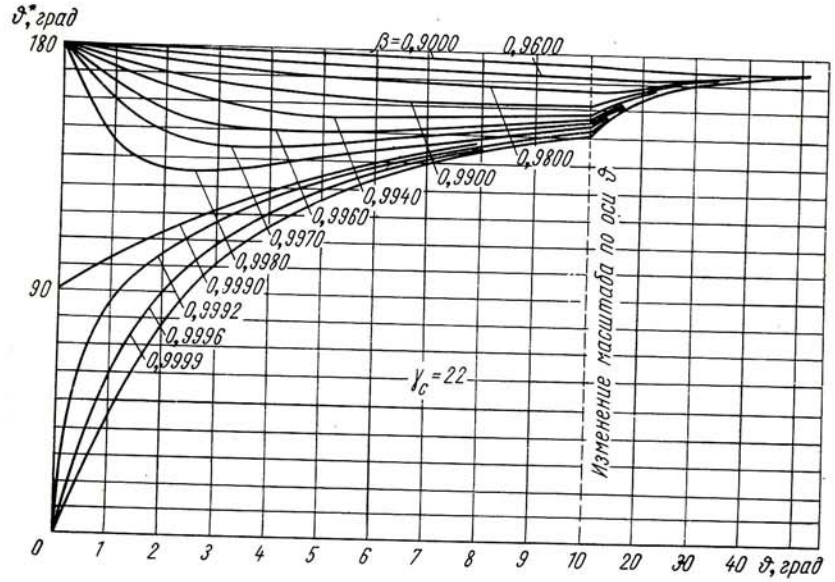


Рис. 95

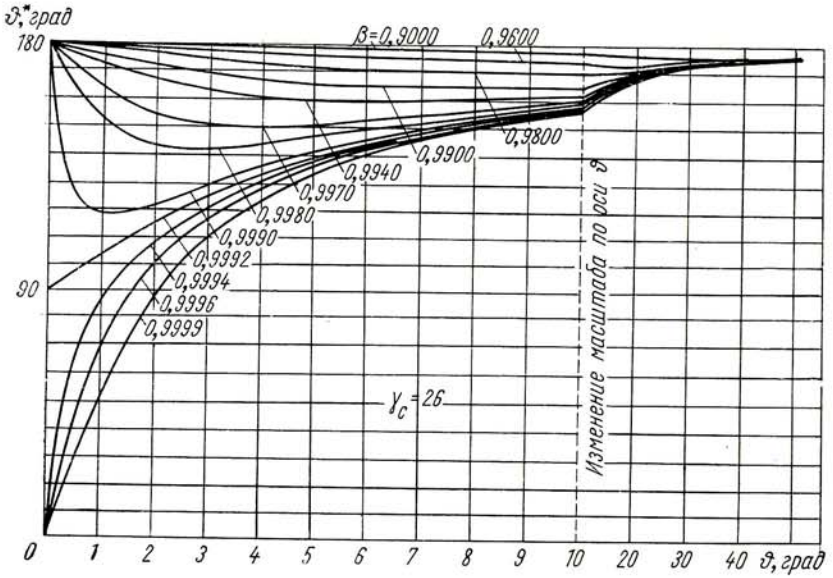


Рис. 97

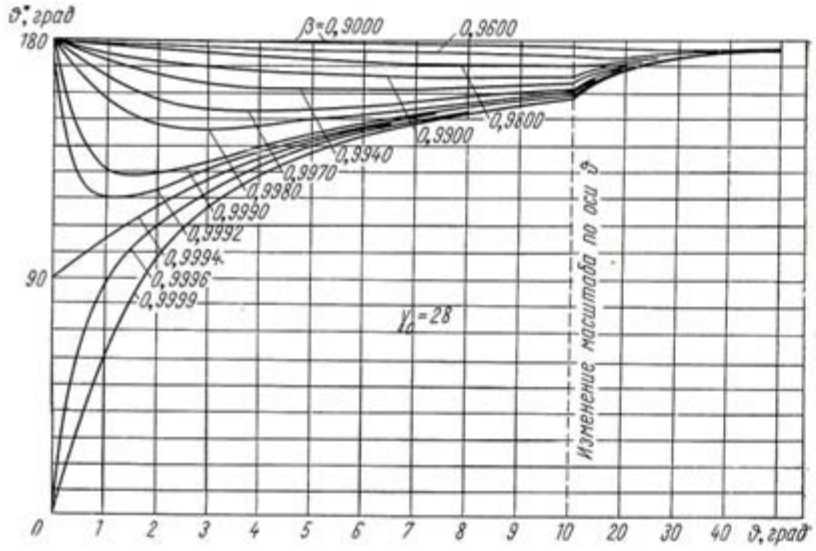


Рис. 98

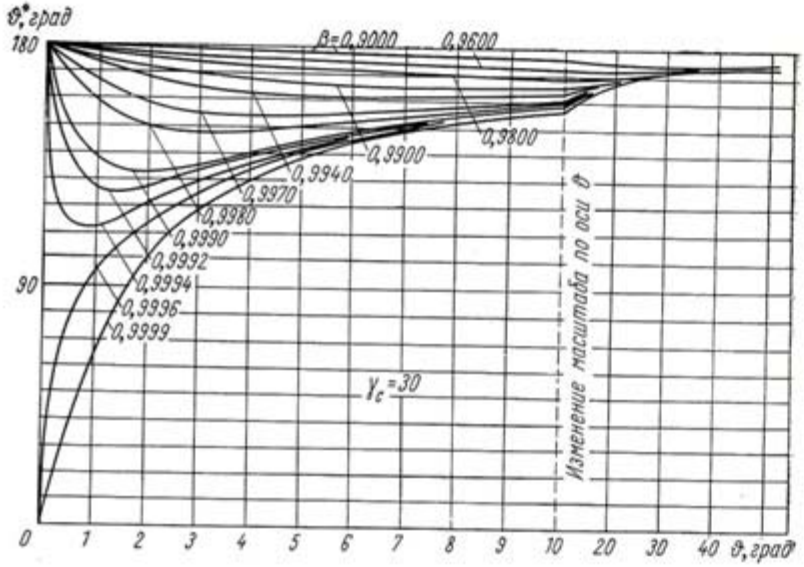


Рис. 99

Приложение III

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОРОГИ РЕАКЦИЙ

В табл. 1, 2, 3 и 4 приведены значения пороговой кинетической энергии $T_{01}^{(\text{порог})}$, *Гэв* некоторых реакций с 2, 3 и 4 частицами в конечном состоянии (C. O. Beasley, Jr., W. G. Holladay, Nuovo Cimento Suppl., 7, 77, 1958). Колонка с $T_{02} = 0$ относится к покоящемуся нуклону-мишени, а колонка с $T_{02} = 25$ *Мэв* — к нуклону-мишени, движущемуся с указанной кинетической энергией навстречу налетающей частице. При расчетах использованы следующие значения масс частиц ($Гэв/c^2$):

$m_N = 0{,}939$; $m_\pi = 0{,}139$; $m_K = 0{,}493$; $m_\Lambda = 1{,}115$; $m_\Sigma = 1{,}189$; $m_\Xi = 1{,}321$.

Таблица 1

Начальные частицы / Продукты реакции	$\gamma + N$ или $e + N^*$		$\pi + N$	
	$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мэв*	$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мэв*
$N + \pi$	0,15	0,12	—	—
$K + \Lambda^\circ$	0,91	0,72	0,76	0,58
$K + \Sigma$	1,04	0,82	0,89	0,68
$N + 2\pi$	0,32	0,26	0,17	0,11
$K + \Lambda^\circ + \pi$	1,15	0,91	1,01	0,77
$K + \Sigma + \pi$	1,29	1,03	1,15	0,88
$N + \widetilde{K} + \widetilde{K}$	1,50	1,19	1,36	1,05
$2K + \Xi$	2,36	1,87	2,20	1,73
$2N + \widetilde{N}$	3,75	2,98	3,61	2,83
$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Lambda}^\circ$	4,88	3,87	4,73	3,72
$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma}$	5,13	3,93	4,98	4,07
$N + \Lambda^\circ + \Sigma$	5,13	3,93	4,98	4,07
$N + \Sigma + \widetilde{\Sigma}$	5,38	4,27	5,24	4,12
$2\Lambda^\circ + \Omega$	6,24	4,95	6,10	4,81
$N + \Xi + \Omega$	6,35	5,04	6,21	4,89
$\Lambda^\circ + \Sigma + \Omega$	6,53	5,17	6,38	5,02
$2\Sigma + \Omega$	6,82	5,40	6,67	5,25
$N + 3\pi$	0,51	0,40	0,36	0,26
$K + \Lambda^\circ + 2\pi$	1,41	1,12	1,27	0,98

Продолжение табл. 1

Начальные частицы / Продукты реакции	$\gamma + N$ или $e + N^*$		$\pi + N$	
	$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мэв*	$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мев*
$K + \Sigma + 2\pi$	1,57	1,24	1,42	1,10
$K + N + \pi + \widetilde{K}$	1,79	1,42	1,65	1,28
$2K + \pi + \Xi$	2,71	2,15	2,56	2,01
$2K + \Lambda^\circ + \widetilde{K}$	3,11	2,47	2,97	2,33
$2K + \Sigma + \widetilde{K}$	3,32	2,63	3,17	2,49
$2N + \pi + \widetilde{N}$	4,18	3,31	4,03	3,16
$N + \pi + \Lambda^\circ + \widetilde{\Lambda}^\circ$	5,36	4,25	5,20	4,09
$N + \pi + \Sigma + \widetilde{\Lambda}^\circ$	5,61	4,45	5,46	4,31
$N + \pi + \Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma}$	5,61	4,45	5,46	4,31
$N + \pi + \Sigma + \widetilde{\Sigma}$	5,88	4,66	5,73	4,53
$N + \Lambda^\circ + \widetilde{N} + K$	5,99	4,76	5,85	4,62
$2N + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	5,99	4,76	5,85	4,62
$N + \Sigma + \widetilde{N} + K$	6,27	4,98	6,13	4,83
$2N + \widetilde{\Sigma} + \widetilde{K}$	6,27	4,98	6,13	4,83
$2\Lambda^\circ + \widetilde{\Xi} + \pi$	6,77	5,37	6,62	5,23
$N + \Xi + \widetilde{\Xi} + \pi$	6,88	5,46	6,74	5,31
$\Lambda^\circ + \Sigma + \widetilde{\Xi} + \pi$	7,07	5,60	6,92	5,46
$2\Sigma + \widetilde{\Xi} + \pi$	7,36	5,84	7,21	5,69
$2\Lambda^\circ + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	7,36	5,84	7,21	5,69
$N + \Xi + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	7,49	5,94	7,35	5,80
$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Xi} + \widetilde{K}$	7,49	5,94	7,35	5,80
$\Lambda^\circ + \Sigma + \widetilde{\Lambda}^0 + K$	7,68	6,09	7,53	5,93
$2\Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma} + K$	7,68	6,09	7,53	5,93
$N + \Xi + \widetilde{\Sigma} + K$	7,8	6,2	7,66	6,05
$N + \Sigma + \widetilde{\Xi} + \widetilde{K}$	7,8	6,2	7,66	6,05
$2\Sigma + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	8,0	6,3	7,8	6,2
$\Sigma + \Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma} + K$	8,0	6,3	7,8	6,2
$2\Sigma + \widetilde{\Sigma} + K$	8,3	6,6	8,2	6,4
$\Lambda^\circ + \Xi + \widetilde{\Xi} + K$	9,1	7,3	9,0	7,1
$\Sigma + \Xi + \widetilde{\Xi} + K$	9,5	7,5	9,3	7,4

* В этом случае электрон должен быть включен в число продуктов реакции.

Таблица 2

Начальные частицы / Продукты реакции	$N + N$		Начальные частицы / Продукты реакции	$K + N$	
	$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мэв*		$T_{02} = 0$	$T_{02} = 25$ *Мэв*
$2N + \pi$	0,29	0,14	$N + K + \pi$	0,22	0,12
$N + \Lambda^\circ + K$	1,58	1,10	$\Lambda^\circ + 2K$	1,26	0,91
$N + \Sigma + K$	1,78	1,26	$\Sigma + 2K$	1,43	1,05
$2N + 2\pi$	0,59	0,35	$2N + \widetilde{\Lambda}^\circ$	3,68	2,82
$N + \Lambda^\circ + K + \pi$	1,96	1,40	$2N + \widetilde{\Sigma}$	3,91	3,01
$N + \Sigma + K + \pi$	2,17	1,57	$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Xi}$	4,97	3,85
$2N + K + \widetilde{K}$	2,49	1,81	$N + \Sigma + \widetilde{\Xi}$	5,24	4,06
$2\Lambda^\circ + 2K$	3,63	2,70	$N + K + 2\pi$	0,46	0,29
$N + 2K + \Xi$	3,73	2,78	$\Lambda^\circ + 2K + \pi$	1,58	1,17
$2K + \Lambda^\circ + \Sigma$	3,88	2,91	$\Sigma + 2K + \pi$	1,76	1,31
$2K + 2\Sigma$	4,15	3,11	$N + 2K + \widetilde{K}$	2,03	1,52
$3N + \widetilde{N}$	5,63	4,20	$\Xi + 3K$	3,09	2,36
$2N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Lambda}^\circ$	7,10	5,45	$2N + \widetilde{\Lambda}^\circ + \pi$	4,12	3,18
$2N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma}$	7,43	5,72	$2N + \widetilde{\Sigma} + \pi$	4,37	3,37
$2N + \Sigma + \widetilde{\Lambda}^\circ$	7,43	5,72	$2N + \widetilde{N} + K$	4,75	3,67
$2N + \Sigma + \widetilde{\Sigma}$	7,76	5,98	$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Xi} + \pi$	5,47	4,25
$N + 2\Lambda^\circ + \widetilde{\Xi}$	8,9	6,8	$N + \widetilde{\Xi} + \Sigma + \pi$	5,76	4,47
$2N + \Xi + \widetilde{\Xi}$	9,0	7,0	$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	6,05	4,71
$N + \Lambda^\circ + \Sigma + \widetilde{\Xi}$	9,2	7,1	$2N + \widetilde{\Xi} + \widetilde{K}$	6,17	4,79
$N + 2\Sigma + \widetilde{\Xi}$	9,6	7,4	$N + \Lambda^\circ + \widetilde{\Sigma} + K$	6,35	4,94
			$N + \Sigma + \widetilde{\Lambda}^\circ + K$	6,35	4,94
			$N + \Sigma + \widetilde{\Sigma} + K$	6,65	5,17
			$2\Lambda^\circ + \widetilde{\Xi} + K$	7,61	5,95
			$N + \Xi + \widetilde{\Xi} + K$	7,75	6,05
			$\Lambda^\circ + \Sigma + \widetilde{\Xi} + K$	7,94	6,21
			$2\Sigma + \widetilde{\Xi} + K$	8,27	6,46

Таблица 3

Продукты реакции / Начальные частицы	$\widetilde{K}+N$	
	$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв
$\Lambda^\circ+\pi$	экзотермическая	
$\Sigma+\pi$	экзотермическая	
$\Xi+K$	0,66	0,45
$\Lambda^\circ+2\pi$	экзотермическая	
$\Sigma+2\pi$	экзотермическая	
$\widetilde{K}+N+\pi$	0,22	0,12
$\Xi+K+\pi$	0,93	0,66
$\Lambda^\circ+K+\widetilde{K}$	1,26	0,92
$\Sigma+K+\widetilde{K}$	1,43	1,05
$N+\Lambda^\circ+\widetilde{N}$	3,68	2,83
$\Sigma+N+\widetilde{N}$	3,92	3,02
$2\Lambda^\circ+\Lambda^\circ$	4,87	3,77
$N+\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ$	4,97	3,86
$2\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}$	5,13	3,98
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\Sigma$	5,13	3,98
$N+\Xi+\widetilde{\Sigma}$	5,24	4,07
$\Lambda^\circ+2\Sigma$	5,40	4,21
$\Lambda^\circ+\Sigma+\widetilde{\Sigma}$	5,40	4,21
$2\Sigma+\widetilde{\Sigma}$	5,68	4,12
$\Lambda^\circ+\Xi+\widetilde{\Xi}$	6,42	5,01
$\Sigma+\Xi+\widetilde{\Xi}$	6,72	5,25
$\Lambda^\circ+3\pi$	0,15	0,07
$\Sigma+3\pi$	0,27	0,15
$\widetilde{K}+N+2\pi$	0,46	0,29
$K+\Xi+2\pi$	1,23	0,90
$\widetilde{K}+K+\Lambda^\circ+\pi$	1,57	1,16
$\widetilde{K}+K+\Sigma+\pi$	1,75	1,31
$2\widetilde{K}+K+N$	2,02	1,52
$2K+\widetilde{K}+\Xi$	3,08	2,36

Продукты реакции / Начальные частицы	$\widetilde{K}+N$	
	$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв
$N+\Lambda^\circ+\widetilde{N}+\pi$	4,12	3,18
$N+\Sigma+\widetilde{N}+\pi$	4,37	3,38
$2N+\widetilde{N}+\widetilde{K}$	4,74	3,65
$2\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\pi$	5,36	4,17
$N+\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+\pi$	5,47	4,26
$2\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}+\pi$	5,64	4,39
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\Sigma+\pi$	5,64	4,39
$N+\Xi+\widetilde{\Sigma}+\pi$	5,75	4,48
$2\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+\pi$	5,92	4,60
$\Lambda^\circ+\Sigma+\widetilde{\Sigma}+\pi$	5,92	4,60
$N+\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+K$	6,05	4,71
$2\Lambda^\circ+\widetilde{N}+K$	6,05	4,71
$N+\Xi+\widetilde{N}+K$	6,17	4,80
$2\Sigma+\widetilde{\Sigma}+\pi$	6,21	4,84
$\widetilde{K}+N+\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}$	6,34	4,94
$\widetilde{K}+N+\widetilde{\Lambda}^\circ+\Sigma$	6,34	4,94
$K+\widetilde{N}+\Lambda^\circ+\Sigma$	6,34	4,94
$\widetilde{K}+N+\Sigma+\widetilde{\Sigma}$	6,64	5,18
$K+\widetilde{N}+2\Sigma$	6,64	5,18
$\Lambda^\circ+\Xi+\widetilde{\Xi}+\pi$	6,98	5,45
$\Sigma+\Xi+\widetilde{\Xi}+\pi$	7,29	5,70
$\widetilde{K}+2\Lambda^\circ+\widetilde{\Xi}$	7,61	5,96
$K+\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\Xi$	7,61	5,96
$K+N+\Xi+\widetilde{\Xi}$	7,74	6,06
$\widetilde{K}+\Lambda^\circ+\Sigma+\widetilde{\Xi}$	7,94	6,21
$K+\widetilde{\Lambda}^\circ+\Sigma+\Xi$	7,94	6,21
$K+\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}+\Xi$	7,94	6,21
$\widetilde{K}+2\Sigma+\widetilde{\Xi}$	8,26	6,47
$\widetilde{K}+\Sigma+\widetilde{\Sigma}+\Xi$	8,26	6,47
$K+2\Xi+\widetilde{\Xi}$	9,48	7,43

Таблица 4

Продукты реакции / Начальные частицы	$\widetilde{N}+N$	
	$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ$	0,77	0,48
$\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ$	0,95	0,62
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}$	0,95	0,62
$\Sigma+\widetilde{\Sigma}$	1,13	0,76
$\Xi+\widetilde{\Xi}$	1,84	1,30
$N+\widetilde{N}+\pi$	0,29	0,14
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\pi$	1,11	0,74
$\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+\pi$	1,30	0,88
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}+\pi$	1,30	0,88
$\Sigma+\widetilde{\Sigma}+\pi$	1,49	1,03
$\Lambda^\circ+\widetilde{N}+K$	1,58	1,10
$N+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{K}$	1,58	1,10
$\Sigma+\widetilde{N}+K$	1,78	1,24
$N+\widetilde{\Sigma}+\widetilde{K}$	1,78	1,24
$\Xi+\widetilde{\Xi}+\pi$	2,23	1,61
$\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+K$	2,69	1,97
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Xi}+\widetilde{K}$	2,69	1,97
$\Xi+\widetilde{\Sigma}+K$	2,93	2,16
$\Sigma+\widetilde{\Xi}+\widetilde{K}$	2,93	2,16
$2K+2\widetilde{K}$	0,19	0,077
$N+\widetilde{N}+2\pi$	0,59	0,35
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+2\pi$	1,46	1,01
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}+2\pi$	1,66	1,17
$\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+2\pi$	1,66	1,17
$\Sigma+\widetilde{\Sigma}+2\pi$	1,87	1,33
$\Lambda^\circ+\widetilde{N}+K+\pi$	1,96	1,40
$N+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{K}+\pi$	1,96	1,40
$\Sigma+\widetilde{N}+K+\pi$	2,17	1,57
$N+\widetilde{\Sigma}+\widetilde{K}+\pi$	2,17	1,57
$N+\widetilde{N}+K+\widetilde{K}$	2,49	1,81
$\Xi+\widetilde{\Xi}+2\pi$	2,65	1,94
$\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+K+\pi$	3,13	2,32

Продукты реакции / Начальные частицы	$\widetilde{N}+N$	
	$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Xi}+\widetilde{K}+\pi$	3,13	2,32
$\Xi+\widetilde{\Sigma}+K+\pi$	3,37	2,50
$\Sigma+\widetilde{\Xi}+\widetilde{K}+\pi$	3,37	2,50
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+K+\widetilde{K}$	3,63	2,70
$N+\widetilde{\Xi}+2K$	3,73	2,78
$\Xi+\widetilde{N}+2K$	3,73	2,78
$\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+K+\widetilde{K}$	3,88	2,91
$\Lambda^\circ+\widetilde{\Sigma}+K+\widetilde{K}$	3,88	2,91
$\Sigma+\widetilde{\Sigma}+K+\widetilde{K}$	4,15	3,11
$\Xi+\Xi+K+\widetilde{K}$	5,13	3,90
$2N+2\widetilde{N}$	5,63	4,30
$N+\Lambda^\circ+\widetilde{N}+\widetilde{\Lambda}^\circ$	7,10	5,45
$N+\Lambda^\circ+\widetilde{N}+\widetilde{\Sigma}$	7,43	5,72
$N+\Sigma+\widetilde{N}+\widetilde{\Lambda}^\circ$	7,43	5,72
$N+\Sigma+\widetilde{N}+\widetilde{\Sigma}$	7,76	5,98
$2\Lambda^\circ+2\widetilde{\Lambda}^\circ$	8,7	6,7
$2\Lambda^\circ+\widetilde{N}+\widetilde{\Xi}$	8,9	6,8
$N+\Xi+2\widetilde{\Lambda}^\circ$	8,9	6,8
$N+\Xi+\widetilde{N}+\widetilde{\Xi}$	9,0	7,0
$2\Lambda^\circ+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Sigma}$	9,1	7,0
$\Lambda^\circ+\Sigma+2\widetilde{\Lambda}^\circ$	9,1	7,0
$N+\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Sigma}$	9,2	7,1
$\Lambda^\circ+\Sigma+\widetilde{N}+\widetilde{\Xi}$	9,2	7,1
$2\Lambda^\circ+2\widetilde{\Sigma}$	9,4	7,3
$\Lambda^\circ+\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Sigma}$	9,4	7,3
$2\Sigma+2\widetilde{\Lambda}^\circ$	9,4	7,3
$N+\Xi+2\widetilde{\Sigma}$	9,6	7,4
$2\Sigma+\widetilde{N}+\widetilde{\Xi}$	9,6	7,4
$\Lambda^\circ+\Sigma+2\widetilde{\Sigma}$	9,8	7,6
$2\Sigma+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Sigma}$	9,8	7,6
$2\Sigma+2\widetilde{\Sigma}$	10,2	7,9
$\Lambda^\circ+\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Xi}$	10,8	8,3

Продолжение табл. 4

Начальные частицы / Продукты реакции	$\widetilde{N}+N$		Начальные частицы / Продукты реакции	$\widehat{N}+N$	
	$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв		$T_{02}=0$	$T_{02}=25$ Мэв
$\Lambda^\circ+\Xi+\widetilde{\Sigma}+\Xi$	11,1	8,7	$2\Xi+2\Xi$	13,0	10,1
$\Sigma+\Xi+\widetilde{\Lambda}^\circ+\widetilde{\Xi}$	11,1	8,7	$(2-13)\,\pi$	экзотермическая	
$\Sigma+\Xi+\widetilde{\Sigma}+\widetilde{\Xi}$	11,5	9,0	$K+\widetilde{K}+(0-6)\,\pi$	экзотермическая	

Для определения энергетических порогов реакций, не перечисленных в табл. 1—4, приведена пороговая кинетическая энергия $T_{01}^{(\text{порог})}$ для соударения различных частиц с нуклонами в зависимости от суммы масс покоя всех продуктов реакции (рис. 100—103):

1 — нуклон-мишень движется в ядре в том же направлении, что и налетающая частица с $T_{02}=25$ *Мэв*; *2* — нуклон-мишень покоится; *3* — нуклон-мишень движется в ядре навстречу налетающей частице с $T_{02}=25$ *Мэв*.

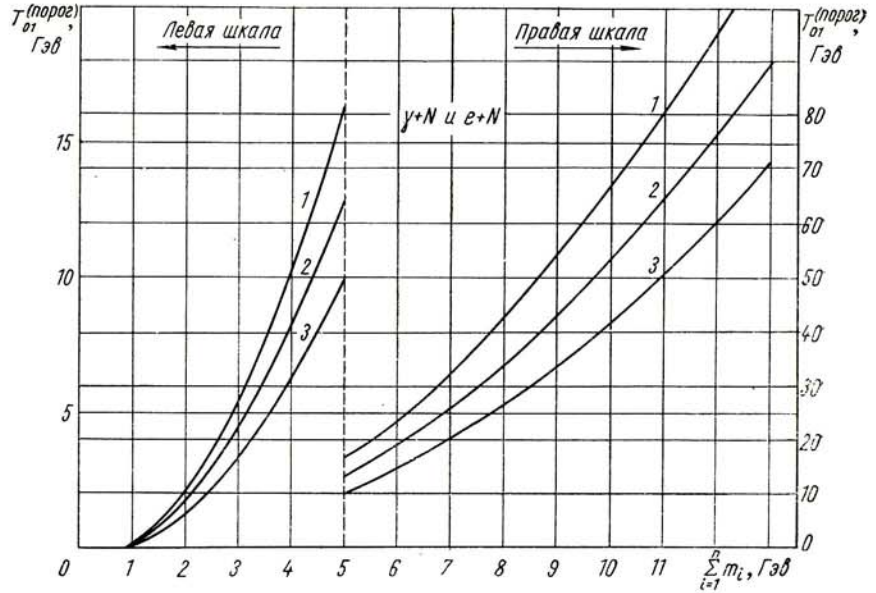


Рис. 100

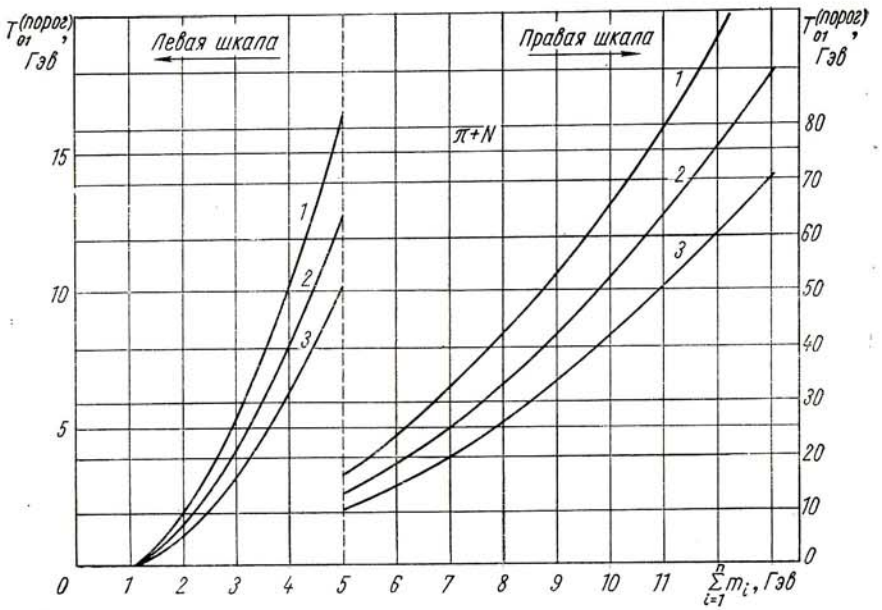


Рис. 101

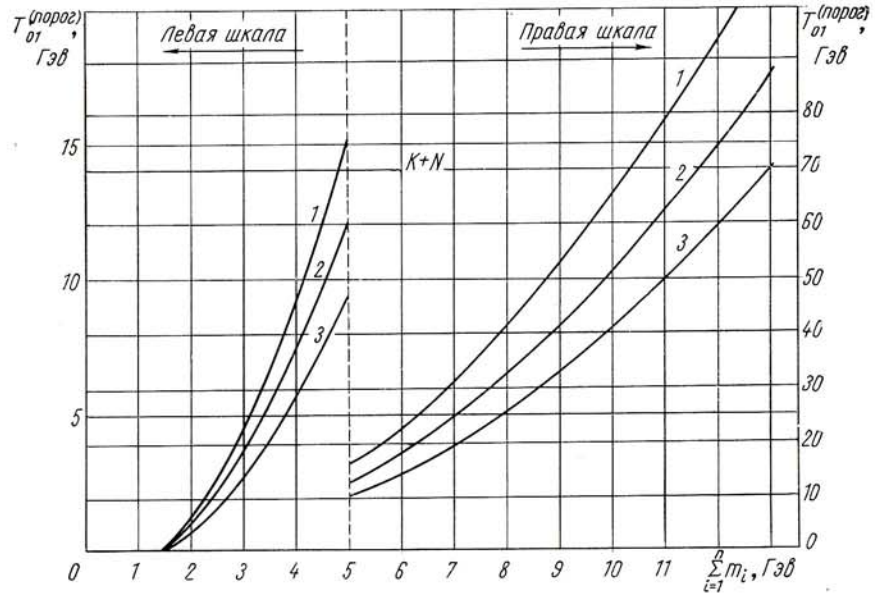


Рис. 102

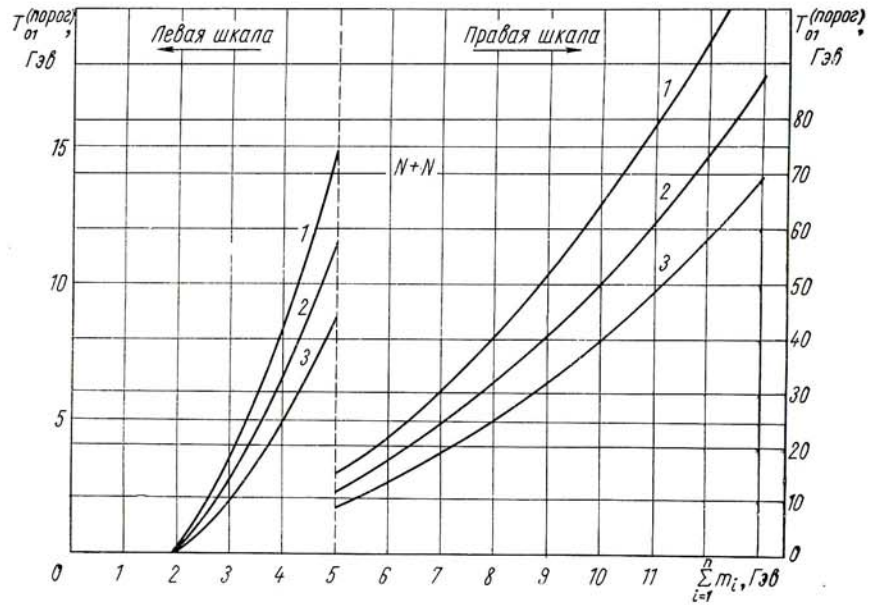


Рис. 103

Приложение IV

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

На рис. 104—108 приведены данные для реакции фоторождения π^+-мезонов. Эти графики могут быть использованы для кинематического анализа других реакций фоторождения мезонов ($\gamma + n \to \pi + p$ и $\gamma + N \to \pi^0 + N$, где N — символ нуклона). На рис. 105 и 106 дана зависимость кинетической энергии π-мезонов от углов их испускания при $h\nu = E_\gamma = 160$—1000 *Мэв*. Аналогичная зависимость энергии нуклонов от углов их вылета дана на рис. 107 и 108. На рис. 109 изображена связь углов испускания π-мезонов и нуклонов в процессе фоторождения.

Кинематика фоторасщепления дейтона при энергии γ-квантов $h\nu = 5 \div 1000$ *Мэв* дана на рис. 109—111.

Следующие шесть рисунков (рис. 112—117) заимствованы из статьи Пердетти [Perdetti, Nuovo Cimento, **3**, № 5 (1956)] и относятся к взаимодействию K-мезонов с протонами*. На рис. 112—114 приведены кинематические характеристики упругого рассеяния $K + p \to K + p$, а именно связь углов испускания K-мезонов и протонов в $Л$-системе с соответствующими углами в $Ц$-системе при энергии K-мезонов в $Л$-системе 50, 125 и 200 *Мэв* (см. рис. 112) и зависимость кинетической энергии K-мезонов и протонов от углов их испускания в $Л$-системе (см. рис. 113, 114) при первичной энергии 100—200 *Мэв*.

Рис. 115—117 иллюстрируют кинематику реакции $K + p \to \pi + \Sigma$ в области энергий K-мезонов от 60 до 160 *Мэв*, причем рис. 115 и 116 аналогичны рис. 112 и 113, а на рис. 117 кинетическая энергия Σ-гиперонов дана как функция углов вылета не этих частиц, а других продуктов реакции — π-мезонов.

---

* Кинематике взаимодействия K-мезонов с нуклонами посвящены подробные таблицы, изданные в 1958 г. в виде приложения к журналу «Nuovo Cimento» (VIII, Suppl., №, 1, 1958). В них рассматривается кинематика реакций $K^- + p \to \Sigma^\mp + \pi^\pm$ и упругого рассеяния $K + p \to K + p$. Дана связь углов и энергий в $Л$-системе для обоих продуктов реакции при разных углах вылета π- и K-мезонов в $Ц$-системе. Интервал изменения энергии первичных K-мезонов в этих таблицах от 5 до 200 *Мэв* (через 5 *Мэв*), а углов вылета ϑ* от 0 до 180 (через 2,5°).

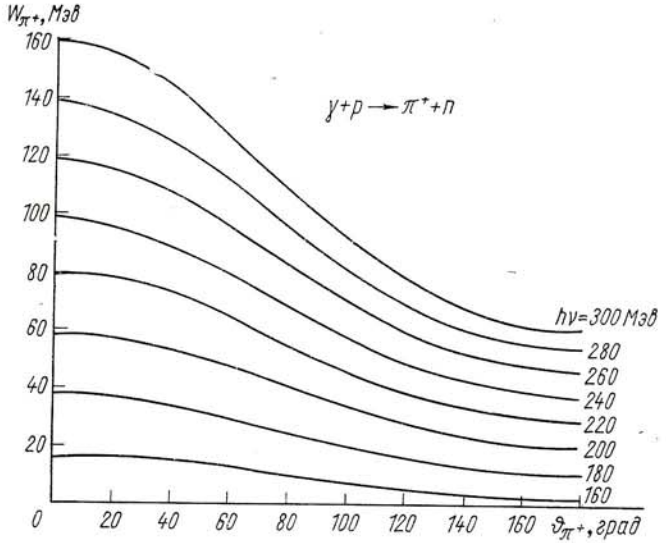


Рис. 104

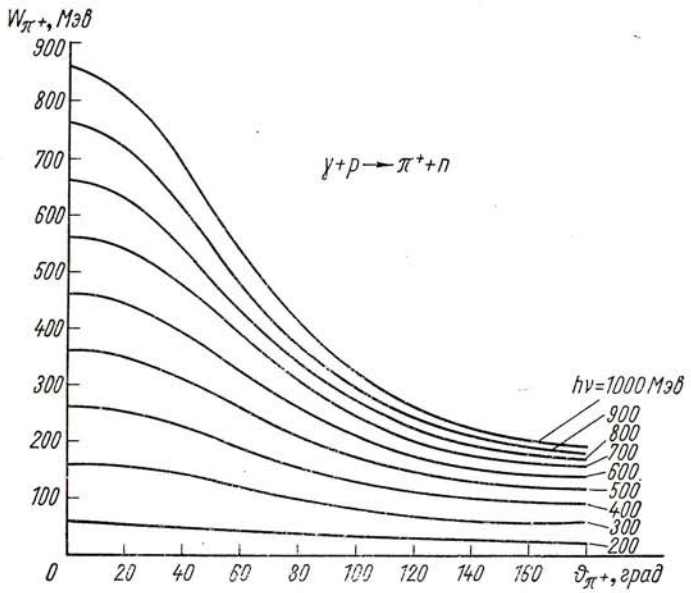


Рис. 105

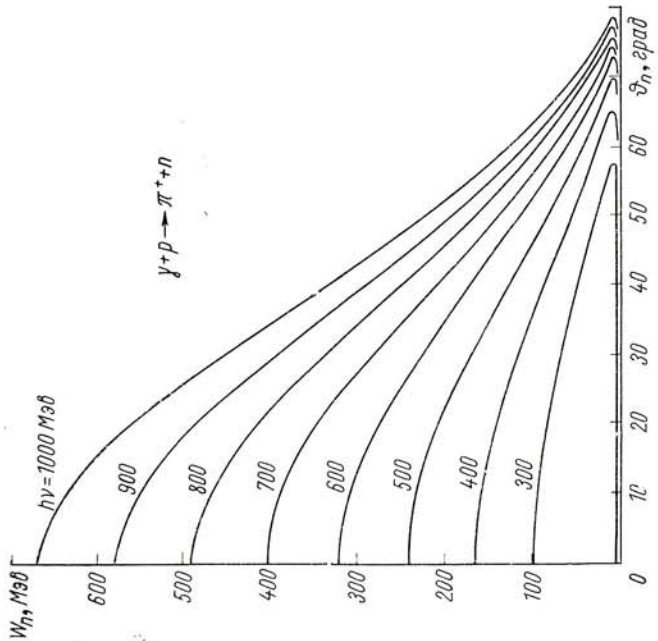


Рис. 107

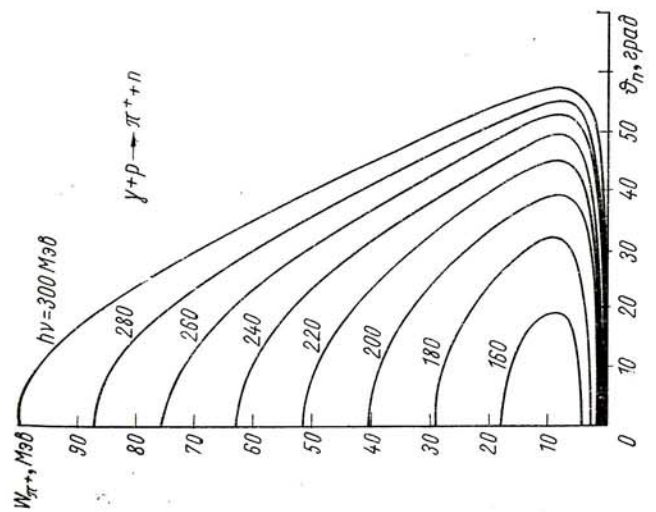


Рис. 106

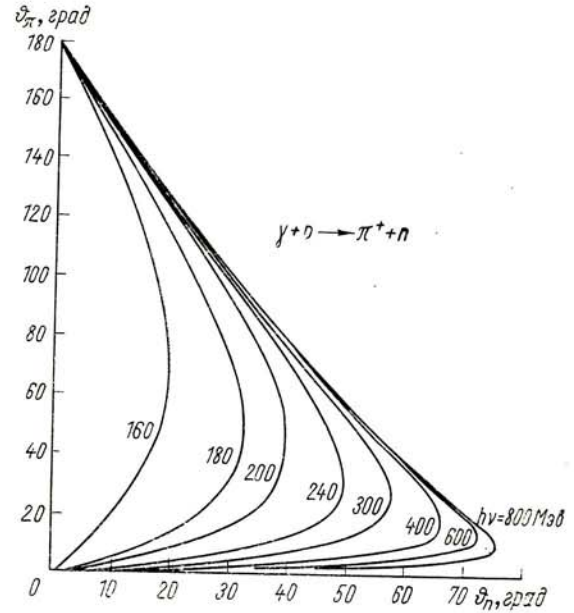


Рис. 108

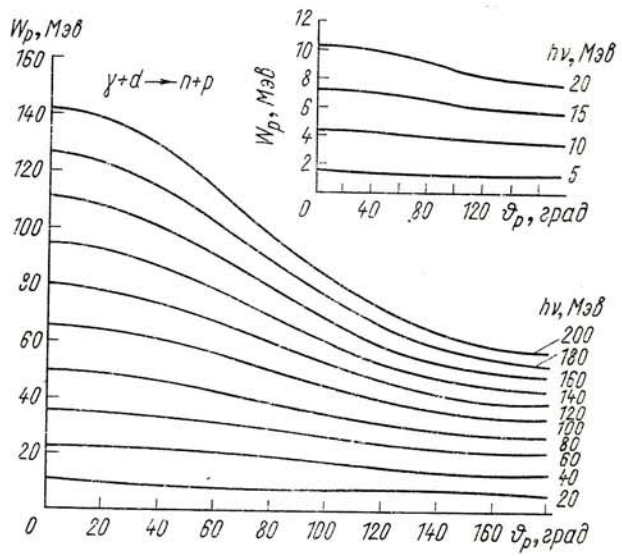


Рис. 109

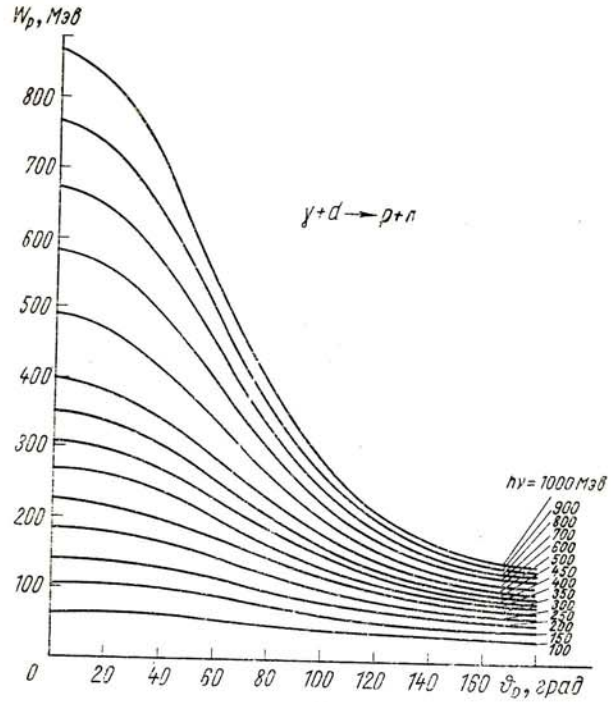


Рис. 110

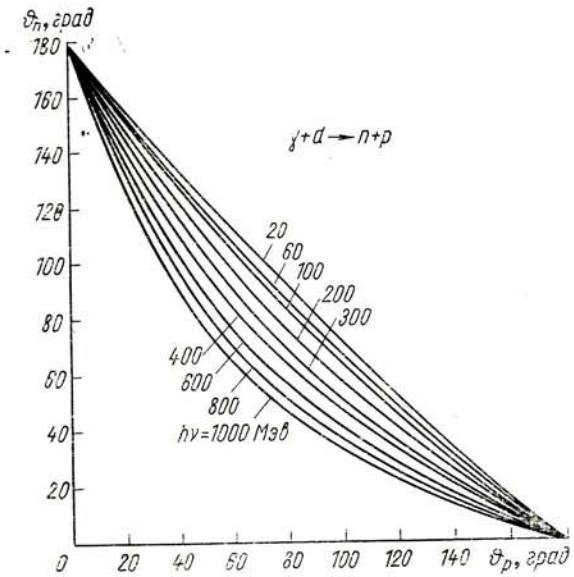


Рис. 111

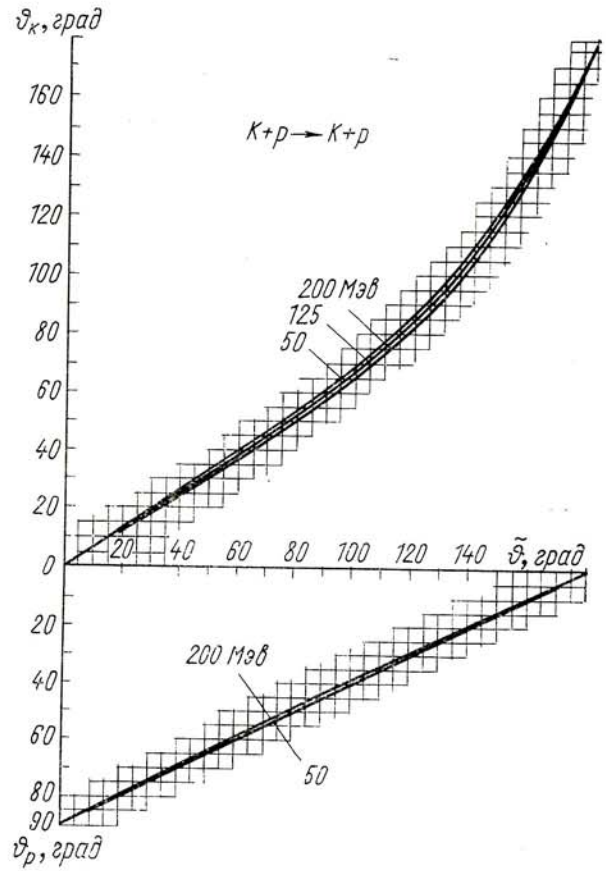


Рис. 112

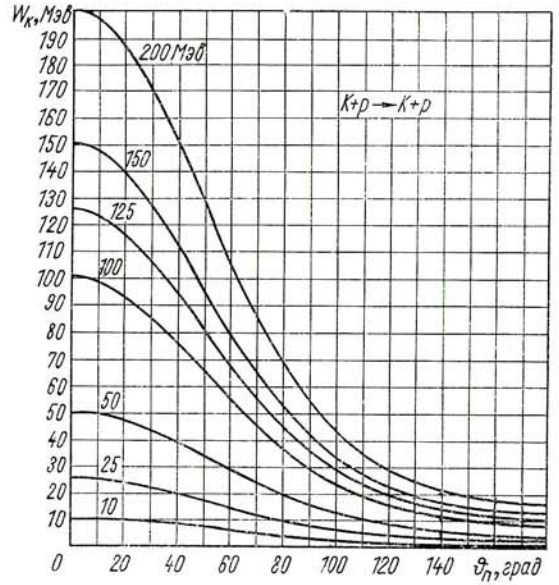


Рис. 113

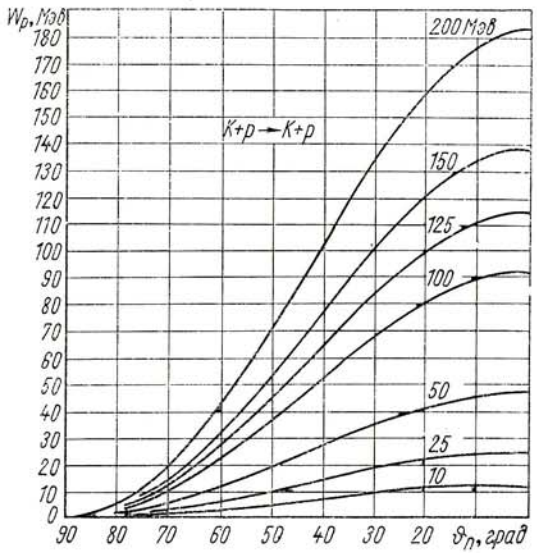


Рис. 114

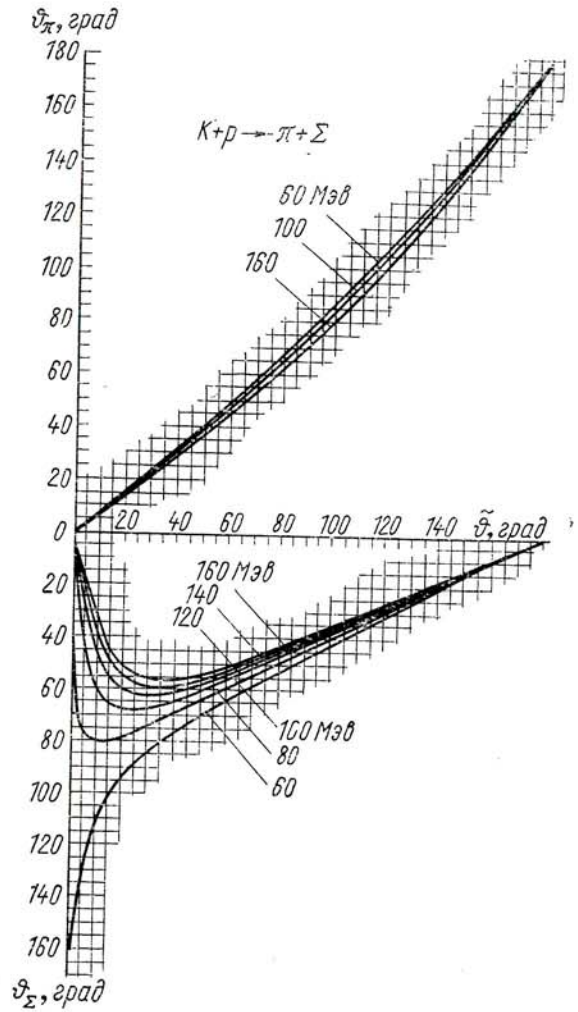


Рис. 115

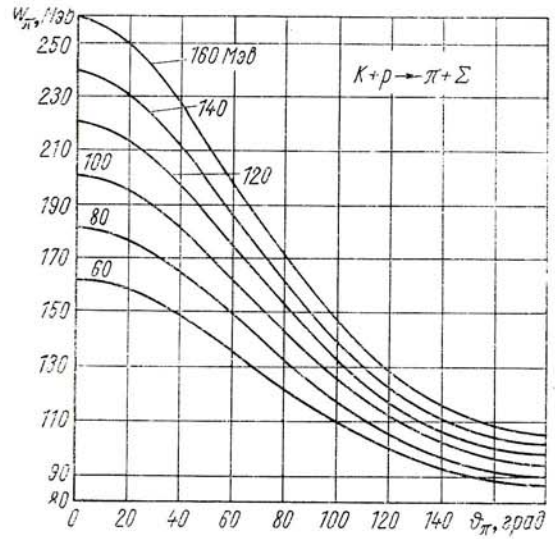


Рис. 116

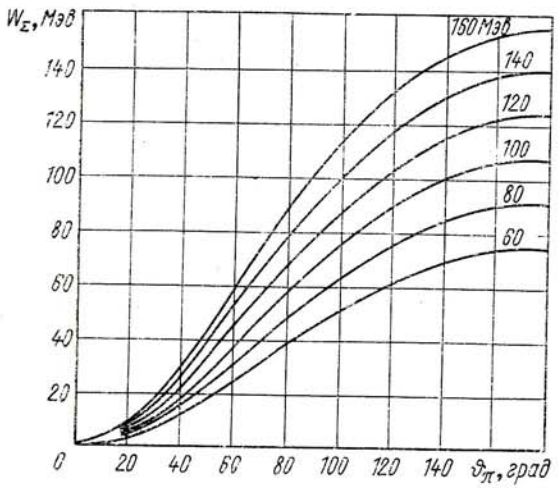


Рис. 117

Приложение V

Как видно из основного текста книги, получение кинематических соотношений (сечений реакций, вероятностей распадов, угловых корреляций и др.) становится простой задачей, если известны некоторые специальные функции и коэффициенты, встречающиеся при сложении моментов. Настоящее приложение содержит для справочных целей таблицы этих функций и коэффициентов. По своему смыслу таблицы не могут быть исчерпывающими, но они достаточны для кинематических расчетов тех случаев, когда выделение среди закономерностей реакций кинематических закономерностей наиболее эффективно (низшие спины, низшие орбитальные моменты).

а. Функции Лежандра

Нормированная сферическая гармоника определяется соотношением

$$Y_{LM}(\theta, \varphi) = \overline{P}_L^M(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{iM\varphi},$$

где $\overline{P}_L^M(x)$ — нормированная присоединенная функция Лежандра. Она следующим образом связана с присоединенной функцией $P_L^M(x)$:

$$\overline{P}_L^M(x) = (-1)^M\sqrt{\frac{2L+1}{2}\cdot\frac{(L-M)!}{(L+M)!}}\;P_L^M(x),$$

которая, в свою очередь, определяется формулой

$$P_L^M(x) = (1-x^2)^{M/2}\frac{1}{2^L L!}\cdot\frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}}(x^2-1)^L.$$

Для $M>0$ $P_L^M(x)$ выражается через обычный полином Лежандра $P_L(x)$

$$P_L^M(x) = (1-x^2)^{M/2}\frac{d^M}{dx^M}P_L(x),$$

причем

$$P_L(x) = \frac{1}{2^L L!}\cdot\frac{d^L}{dx^L}(x^2-1)^L.$$

$\overline{P}_L^M(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{P}_L^M(x) = (-1)^M\,\overline{P_L^{-M}}(x),$$

откуда

$$Y^*_{LM}(\theta, \varphi) = (-1)^M\,Y_{L,-M}(\theta, \varphi).$$

Выпишем явный вид $P_L(x)$ и $\overline{P_L^1}(x)$ для L, принимающих целые значения от 0 до 4 включительно ($x=\cos\theta$):

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = x = \cos\theta;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) = \frac{1}{8}(5\cos^3\theta + 3\cos\theta);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9);$$

$$\overline{P_1^1}(x) = -\sqrt{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{1/2} = -\sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta;$$

$$\overline{P_2^1}(x) = -\sqrt{\frac{15}{4}}(1-x^2)^{1/2}\,x = -\sqrt{\frac{15}{16}}\sin 2\theta;$$

$$\overline{P_3^1}(x) = -\sqrt{\frac{21}{32}}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1) = -\sqrt{\frac{21}{512}}(5\sin 3\theta + \sin\theta);$$

$$\overline{P_4^1}(x) = -\sqrt{\frac{45}{32}}(1-x^2)^{1/2}(7x^3-3x) =$$

$$= -\sqrt{\frac{45}{2048}}(7\sin 4\theta + 2\sin 2\theta).$$

б. d-Функции

Приведем d-функции вплоть до момента, равного трем. Отсутствующие в таблице функции легко получить, используя соотношения

$$d^j_{m'm}(\beta) = (-1)^{m-m'}\,d^j_{-m'-m}(\beta); \qquad (1)$$

$$d^j_{m'm}(\beta) = (-1)^{m-m'}\,d^j_{mm'}(\beta). \qquad (2)$$

Функции для более высоких моментов читатель может найти сам, используя следующие рекуррентные формулы:

$$(j+m)^{1/2}\, d^{j}_{mm'}(\beta) = (j+m)^{1/2}\, d^{(j-1/2)}_{m-1/2,\, m'-1/2}(\beta)\cos\frac{\beta}{2} +$$

$$+ (j-m)^{1/2}\, d^{j-1/2}_{m+1/2,\, m'-1/2}(\beta)\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (3)$$

Интегрируя эту формулу, найдем:

$$2\,[(j+m')\,(j+m'-1)]^{1/2}\, d^{j}_{mm'}(\beta) = [\,(j+m)\,(j+m-1)]^{1/2}\times$$

$$\times\,(1+\cos\beta)\, d^{j-1}_{m-1,\, m'-1}(\beta) + 2\,(j^2-m^2)^{1/2}\sin\beta d^{j-1}_{m,\, m'-1}(\beta) +$$

$$+\,[(j-m)\,(j-m-1)]^{1/2}\,(1-\cos\theta)\, d^{j-1}_{m+1,\, m'-1}(\beta). \qquad (4)$$

Если j — целое, то начинать получение $d^{j}_{mm'}$ можно с

$$d^{j}_{m0} = (-1)^m d^{j}_{0m}(\beta) = \left[\frac{2}{2l+1}\right]^{1/2} \overline{P^m_l}(\cos\beta)$$

и вычислять d^{j}_{m1}, d^{j}_{m2}, ..., используя формулу (4). Удобно воспользоваться также формулой

$$d^{j}_{m,\, m'\pm1} = [(j\pm m'+1)\,(j\mp m')]^{-1/2}\times$$

$$\times\left\{\frac{-m}{\sin\beta} + m'\operatorname{ctg}\beta \mp \frac{\partial}{\partial\beta}\right\} d^{j}_{mm'}(\beta).$$

Если j — полуцелое, то аналогичную процедуру можно начать с $d^{j}_{m,\,1/2}$:

$$d^{j}_{m,\,1/2} = \left(j+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\left[(j+m)^{1/2}\, d^{j-1/2}_{m-1/2,\,0}(\beta)\cos\frac{\beta}{2} +\right.$$

$$\left. + (j-m)^{1/2}\, d^{j-1/2}_{m+1/2,\,0}(\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right].$$

Таблицы

Для $j = 1/2$

$$d_{1/2\ 1/2}(\beta) = \cos\frac{\beta}{2};\quad d_{-1/2\ 1/2}(\beta) = \sin\frac{\beta}{2}.$$

Для $j = 1$

$$d_{11}(\beta) = \frac{1+\cos\beta}{2};\quad d_{01}(\beta) = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}};$$

$$d_{1-1}(\beta) = \frac{1-\cos\beta}{2};\quad d_{00}(\beta) = \cos\beta.$$

Для $j = 3/2$

$$d_{3/2\ 3/2}(\beta) = \frac{1+\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{3/2\ 1/2}(\beta) = -\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{3/2-1/2}(\beta) = \sqrt{3}\,\frac{1-\cos\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{3/2-3/2}(\beta) = -\frac{1-\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{1/2\ 1/2}(\beta) = \frac{3\cos\beta-1}{2}\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{1/2-1/2}(\beta) = -\frac{1+3\cos\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Для $j = 2$

$$d_{22}(\beta) = \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2;\quad d_{21}(\beta) = -\frac{1+\cos\beta}{2}\sin\beta;$$

$$d_{20}(\beta) = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\beta;\quad d_{2-1}(\beta) = -\frac{1-\cos\beta}{2}\sin\beta;$$

$$d_{2-2}(\beta) = \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)^2;\quad d_{11}(\beta) = \frac{1+\cos\beta}{2}(2\cos\beta-1);$$

$$d_{10}(\beta) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\beta\cos\beta;\quad d_{1-1}(\beta) = \frac{1-\cos\beta}{2}(2\cos\beta+1);$$

$$d_{00}(\beta) = \frac{3\cos^2\beta-1}{2}.$$

Для $j = 5/2$

$$d_{5/2\ 5/2}(\beta) = \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{5/2\ 3/2}(\beta) = -\sqrt{5}\left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{5/2\ 1/2}(\beta) = \frac{\sqrt{10}}{4}\sin^2\beta\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{5/2-1/2}(\beta) = -\frac{\sqrt{10}}{4}\sin^2\beta\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{5/2-3/2}(\beta) = \sqrt{5}\left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)^2\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{5/2-5/2}(\beta) = -\left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{3/2\ 3/2}(\beta) = \frac{5\cos\beta-3}{2}\cos^3\frac{\beta}{2};\quad d_{3/2\ 1/2}(\beta) = \frac{-(5\cos\beta-1)}{\sqrt{2}}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2};$$

$$d_{3/2-1/2}(\beta) = \frac{1+5\cos\beta}{\sqrt{2}}\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2};\quad d_{3/2-3/2}(\beta) = -\frac{5\cos\beta+3}{2}\sin^3\frac{\beta}{2};$$

$$d_{1/2\ 1/2}(\beta) = \frac{5\cos^2\beta-2\cos\beta-1}{2}\cos\frac{\beta}{2};$$

$$d_{1/2-1/2}(\beta) = -\frac{5\cos^2\beta+2\cos\beta-1}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Для $j = 3$

$$d_{33}(\beta) = \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2;\quad d_{32}(\beta) = -\frac{\sqrt{6}}{8}\sin\beta\,(1+\cos\beta)^2;$$

$$d_{31}(\beta) = \frac{\sqrt{15}}{8}\sin^2\beta(1+\cos\beta); \quad d_{30}(\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{4}\sin^3\beta;$$

$$d_{3-1}(\beta) = \frac{\sqrt{15}}{8}\sin^2\beta(1-\cos\beta); \quad d_{3-2}(\beta) = -\frac{\sqrt{6}}{8}\sin\beta(1-\cos\beta)^2;$$

$$d_{3-3}(\beta) = \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)^3; \quad d_{22}(\beta) = \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2(3\cos\beta-2);$$

$$d_{21}(\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\sin\beta(3\cos^2\beta+2\cos\beta-1); \quad d_{20}(\beta) = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\cos\beta\sin^2\beta;$$

$$d_{2-1}(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\sin\beta(3\cos^2\beta-2\cos\beta-1);$$

$$d_{2-2}(\beta) = \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)^2(3\cos\beta+2);$$

$$d_{11}(\beta) = \frac{1+\cos\beta}{8}(15\cos^2\beta-10\cos\beta-1);$$

$$d_{10}(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\beta(5\cos^2\beta-1);$$

$$d_{1-1}(\beta) = \frac{1-\cos\beta}{8}(15\cos^2\beta+10\cos\beta-1); \quad d_{00}(\beta) = \frac{5\cos^3\beta-3\cos\beta}{2}.$$

Для ряда задач и для нахождения d-функций с j полуцелым полезны следующие формулы:

$$d^j_{1/2\ 1/2}(\beta) = (l+1)^{-1}\cos\frac{\beta}{2}\left(P'_{l+1}-P'_l\right);$$

$$d^j_{-1/2\ 1/2}(\beta) = (l+1)^{-1}\sin\frac{\beta}{2}\left(P'_{l+1}+P'_l\right);$$

$$d^j_{1/2\ 3/2}(\beta) = (l+1)^{-1}\sin\frac{\beta}{2}\left\{\sqrt{\frac{l}{l+2}}P'_{l+1}+\sqrt{\frac{l+2}{l}}P'_l\right\};$$

$$d^j_{-1/2\ 3/2}(\beta) = (l+1)^{-1}\cos\frac{\beta}{2}\left\{-\sqrt{\frac{l}{l+2}}P'_{l+1}+\sqrt{\frac{l+2}{l}}P'_l\right\};$$

здесь $P'_l = \frac{dP_l}{d(\cos\beta)}$; P_l — полиномы Лежандра; $P_l(\cos\beta)$, $j = l+1/2$.

Таблицы коэффициентов W, Z, Z_γ и X*

а. Вводные замечания

Ниже приведены таблицы коэффициентов W, Z, Z_γ и X и даны краткие пояснения к ним, касающиеся в основном интервалов изменения аргументов и принятого способа записи численного значения коэффициента. Все необходимые сведения, связанные с определением и свойствами коэффициентов W, Z, Z_γ и X, имеются в основном тексте книги.

* Этот раздел составлен А. И. Лебедевым и В. А. Петрунькиным.

Приводимые здесь числовые таблицы составлены на основании работ [30, 36—38]. Таблицы коэффициентов Z_γ составлены заново. Все таблицы были тщательно сверены, когда имелась такая возможность, с существующими таблицами. В сомнительных случаях коэффициенты вычислялись еще раз.

При подборе таблиц была поставлена задача привести значения коэффициентов для наиболее важных и вместе с тем простейших случаев ядерных реакций, которые бы тем не менее охватывали широкий круг явлений (ядерные реакции со спином канала, не превышающим 3/2, фотоядерные реакции и рассеяние фотонов на частицах со спином 1/2, образование мезонов при столкновении частиц с суммарным спином, не превышающим 3/2, фоторождение мезонов на частицах со спином 1/2 и др.). К сожалению, нам не удалось обеспечить этими таблицами главным образом из-за их значительного объема весь материал книги. В некоторых случаях (это в основном относится к возникновению поляризации частиц в ядерных реакциях и к реакциям с участием фотонов) при применении общих формул основного текста читателю придется воспользоваться более полными таблицами необходимых коэффициентов* или вычислить их самому. Для облегчения последней задачи в этом приложении кроме основных таблиц коэффициентов W, Z, Z_γ и X приведены некоторые вспомогательные таблицы и формулы. Сюда относятся таблицы коэффициентов векторного сложения $(l_1 0 l \mid 0\ L 0)$ и $(l_1 -1 l_2 1 \mid L 0)$, которые необходимы для вычисления коэффициентов Z и Z_γ по формулам (43.17) и (43.20) основного текста, таблица факториалов чисел, таблицы формул для вычисления коэффициентов векторного сложения и коэффициентов W. Во вспомогательных таблицах протабулирована также величина $\Delta(abc)$, которая определяется соотношением

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!\,(b+c-a)!\,(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!}\right]^{1/2},$$

причем a, b и c удовлетворяют условию треугольника, и их сумма есть целое число. Очевидно, что величина $\Delta(abc)$ симметрична по отношению к любым перестановкам ее аргументов. С ее помощью можно записать явный вид коэффициента

$$W(abcd;\ ef) = \Delta(abc)\,\Delta(cde)\,\Delta(acf)\,\Delta(bdf)\,\omega(abcd;\ ef),$$

$$\omega(abcd;\ ef) =$$

$$= \sum_z \frac{(-1)^{a+b+c+d+z}(z+1)!}{(z-a-b-e)!\,(z-c-d-e)!\,(z-a-c-f)!\,(z-b-d-f)!} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+b+c+d-z)!\,(a+d+e+f-z)!\,(b+c+e+f-z)!},$$

* Из более полных таблиц коэффициентов W и Z прежде всего укажем на обширные таблицы, составленные в лаборатории Ок-Риджа [30]. Таблицы коэффициентов W, Z и X имеются в отчетах лаборатории Чок-Ривера [37]; эти таблицы приспособлены главным образом для анализа корреляций в ядерных реакциях. Область изменения переменных в них иная, чем в приводимых здесь. Коэффициенты W и X для довольно широкой области изменения аргументов можно найти соответственно в работах [36, 38]. Коэффициенты, близкие к Z_γ, протабулированы в обзоре Биденхарна и Роуза [27] и в отчетах лаборатории Чок-Ривера [37].

где z принимает лишь такие целые значения, которые не приводят к отрицательным аргументам факториалов в знаменателе. Коэффициент векторного сложения $(a0b0/c0)$ для целых a, b, c с четной суммой $a+b+c=2g$ также выражается через $\Delta(abc)$:

$$(a0b0/c0) = (-1)^{g+c}(2c+1)^{1/2}\,\Delta(abc)\,\frac{g!}{(g-a)!\,(g-b)!\,(g-c)!}\,.$$

Для a, b, c, не удовлетворяющих этому условию, коэффициент $(a0b0/c0)$ обращается в нуль. В таблицах приведена величина $[\Delta(abc)]^{-2}$.

б. Расположение таблиц и область изменения аргументов

Все коэффициенты приведены в виде 58 таблиц.

Первые 15 таблиц содержат коэффициенты $W^2(l_1J_1l_2J_2;\ sL)$, у которых s принимает значения 1/2, 1 и 3/2, а L пробегает целые значения от 0 до 4. В таблицах с $s=1/2$, 3/2 l_1 и l_2 принимают целые значения от 0 до 5, а J_1 и J_2 изменяются от 1/2 до 9/2. В таблицах с $s=1$ l_1 и l_2 принимают целые значения от 0 до 5, а J_1 и J_2 изменяются от 0 до 4.

Коэффициенты $z^2(l_1J_1l_2J_2;\ sL)$ приведены в табл. 16 — 33. Область изменения переменных такая же, как в случае коэффициентов W, за исключением того, что L принимает дополнительное значение $L=5$.

Коэффициенты $Z^2_\gamma(l_1J_1l_2J_2;\ sL)$, которые необходимы для анализа фотоядерных реакций, вычислены лишь для случая $s=1/2$ и приведены в табл. 34—38, в которых l_1, l_2 принимают целые значения от 0 до 3, а J_1, J_2 изменяются от 1/2 до 5/2. Величина L пробегает целые значения от 0 до 4.

Коэффициенты W, Z и Z_γ представлены в виде отдельных таблиц для каждого значения s и L, причем для l_1, l_2, J_1 и J_2 приводятся значения, при которых соответствующие коэффициенты определены. Таблицы расположены в порядке возрастания сначала L (при данном s), а потом s. Мы не приводим в таблицах коэффициенты W, Z и Z_γ с $s=0$, так как обращение s в нуль существенно упрощает общие выражения для этих коэффициентов [см. формулы (43.10), (43.18) и (43.21) основного текста], и читатель без большой затраты труда сможет вычислить их сам.

Значения коэффициентов $X^2(abc,\ def,\ ghk)$ приведены в виде шести таблиц. В таблицах 39—42 $g=h$, $c=f=1/2$, $k=1$, a и d принимают полуцелые значения от 1/2 до 7/2, b и e — целые значения от 0 до 4. Таблицы расположены в порядке возрастания g, которое изменяется от 1 до 4, принимая целые значения. Таблицы 43 и 44 соответственно содержат коэффициенты $X^2(ab1,\ ab2,\ kk1)$ и $X^2(a1c,\ a3c,\ kk1)$, где a и b изменяются от 1 до 3, принимая целые и полуцелые значения, c приобретает целые и полуцелые значения от 1 до 5/2, k принимает значения 2 и 4.

Вспомогательные таблицы начинаются с таблиц величины $[\Delta(abc)]^{-2}$. В табл. 45 a, b и c являются целыми числами, причем a и b принимают значения от 1 до 8, а c изменяется от 0 до 6. В табл. 46 a и b являются полуцелыми и изменяются в пределах от 1/2 до 11/2; c принимает все возможные значения. Коэффициенты векторного сложения $(l_10l_20\,|\,L0)^2$ для l_1, l_2, принимающих значения от 0 до 6, помещены в табл. 47. Табл. 48 содержит коэффициенты $(l_1-1l_21\,|\,L0)^2$ для l_1 и l_2, равных 1, 2 и 3. В табл. 49 приведены факториалы чисел от 1 до 24 включительно.

Иногда для получения значений коэффициентов X, $(l_10l_20\,|\,L0)$, $(l_1-1l_21\,|\,L0)$ и величины $\Delta(abc)$, которых нет в приводимых здесь таблицах, достаточно воспользоваться свойствами симметрии этих коэффициентов.

Таблицы 50—53 и 54—57 соответственно содержат формулы для вычисления коэффициентов векторного сложения $(j_1m_1j_2m_2\,|\,jm$ и коэффициентов $W(l_1J_1l_2J_2;\ sL)$ для j_2 и s, принимающих значения 1/2, 1, 3/2 и 2.

Таблица 58 содержит численные значения коэффициентов векторного сложения $(j_1m_1j_2m_2\,|\,jm)$ для j_1 от 1/2 до 2 и j_2 от 1/2 до 1 включительно.

в. Способ записи численных значений коэффициентов

Обращаем особое внимание читателя на то обстоятельство, что во всех численных таблицах, за исключением таблицы факториалов чисел, приводятся квадраты значений коэффициентов. Если сам коэффициент величина отрицательная, то перед его квадратом стоит значок *.

Вычисленные значения квадратов коэффициентов — рациональные дроби, которые за редким исключением для рассмотренных пределов изменения аргументов содержат только простые множители не больше чем 19. Обычно в приложениях необходимо умножить несколько таких рациональных дробей, чтобы найти численный коэффициент при полиноме Лежандра $P_L^M(\cos\theta)$ или при нормированной присоединенной функции Лежандра $P'_L(\cos\theta)$. Эта операция упрощается, если вместо самой дроби писать лишь показатели степеней тех простых чисел, на которые раскладывается числитель и знаменатель последней. Показатели степеней простых чисел записываются в следующем порядке: на первом месте пишется степень двойки, на втором — степень тройки, на третьем — степень пятерки и т. д. Если следующее по порядку простое число отсутствует в разложении, то вместо него пишется нуль. Отрицательные степени простых чисел отмечаются подчеркиванием снизу. Для более быстрой ориентации показатели степени простых чисел первого десятка отделяются запятой от остальных показателей. Если в разложении встречается простое число больше 19, то оно записывается справа в скобках в явной форме в соответствующей степени. Если показатель превышает десять, то пишется только величина превышения вместе с черточкой над ней. Для единицы принято обозначение в виде e. Такую запись будем называть представителем числа. Например, представителем числа 30 будет 111, так как $30=2^1\cdot3^1\cdot5^1\to111$. Приведем еще ряд примеров:

$$198 = 2^1\cdot3^3\cdot5^0\cdot7^0\cdot11^1\to1300{,}1$$

$$65/7056 = 2^{-4}\cdot3^{-2}\cdot5^1\cdot7^{-2}\cdot11^0\cdot13^1\to\mathbf{42}\ \ 12,\,01$$

$$1\to e$$

$$6144 = 2^{11}\cdot3^1\to\bar{1}1$$

$$50410/17787 = 2^1\cdot3^{-1}\cdot5^1\cdot7^{-2}\cdot11^{-2}\cdot(71)^2\to\mathbf{11}\ \ 12,\ 2\cdot(71)^2.$$

Умножение чисел выполняется посредством сложения их представителей:

$$\begin{array}{r} 2211 \\ 0001 \\ \hline \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1} \end{array}$$

$$1260\cdot1/7\cdot1/210\to2211+0001+1111=+\frac{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}}{110\bar{1}\to6/7}$$

$$2/7\cdot252\cdot1/\mathbf{18}\to1001+220\bar{1}+\bar{1}\bar{2}=+\begin{array}{r} 100\bar{1} \\ 2201 \\ \bar{1}\bar{2} \\ \hline 2\to4 \end{array}$$

Незаполненные ячейки и пропуски в таблицах означают, что соответствующие коэффициенты или не существуют, т. е. нарушены какие-либо условия определения коэффициента, или равны нулю.

г. Краткое правило для получения из таблиц численного значения коэффициента

Чтобы получить численное значение самого коэффициента, необходимо число из таблицы перевести в обычное представление согласно правилу $\overline{abcd}$, $e\ldots = 2^a \cdot 3^{-b} \cdot 5^{10+c} \cdot 7^d \cdot 11^e \ldots$ и из полученного числа извлечь корень квадратный; если перед числом в таблице стоит значок *, то для корня берется отрицательное значение.

Таблица 1

$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\right)$

J_2	l_2	J_1 \ l_1	1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
			0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0	1	1									
	1	0		*11								
3/2	1	2			21							
	2	1				*201						
5/2	2	3					111					
	3	2						*1101				
7/2	3	4							3001			
	4	3								*32		
9/2	4	5									121	
	5	4										*1010,1

Таблица 2

$$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2; \frac{1}{2}\ 1\right)$$

J_2 \ J_1 / l_1 \ l_2		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0		11	11							
	1	11	02	*22	*21						
3/2	1	11	*22	*321	311	201					
	2		*21	311	322	*212	*111				
5/2	2			201	*212	*0221	1211	*1101			
	3				*111	1211	1212	*3102	*3001		
7/2	3					1101	*3102	*5302	5201	32	
	4						*3001	5201	5411	*341	*121
9/2	4							32	*341	*1420,1	1220,1
	5								*121	1220,1	0320,2

Таблица 3

$$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2; \frac{1}{2}\ 2\right)$$

J_2 \ J_1 / l_1 \ l_2		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0				101	101					
	1			21	201	*021	*12				
3/2	1		21	31	*301	*2211	1201	2001			
	2	101	201	*301	*3021	202	0011	*3011	*301		
5/2	2	101	*021	*2211	202	112	*1111	*2111	231	13	
	3		*12	1201	*0011	*1111	*0002	3002	3321	*0311	*1011
7/2	3			2001	*3011	*2111	3002	5022	5101	*3111,1	2011,1
	4				*301	231	3321	*5101	*5300,1	331	2111,1
9/2	4					13	*0311	*3111,1	331	0321	*1120,1
	5						*1011	2011,1	2111,1	*1120,1	*1020,21

Таблица 4

$$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\ 3\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0						1001	1001			
	1					12	1201	*3001	*31		
3/2	1				201	021	*2211	4101	42	22	
	2			201	102	*102	*2111	4001	41	*212	*102
5/2	2		12	021	*102	*102	0111	3001	*33	*0320,1	1020,1
	3	1001	1201	*2211	*2111	0111	1112	*2002	*2301,1	1301	0001,1
7/2	3	1001	*3001	4101	4001	3001	*2002	*4002,1	4101	2101	*3001,1
	4		*31	42	41	*33	*2301,1	4101	431	*231	*3110,11
9/2	4			22	*212	*0320,1	1301	2101	*231	*1320,01	0120,1
	5				*102	1020,1	0001,1	*3001,1	*3110,11	0120,1	1022,2

Таблица 5

$$W^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\ 4\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0								12	12	
	1							31	331	*131	*111
3/2	1						2001	4111	*4301	*2310,1	0110,1
	2					111	2101	*4211	*4210,1	2221	1220,1
5/2	2				111	121	*0201	*3111,1	311	012	*1121,1
	3			2001	2101	*0201	*1202,1	2112	2101	*1111	*0111,11
7/2	3		31	4111	*4211	*3111,1	2112	4202	*4211	*2211,01	3211,1
	4	12	331	*4301	*4210,1	311	2101	*4211	*4400,01	24	3201,1
9/2	4	12	*131	*2310,1	2221	012	*1111	*2211,01	24	1411	*0210,1
	5		*111	0110,1	1220,1	*1121,1	*0111,11	3211,1	3201,1	*0210,1	1210,2

Таблица 6

$W^2\,(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ 10)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1	01											
1	0 1 2		01	*02 011									
2	1 2 3				011	*002	0011						
3	2 3 4							0011	*0002	0201			
4	3 4 5										0201	*04	0200, 4

Таблица 7

$W^2\,(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ 11)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1		02	02	02								
1	0 1 2	02 02 02	02	02 22 *22	*22 *22 222	02 *201 202	002						
2	1 2 3		02	*22 *201	222 202 002	*201 202	202 22 *022 *3211	*022 *022 0222	002 *3211 0202	0002			
3	2 3 4					002	*022 *3211	0222 0202 0002	*3211 0202	0202 4202,2 *4002	*4002 *4111	0002 *4002 4402	*4111 44	04
4	3 4 5								0002	*4002 *4111	4402 44 04	*4111 44	44 4420,0002 *042	*042 *3120,1

Таблица 8

$W^2(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 12)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
		1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1					011	011	011						
1	0				011		011	011	011					
	1			22	201	201	221	*021	*021	*1201				
	2		011	201	2121	*202	*2121	*112	0121	0111	0011			
2	1	011		201	*202	2121	*2121	0121	*112	0111		0011		
	2	011	011	221	*2121	*2121	*202	1021	1021	1011	*1111	*1111	*13	
	3	011	011	*021	*112	0121	1021	3122	*0022	*1112	*1112	1212	1301	0201
3	2		011	*021	0121	*112	1021	*0022	3122	*1112	1212	*1112	1301	
	3			*1201	0111	0111	1011	*1112	*1112	*4202	4222	4222	4311,01	*1211
	4				0011		*1111	*1112	1212	4222	4322,1	*4202	*4211,1	*121
4	3					0011	*1111	1212	*1112	4222	*4202	4322,1	*4211,1	1311,1
	4						*13	1301	1301	4311,01	*4211,1	*4211,1	4420,002	1221,1
	5							0201		*1211	*121	1311,1	1221,1	3321,21

Таблица 9

$W_2(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 13)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
		1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1								0101	0101	0101			
1	0							0101		0101		0101		
	1						021	1201	1201	3201	*3001	*3001	*331	
	2					002	112	1021	*0111	*3001	*3001	3201	311	021
2	1				002		112	*0111	1021	*3001	3201	*3001	311	
	2			021	112	112		*0121	*0121	*3011	3211	3211	3322	*022
	3		0101	1201	1021	*0111	*0121	*0112	2022	1002	1202,1	*1202	*1311,1	*2211
3	2	0101		1201	*0111	1021	*0121	2022	*0112	1002	*1202	1202,1	*1311,1	0211,1
	3	0101	0101	3201	*3001	*3001	*3011	1002	1002	2002	*2202,1	*2202,1	*2311	1211,1
	4	0101		*3001	*3001	3201	3211	1202,1	*1202	*2202,1	*2312,1	2202	2201	1201,11
4	3		0101	*3001	3201	*3001	3211	*1202	1202,1	*2202,1	2202	*2312,1	2201	*1301,1
	4			*331	311	311	3322	*1311,1	1311,1	*2311	2201	2201	2422	*1220,11
	5				021		*022	*2211	0211,1	1211,1	1201,11	*1301,1	*1220,11	*0322,21

Таблица 10

$W^2\,(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 14)$

J_2 \ J_1 / l_1 / l_2	0	1			2			3			4		
	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0 1											03	03	03
1 0										03		03	
1 1									3001	331	331	331	*131
1 2								0011	3001	3301,1	*311	*3321,1	*012
2 1							0011		3001	*311	3301,1	*3321,1	1321,1
2 2						222	0201	0201	*3211	*3111,1	*3111,1	*312	0121,1
2 3					0011	0201	0212,1	*2202	*1202,1	*1112,1	1102	1121	2121,11
3 2				0011		0201	*2202	0212,1	*1202,1	1102	*1112,1	1121	*0120,1
3 3			3001	3001	3001	*3211	*1202,1	*1202,1	*2202	2112	2112	2111	*1111,11
3 4		03	331	3301,1	*311	*3111,1	*1112,1	1102	2112	2202,01	*2422	*2401,01	*1400,11
4 3	03		331	*311	3301,1	*3111,1	1102	*1112,1	2112	*2422	*2202,01	*2401,01	1201,1
4 4	03	03	331	*3321,1	*3321,1	*312	1121	1121	2111	*2401,01	*2401,01	*24	1401,1
4 5	03		*131	*012	1321,1	0121,1	2121,11	*0120,1	*1111,11	*1400,11	1201,1	1401,1	0201,2

Таблица 11

$W^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{3}{2}\ 0\right)$

J_2 \ J_1 / l_1 / l_2	1/2		3/2				5/2				7/2				9/2		
	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5
1/2 1	11																
1/2 2		*101															
3/2 0			2														
3/2 1				*21													
3/2 2					201												
3/2 3						*2001											
5/2 1							12										
5/2 2								*111									
5/2 3									1101								
5/2 4										*13							
7/2 2											301						
7/2 3												*3001					
7/2 4													32				
7/2 5														*3000,1			
9/2 3															1011		
9/2 4																*121	
9/2 5																	1010,1

$W^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 1\right)$.

J_2 \ J_1, l_1, l_2	1/2		3/2				5/2	
	1	2	0	1	2	3	1	2
1/2	1	22	21	21	321	31		
	2	21	201		*311	*301	*201	
3/2	0	21			21			21	
	1	321	*311	21	121	*112		*301	*3021
	2	31	*301		*112	*102	202	312	3121
	3		*201			202	0011		*2121
5/2	1			21	*301	312		*2211	202
	2				*3021	3121	*2121	202	2221,2
	3					112	*1111		*6222
	4						*1101		
7/2	2							111	*1111
	3								*0002
	4								
	5								
9/2	3								
	4								
	5								

5/2		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
112								
*1111	*1101							
		111						
*6222		*1111	*0002					
*3212,002	3002	3112	5012	5022				
3002	3321		*5202	*5101	*32			
3112		*2111	3002			3001		
5012	*5202	3002	1102	*1312		*5101	*5300,1	
5022	*5101		*1312	*5411	331	5311	5421,1	0321
	*32			331	2111,1		*3320,1	*1120,1
		3001	*5101	5311		*3111,1	331	
			*5300,1	5421,1	*3320,1	331	3420,1 (41)^2	*6320,2
				0321	*1120,1		*6320,2	*2120,202

Таблица 13

$$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{3}{2}\,2\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2				5/2	
		1	2	0	1	2	3	1	2
1/2	1				311	301	201	201	2211
	2			201	322	3021	102	*212	*202
3/2	0		201			201			201
	1	311	322		112	102	*202	3021	322
	2	301	3021	201	102		*102	*3121	*3001
	3	201	102		*202	*102	*0121	2121	1222
5/2	1	201	*212		3021	*3121	2121	1221	*102
	2	2211	*202	201	322	*3001	1222	*102	*1102
	3	021	*102		*5221	*0021	1322	1021	2122,02
	4		*111			0111	1112		*2012
7/2	2			201	*102	1021	*3022	*102	1322
	3				*2111	3111	*2012	0111	1012
	4					3001	*2002		*3302
	5						*3001		
9/2	3							1101	*2002
	4								*2301,1
	5								

Продолжение

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		5/2		7/2				9/2		
		3	4	2	3	4	5	3	4	5
1/2	1	021								
	2	*102	*111							
3/2	0			201						
	1	*5221		*102	*2111					
	2	*0021	0111	1021	3111	3002				
	3	1322	1112	*3022	*2012	*2002	*3001			
5/2	1	1021		*102	0111			1101		
	2	2122,02	*2012	1322	1012	*3302		*2002	*2301,1	
	3	4022,2	*4012	*4322	*5112,02	*5302,0002	4101	4102	4301,1	2101
	4	*4012	*4322,1	4212	5322	5212,1	431	*4312	*4211	*231
7/2	2	*4322	4212	2102	*4012	4102		*4002,1	4101	
	3	*5112,02	5322	*4012	*3222	3212	*4211	5212,1	5211	*3211,1
	4	*5302,0002	5212,1	4102	3212	3322,12	*402	*5022,1	*5321,1 $(71)^2$	*1020,1
	5	4101	431		*4211	*402	*2221,11	4221,1	4021,2	1221,21
9/2	3	4102	*4312	*4002,1	5212,1	*5022,1	4221,1	4201,1	*402	2220,1
	4	4301,2	*4211	4101	5211	*5321,1 $(71)^2$	4021,2	*402	*4303,2	2000,2
	5	2101	*231		*3211,1	*1020,1	1221,21	2220,1	2000,2	1200,21

Таблица 14

$$W^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 3\right)$$

J_2 \ J_1 / l_1 / l_2		1/2		3/2				5/2	
		1	2	0	1	2	3	1	2
1/2	1								1201
	2							111	0011
3/2	0						2001		
	1					202	0011		5221
	2				202	102	0121	112	0021
	3			2001	0011	0121	1112	*1111	*1322
5/2	1		111			112	*1111		0121
	2	1201	0011		5221	0021	*1322	0121	*1022
	3	2211	2111	2001	4211	*4121	*3312	*3111	*3122,002
	4	2001	2101		*4001	*4111	*3102,1	3301	3112
7/2	2	2001	*3011		2111	*3111	2012	2011	*3312
	3	4101	*4001	2001		*2101	3112	*4111	*4102
	4	4111	*4211		*0201	*2111	3102,1	4101	4312 (31)^2
	5		*301			311	2101		*3111
9/2	3			2001	*4211	4101	*3112	*3111,1	*3102,1
	4				*4210,1	4120,1	*3111	311	3321,02
	5					012	*1111		*5121,1

Продолжение

J_2 \ J_1 / l_1 / l_2		5/2		7/2				9/2		
		3	4	2	3	4	5	3	4	5
1/2	1	2211	2001	2001	4101	4111				
	2	2111	2101	*3011	*4001	*4211	*301			
3/2	0	2001			2001			2001		
	1	4211	*4001	2111		*0201		*4211	*4210,1	
	2	*4121	*4111	*3111	*2101	*2111	311	4101	4120,1	012
	3	*3312	*3102,1	2012	3112	3102,1	2101	*3112	*3111	*1111
5/2	1	*3111	3301	2011	*4111	4101		*3111,1	311	
	2	*3122,002	3112	*3312	*4102	4312 (31)^2	*3111	3102,1	3321,02	*5121,1
	3	*3112	3102,1	3212	2112	2302,1	*3101	*3112,1	*3311,1 (23)^2	*3112,1
	4	3102,1	3422,1	*3202	*2302,1	*2202,1	*3301,01	3302	3211,1	3311,11
7/2	2	3212	*3202	*4112,1	3102,1	*3112,1	4111,1	3102,1	*3101	3101,1
	3	2112	*2302,1	*3102,1	4202,1	*4012	3211,1	*2202,1	*2001,1	4201,1
	4	2302,1	*2202,1	*3112,0	*4012	*4312,002	3011,11	2012	2321,1 (31)^2	4221,11
	5	*3101	*3301,01	4111,1	3211,1	3011,11	4212,21	*3211,1	*3020,21	*3222,21
9/2	3	*3112,1	3302	3102,1	*2202,1	2012	*3211,1	*3212,11	3011,11	*3211,11
	4	*3311,1 (23)^2	3211,1	*3101	*2001,1	2321,1(31)^2	*3020,21	3011,11	3320,23	*3420,2
	5	*3112,1	3311,11	3101,1	4201,1	4221,11	*3222,21	*3211,11	*3420,2	*1222,2

Таблица 15

$$W^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{3}{4}\ 4\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2				5/2	
		1	2	0	1	2	3	1	2
1/2	1								
	2								
3/2	0								
	1								
	2								0111
	3							1101	1112
5/2	1						1101		
	2					0111	1112		5212
	3				4001	4111	3102,1	3001	3212
	4			22	41	4201,1	3202,1	*33	*3102,1
7/2	2		301			*3001	*2002		3102,1
	3	42	41		0201	2111	*3102,1	4201,1	*4012,1
	4	4301	4210,1	22	232	*2221,1	*3222,1	*4120,1	*4122,0002
	5	22	311		*2221	311	*2121,01	2221,1	3220,1
9/2	3	22	*212		4210,1	*4120,1	3111	3211,1	*3222,1
	4	2310,1	*2221	22	*432	*4223,1	3220,1	*3121	*3121,1
	5	121	*012		*5220,1	*0120,1	1120,11	0221,1	1020,1

Продолжение

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		5/2		7/2				9/2		
		3	4	2	3	4	5	3	4	5
1/2	1				42	4301	22	22	2310,1	121
	2			301	41	4210,1	311	*212	*2221	*012
3/2	0		22			22			22	
	1	4001	41		0201	232	*2221	4210,1	*432	*5220,1
	2	4111	4201,1	3001	2111	*2221,1	311	*4120,1	*4223,1	*0120,1
	3	3102,1	3202,1	*2002	*3102,1	*3222,1	*2121,01	3111	3220,1	1120,11
5/2	1	3001	*33		4201,1	*4120,1	2221,1	3211,1	*3121	0221,1
	2	3212	*3102,1	3102,1	*4012,1	*4122,0002	3220,1	*3222,1	*3121,1	1020,1
	3	*3202,1	*3102,1	*3102,1	*2002	2122	3221,11	3212	3121,101	3021,11
	4	*3102,1	*3402,11	3212	2322	2202,01	3300,11	*3312	*3201,11	*3300,11
7/2	2	*3102,1	3212	4012,1	*3102,1	3212	*4110,1	*3122,11	3221,11	*3120,11
	3	*2002	2322	*3102,1	4202	4302,2	*3201,11	3202,01	2311,11	*4211,101
	4	2122	2202,01	3212	4302,2	4402,01	*3300,11	*2302,01	*2431,1	*4310,1
	5	3221,11	3300,11	*4110,1	3201,11	*3300,11	*4201,21	3201,1	3311,2	3211,2
9/2	3	3212	*3312	*3122,11	3202,01	*2302,01	3201,1	3211,01	*3300,11	3200,1
	4	3121,101	*3201,11	3221,11	2311,11	*2431,1	3311,2	*3300,11	*3413,2	3310,2 (23)^2
	5	3021,11	*3300,11	*3120,11	*4211,101	*4310,1	3211,2	3200,1	3310,2 (23)^2	3210,2

Таблица 16

$Z^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\ 0\right)$

J_2	l_2 \ J_1 / l_1	1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0	1									
	1		1								
3/2	1			*2							
	2				*2						
5/2	2					11					
	3						11				
7/2	3							*3			
	4								*3		
9/2	4									101	
	5										101

Таблица 17

$Z^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\ 1\right)$

J_2	l_2 \ J_1 / l_1	1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0	*1		2							
	1		1		2						
3/2	1	*2		201	*201	*221					
	2		*2				*221				
5/2	2			221		*1211	1211	3201			
	3				221				3201		
7/2	3					*3201			*3101	*311	
	4						*3201	3101			*311
9/2	4							311		*1110,1	1110,1
	5								311		

Таблица 18

$Z^2\left(l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ \frac{1}{2}\ 2\right)$

J_2	l_2 \ J_1 / l_1	1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0				2	11					
	1			*2			11				
3/2	1		*2	*2		2101		*3201			
	2				*2		*2101		*3201		
5/2	2	11			2101	4101		*3001		2021	
	3		11				4101		*3001		2021
7/2	3			*3201		*3001		*3121		*3121,1	
	4				*3201		3001		*3121	3121,1	
9/2	4					2021		3001		3121,1	4120,1
	5						2021		*3121,1		4120,1

Таблица 19

$$Z^2\left(l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ \frac{1}{2}\ 3\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0						11	3			
	1					*11			3		
3/2	1				*221	*311			*31	*311	
	2			221			*311	31			*311
5/2	2		11	311			401	3			2010,1
	3	*11			311	*401			3	*2010,1	
7/2	3	*3			*31	*3			*3100,1	*3110,1	
	4		*3	31			*3	3100,1			*3110,1
9/2	4			311			*2010,1	3110,1			4110,11
	5				311	*2010,1			3110,1	*4110,11	

Таблица 20

$$Z^2\left(\ l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ \frac{1}{2}\ 4\right)$$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0								3	101	
	1							*3			101
3/2	1						*3201	*3011			*3010,1
	2					3201			*3011	3010,1	
5/2	2				3201	2201			3211,1	4211,1	
	3			*3201			2201	*3211,1			4211,1
7/2	3		*3	*3011			*3211,1	*3401,1			*3411,11
	4	3			*3011	3211,1			*3401,1	3411,11	
9/2	4	101			3010,1	4211,1			3411,11	3410,11	
	5		101	*3010,1			4211,1	*3411,11			2410,11

Таблица 21

$$Z^2\left(l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ \frac{1}{2}\ 5\right)$$

J_2 \ J_1		1/2		3/2		5/2		7/2		9/2	
	l_2 \ l_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1/2	0										101
	1									*101	
3/2	1								*311	*211	
	2							311			*211
5/2	2						2021	3011			4010,01
	3					*2021			3011	*4010,01	
7/2	3				*311	*3011			*3121,01	*3110,01	
	4			311			*3011	3121,01			*3110,01
9/2	4		101	211			4010,01	3110,01			2110,01
	5	*101			211	*4010,01			3110,01	*2110,01	

Таблица 22

$$Z^2\ \ (l_1\ J_1\ l_1\ J_2;\ 10)$$

J_2 \ J_1		0	1			2			3			4		
	l_2 \ l_1	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1	*e												
1	0		01											
	1			01										
	2				01									
2	1					*001								
	2						*001							
	3							*001						
3	2								0001					
	3									0001				
	4										0001			
4	3											*02		
	4												*02	
	5													*02

Таблица 23

Z^2 $(l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ 11)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1		*e		*1								
1	0 1 2	e 1	*01	01 *11	11	001 101	12	031					
2	1 2 3		*001	*12	*101 *031	11	*11 e	*e	*1111 *0011	*3	*2111			
3	2 3 4					1111	3	0011 2111	*e	e *21	21	0401 2101	221	0111
4	3 4 5								*0401	 *221 	*2101 *0111	21	*21 011	*011

Таблица 24

Z^2 $(l_1\ J_1\ l_2\ J_2;\ 12)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1				*1		*01						
1	0 1 2		01	*11	01 11	*12	001 *101	01	0001 1001	11	1301			
2	1 2 3	*1 *01	001	*12 01	*101	*1001 *0101	*1021	*0101 *5001	2011	*01 1	*0111	*0401 *1101	*0121	*1131
3	2 3 4		0001	11	1011 1301	*01	2011 *0111	1	4101 0001	2101	0001 2141	*212	0111 *2211	011
4	3 4 5					*0401	*0121	*1101 *1131	0111	*212 011	*2211	*2021,1 *0011,1	*2201,102	*0011,1 *4001,1

Таблица 25

$Z^2(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 13)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
		1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1								*01		*2			
1	0							001		0001		02		
	1						*01		*11		12		111	
	2					031		301		*1001		1		101
2	1				*031		*11		*121		*111		*12	
	2			01		11		*2		*1101		112		*111
	3		*001		*301		2		*411		*001		01	
3	2	01		11		121		411		1101		1100,1		1110,1
	3		*0001		1101		1101		*1101		1001		1111,1	
	4	2		*12		111		001		*1001		1200,1		1210,1
4	3		*02		*1		*112		*1100,1		*1200,1		*1400,1	
	4			*111		12		*01		*1111,1		1400,1		*1410,1
	5				*101		111		*1110,1		*1210,1		1410,1	

Таблица 26

$Z^2(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 14)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	0	1			2			3			4		
		1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1											*2		*001
1	0										0001		02	
	1									*12		*111		11
	2								1301		1021		*12	
2	1							*2111		*111		*1011,1		*1001,1
	2						3011		1021		*1121		*1311,1	
	3					*2111		*1011		001		*0311,1		*4301,1
3	2				1301		1021		1001,1		1121,1		1501,1	
	3		*12			*111		001		1001,1		*1310,1		1300,1
	4		0001		1021		*1121		1121,1		1601,1		*1601,1	
4	3	*2		*111		*1011,1		*0311,1		*1310,1		*1401,11		*1411,11
	4		02		*12		*1311,1		1501,1		*1601,1		*1801,11	
	5	*001		11		*1001,1		*4301,1		1300,1		*1411,11		*1401,11

Таблица 27

$Z^2(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 15)$

J_2	l_2 \ J_1 \ l_1	0	1			2			3			4		
		1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
0	1													
1	0 1 2											101	*11	02 1
2	1 2 3								*1131	012	*0111 *1011	012	*02 11	*211
3	2 3 4					0111	*012	1131 1011	*012	012 *202	202	0111,01 2231,01	2100,01	4101,01 0201,01
4	3 4 5		*02	11	*101 *1	02	*012 211	*11	*0111,01 *4101,01	*2100,01	*2231,01 *0201,01	2410,01	*2410,01 0400,01	*0400,01

Таблица 28

$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{3}{2}\ 0\right)$

J_2	l_2 \ J_1 \ l_1	1/2		3/2				5/2				7/2				9/2		
		1	2	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5
1/2	1 2	*1	*1															
3/2	0 1 2 3			2	2	2	2											
5/2	1 2 3 4							*11	*11	*11	*11							
7/2	2 3 4 5											3	3	3	3			
9/2	3 4 5															*101	*101	*101

$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2; \frac{3}{2} 1\right)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2				5/2		7/2				9/2		
		1	2	0	1	2	3	1	2	2	3	4	5	3	4	5
1/2	1		*1	*1		*1										
	2	1			*101		*121									
3/2	0	1			2			11								
	1		101	*2		602			1221							
	2	1			*602		222	112								
	3		121			*222			1221							
5/2	1			*11		*112			*132	*411						
	2				*1221		*1221	132		*8222	*4302					
	3					*422			8222		*1212	*1222				
	4						*4101			1302	*1002		*101			
7/2	2							411		1212	3202			1211		
	3								4302			7212			1210,1	
	4									1222	*7212		32	1201		4201
	5											*32			1200,1	
9/2	3										*1211	*1201			*121	
	4										*1210,1		*1200,1	121		*8210,2
	5											*4201			8210,2	

$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{3}{2}2\right)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2				5/2			
		1	2	0	1	2	3	1	2	3	4
1/2	1				*101		*121	*121		*211	
	2			1		1			*1101		*2201
3/2	0		1			2			11		
	1	*101			*602		222	*1221		8121	
	2		1	2					*1122		4202
	3	*121			222		602	*1221		*4321	
5/2	1	*121			*1221		*1221	*2121		*1421	
	2		*1101	11		*1122			*2123		*1403
	3	*211			8121		*4321	*1421		*0121,2	
	4		*2201			4202			*1403		*0143
7/2	2			3		5002			4403		1103
	3				3311		5111	*4211		1111,02	
	4					3212			*8013		1133
	5						3121			*1121	
9/2	3							*1211		*0111	
	4								*1022,1		*0122,1
	5									*1131	

7/2				9/2		
2	3	4	5	3	4	5
3						
	3311					
5002		3212				
	5111		3121			
	*4211			*1211		
4403		*8013			*1022,1	
	1111,02		*1121	*0111		*1131
1103		1133			*0122,1	
5123		3113			1122	
	5321		3311	*1321,1		8321,1
3113		5103,02			*1112,2(71)^2	
	3311		5301	*1311,1		*4311,1
	*1321,1		*1311,1	*0320,1		*1320,1
1122		*1112,2(71)^2			*0142,3	
	8321,1		*4311,1	*1320,1		*2340,1

$Z^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{3}{2}3\right)$

J_2 \ J_1 / l_2 \ l_1		1/2		3/2				5/2		
		1	2	0	1	2	3	1	2	3
1/2	1								*1101	
	2							121		211
3/2	0						2			11
	1					*222			*8121	
	2				222		602	422		*112
	3			*2		*602			4321	
5/2	1		*121			*422			*2521	
	2	1001			8121		*4321	2521		*1021,002
	3		*211	*11		112			1021,002	
	4	2201			*1201		*1201	1001		0301
7/2	2	2201			3311		5111	2311		3211
	3		21	*3		52			2101	
	4	2011			*7101		3101	2101		3001
	5		211			*321			2111	
9/2	3			*101		*121			*1111,1	
	4				*1100,1		*1100,1	11		*0000,2(23)²
	5					*421			8111,1	

	7/2				9/2		
4	2	3	4	5	3	4	5
*2201	*2201		*2011				
		*21		*211			
		3			101		
1201	*3311		7101			1100,1	
		*52		321	121		421
1201	*5111		*3101			1100,1	
*1001	*2311		*2101			*11	
		*2101		*2111	1111,1		*8111,1
*0301	*3211		*3001			0000,2(23)²	
		*3001		*3011	0011,1		1031,1
		5201,1		3211,1	3211,1		2231,1
3001	*5201,1		3211,1	5201,1	3201,1	3210,2	
		*3211,1					2401,1
3011	3211,1*		*5201,1			3200,2	
*0011,1	*3211,1		*3201,1			*0210,21	
		*3210,2		*3200,2	0210,21		*1610,21
*1031,1	*2231,1		*2401,1			1610,21	

$Z^2\left(l_1\,J_1\,l_2\,J_2;\ \frac{3}{2}\ 4\right)$

J^2 \ J_1 / l_1 / l_2		1/2		3/2				5/2	
		1	2	0	1	2	3	1	2
1/2	1								
	2								
3/2	0								
	1								
	2								4202
	3							*4101	
5/2	1						*4101		
	2					4202			8203
	3				*1201		*1201	*1301	
	4			11		1122			*1323
7/2	2		2201			3212			2213,1
	3	*21			*7101		3101	*2001,1	
	4		2011	3		*5002			*2203,1002
	5	*211			3111		5111	*2011,1	
9/2	3	*211			*1100,1		*1100,1	*1001,1	
	4		*2010,1	101		*1012,2			*1212,2
	5	*111			8100,1		*4100,1	*2001,1	

		7/2				9/2		
3	4	2	3	4	5	3	4	5
		2201	*21	2011	*211	*211	*2010,1	*111
*1201	11	3212	*7101	*5002	3111	*1100,1	*1012,2	8100,1
*1201	1122		3101		5111	*1100,1		*4100,1
*1301			*2001,1		*2011,1	*1001,1		*2001,1
0201	*1323	2213,1	3301,1	*2203,1002	*3511,1	*0501,1	*1212,2	*1301,1
	*0303	3133,1		3703,1			*0712,2	
3301,1	3133,1	3203,1	*3001,1	5413,1	5011,1	*3011,11	3412,21	2011,112
*3511,1	3703,1	5413,1	5011,1	3403,1	3001,1	*3021,11	*3442,21	*2021,11
*0501,1	*0712,2	3412,21	*3011,11	*3442,21	*3021,11	*0010,11	*0412,31	*1030,11
*1301,1			2011,112		*2021,11	*1030,11		*6010,11

$Z^2\left(l_1 J_1\, l_2 J_2;\ \frac{3}{2}\ 5\right)$

J_2 \ J_1 / l_1 / l_2	1/2		3/2				5/2		
	1	2	0	1	2	3	1	2	3
1/2									
1									
2									
3/2									
0									
1									
2									
3									
5/2									
1									
2									1032
3								*1032	
4							101		0312
7/2									
2						3121			1222
3					*321			*8112	
4				3111		5111	411		*1012,002
5			*3		*52			41	
9/2									
3		*211			*421			*1111,01	
4	2010,1			8100,1		*4100,1	1100,11		*0000,1102
5		*111	*101		121			2111,01	

	7/2				9/2		
4	2	3	4	5	3	4	5
					211	*2010,1	111
				3			101
			*3111			*8100,1	
		321		52	421		*121
	*3121		*5111			4100,1	
*101			*411			*1100,11	
		8112		*41	1111,01		*2111,01
*0312	*1222		1012,002			0000,1102	
		*1032		*1	0031,01		1011,01
		3222,01		5210,01	1211,01		4211,01
1032	*3222,01		5212,01			*1210,11	
		*5212,01		3200,01	1221,01		
1	*5210,01		*3200,01			1220,11	
*0031,01	*1211,01		*1221,01			*0230,11	
		1210,11		*1220,11	0230,11		*1410,11
*1011,01	*4211,01					1410,11	

Таблица 34

$Z^2_\gamma\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\,0\right)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2		5/2	
		0	1	1	2	2	3
1/2	0						
	1		*1				
3/2	1			2			
	2				2		
5/2	2					*11	
	3						*11

Таблица 35

$Z^2_\gamma\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\,1\right)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2		5/2	
		0	1	1	2	2	3
1/2	0						
	1		*1	*e*	*01		
3/2	1		*e*	001	011	031	
	2		*01	011	021	*001	501
5/2	2			031	*001	*1011	*4011
	3				501	*4011	*1011

Таблица 36

$Z^2_\gamma\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\,2\right)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2		5/2	
		0	1	1	2	2	3
1/2	0						
	1			*e*	*01	1	*2
3/2	1		*e*	*e*	01	0001	3001
	2		*01	01	**e*	0101	3101
5/2	2		1	0001	0101	2101	*1101
	3		*2	3001	3101	*1101	0301

Таблица 37

$Z^2_\gamma\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\,3\right)$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2		5/2	
		0	1	1	2	2	3
1/2	0						
	1					1	*2
3/2	1				211	301	001
	2			211	*401	311	*011
5/2	2		1	301	311	221	101
	3		*2	001	*011	101	001

Таблица 38

$$Z_\gamma^2\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2}\,4\right)$$

J_2 \ J_1	l_2 \ l_1	1/2		3/2		5/2	
		0	1	1	2	2	3
1/2	0 1						
3/2	1 2					5001	0301 *0021
5/2	2 3			0301	5001 *0021	4001 1021	1021 *0001

Таблица 39

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
1/2	1	1/2	0	13	3/2	1	5/2	2	*421
3/2	1	1/2	0	33	3/2	2	5/2	2	43
1/2	0	1/2	1	13	5/2	3	5/2	2	1211
3/2	1	1/2	1	42	7/2	3	5/2	2	3301
3/2	2	1/2	1	*43	3/2	2	5/2	3	331
1/2	0	3/2	1	*33	5/2	2	5/2	3	1211
1/2	1	3/2	1	42	7/2	3	5/2	3	53
3/2	2	3/2	1	131	7/2	4	5/2	3	*5201
5/2	2	3/2	1	421	5/2	2	7/2	3	*3301
1/2	1	3/2	2	43	5/2	3	7/2	3	53
3/2	1	3/2	2	131	7/2	4	7/2	3	1401
5/2	2	3/2	2	43	5/2	3	7/2	4	5201
5/2	3	3/2	2	*331	7/2	3	7/2	4	1401

Таблица 40

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2
3/2	1	5/2	2	*4421
5/2	2	5/2	2	421
3/2	3	5/2	2	1121
3/2	3	5/2	2	4121
5/2	4	5/2	2	4522
5/2	1	5/2	3	141
1/2	1	5/2	3	3411
3/2	2	5/2	3	2221
5/2	2	5/2	3	1121
5/2	3	5/2	3	521
7/2	4	5/2	3	*5511
1/2	1	7/2	3	*2211
1/2	2	7/2	3	3021
3/2	2	7/2	3	*4121
5/2	3	7/2	3	521
5/2	4	7/2	3	1311
7/2	2	7/2	4	322
7/2	2	7/2	4	4522
1/2	3	7/2	4	5511
1/2	3	7/2	4	1311

Таблица 41

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
5/2	3	1/2	0	0202	7/2	4	5/2	2	6501
7/2	3	1/2	0	4002	1/2	0	5/2	3	0202
5/2	2	1/2	1	0401	1/2	1	5/2	3	0402
5/2	3	1/2	1	*0402	3/2	1	5/2	3	5432
7/2	3	1/2	1	6222	3/2	2	5/2	3	5112
7/2	4	1/2	1	*6101	5/2	2	5/2	3	1112
3/2	2	3/2	1	1211	7/2	3	5/2	3	5201
5/2	2	3/2	1	3411	7/2	4	5/2	3	*5502,1
5/2	3	3/2	1	5432	1/2	0	7/2	3	*4002
7/2	3	3/2	1	5102	1/2	1	7/2	3	6222
7/2	4	3/2	1	5201	3/2	1	7/2	3	*5102
3/2	1	3/2	2	1211	3/2	2	7/2	3	5002
5/2	2	3/2	2	4201	5/2	2	7/2	3	*6202
5/2	3	3/2	2	*5112	5/2	3	7/2	3	5201
7/2	3	3/2	2	5002	7/2	4	7/2	3	1302
7/2	4	3/2	2	*5301	1/2	1	7/2	4	6101
1/2	1	5/2	2	0401	3/2	1	7/2	4	5201
3/2	1	5/2	2	*3411	3/2	2	7/2	4	5301
3/2	2	5/2	2	4201	5/2	2	7/2	4	6501
5/2	3	5/2	2	1112	5/2	3	7/2	4	5502,1
7/2	3	5/2	2	6202	7/2	3	7/2	4	1302

15 Зак. 1924

Таблица 42

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & 1/2 \\ d & e & 1/2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	d	e	X^2	a	b	d	e	X^2
7/2	4	1/2	0	451	5/2	2	5/2	3	1311
7/2	3	1/2	1	641	7/2	3	5/2	3	54
7/2	4	1/2	1	*64	7/2	4	5/2	3	*5411
5/2	3	3/2	1	5311	1/2	1	7/2	3	641
7/2	3	3/2	1	5401	3/2	1	7/2	3	*5401
7/2	4	3/2	1	5411	3/2	2	7/2	3	5121
5/2	2	3/2	2	44	5/2	2	7/2	3	*6421,1
5/2	3	3/2	2	*5411	5/2	3	7/2	3	54
7/2	3	3/2	2	5121	7/2	4	7/2	3	1501
7/2	4	3/2	2	*5520,1	1/2	0	7/2	4	451
3/2	2	5/2	2	44	1/2	1	7/2	4	64
5/2	3	5/2	2	1311	3/2	1	7/2	4	5411
7/2	3	5/2	2	6421,1	3/2	2	7/2	4	5520,1
7/2	4	5/2	2	6422	5/2	2	7/2	4	6422
3/2	1	5/2	3	5311	5/2	3	7/2	4	5411
3/2	2	5/2	3	5411	7/2	3	7/2	4	1501

Таблица 43

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & e & f \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	c	a	e	f	X^2	
						$k=2$	$k=4$
1	1	1	1	1	2	*223	
1	2	1	1	2	2	2141	
3/2	1	1/2	3/2	1	3/2	612	
3/2	1	3/2	3/2	1	5/2	*612	
3/2	2	1/2	3/2	2	3/2	6031	
3/2	2	3/2	3/2	2	5/2	612	
2	1	1	2	1	2	2141	
2	2	1	2	2	2	2121	*1421
5/2	1	3/2	5/2	1	5/2	322	
5/2	2	1/2	5/2	2	3/2	3131	4301
5/2	2	3/2	5/2	2	5/2	0122	*5312
3	2	1	3	2	2	0242	2412,1

Таблица 44

$$X^2\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & e & c \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

a	b	c	a		c	X^2	
						$k=2$	$k=4$
1	1	2	1	3	2	222	
3/2	1	3/2	3/2	3	3/2	322	
3/2	1	5/2	3/2	3	5/2	1321	
2	1	1	2	3	1	2311	3301
2	1	2	2	3	2	1221	*4411
5/2	1	3/2	5/2	3	3/2	2221	5301
5/2	1	5/2	5/2	3	5/2	1123	*2603
3	1	2	3	3	2	0222	4502,1

Таблица 45

$[\Delta(abc)]^{-2}$; a, b, c — целые числа

a	b	$c=0$	1	2	3	4	5	6
1	1	01	31	111	0111	1211	1111,1	2101,11
2	1		111	311	5011	4211	4301,1	0210,11
2	2	001	311	1211	2311	1221,1	5210,1	4201,11
3	2		0111	5011	5121	2211,1	2211,11	2212,11
3	3	0001	4101	2311	4211	5211,1	4202,11	0321,11
4	2			1211	1221,1	1221,11	5111,11	7211,11
4	3		2201	4211	5211,1	2211,11	1222,11	4112,111
4	4	02	421	2211,1	4301,1	4202,11	6302,11	6021,11
5	3			1111,1	2211,11	1222,11	0321,11	2221,111
5	4		0210,1	5210,1	5111,11	4201,11	7211,11	6401,111
5	5	0000,1	3110,1	1310,11	2101,11	2212,11	4112,111	4202,1111
6	3				4201,11	7211,11	6401,111	5211,1111
6	4			0210,11	0321,11	2221,111	3211,111	2311,1111
6	5		1100,11	3011,11	7211,11	7210,11	7310,111	7311,1111
6	6	0000,01	3101,01	1211,11	6021,11	2221,111	6401,111	3312,1111
7	4				0211,11	7210,11	3211,111	3201,1111
7	5			0111,11	5111,11	3211,111	7310,111	6120,1111
7	6		0111,01	6111,01	3111,111	5211,111	2311,1111	1421,1111
7	7	011	5111	3111,011	6211,011	2211,1111	5211,1111	5211,2111
8	4					1210,111	5210,1111	3102,2111,1
8	5				3001,111	5210,1111	1410,1111	
8	6			2011,011	5301,011	3201,1111	6120,1111	
8	7		3110,001	5211,001	2211,0111	6211,0111	3212,1111	
8	8	0000,001	5200,001	3310,0011	6121,0011	2222,0111	5302,1111	

Таблица 46

$[\Delta(abc)^{-2}]$; a, b — полуцелые числа

a	b	$c=0$	1	2	3	4	5	6
1/2	1/2	1	11					
3/2	1/2		21	201				
3/2	3/2	2	211	221	2011			
5/2	1/2			111	1101			
5/2	3/2		211	2111	3111	3201		
5/2	5/2	11	1111	4111	4211	2221	2201,1	
7/2	1/2				3001	32		
7/2	3/2			3011	3301	3211	3110,1	
7/2	5/2		3101	3211	3221	3211,1	3211,1	3200,11
7/2	7/2	3	3201	3311	3121,1	3221,1	3301,11	3102,11
9/2	1/2					121	1010,1	
9/2	3/2				3111	3210,1	2310,1	2010,11
9/2	5/2			2211	2211,1	4211,1	4210,11	1211,11
9/2	7/2		321	3111,1	3311,1	3211,11	3112,11	3311,11
9/2	9/2	101	1210,1	4310,1	4111,11	2212,11	2312,11	6112,11
11/2	1/2						2100,1	2100,01
11/2	3/2					2210,1	2110,11	2101,11
11/2	5/2				3201,1	3210,11	2211,11	2121,11
11/2	7/2			3210,1	3201,11	3202,11	3221,11	4221,11
11/2	9/2		2110,1	2210,11	3211,11	3212,11	5212,11	5211,111
11/2	11/2	21	2100,11	2111,11	2221,11	5221,11	5202,111	5302,111

Продолжение табл. 46

a	b	$c=7$	8	9	10	11
7/2	7/2	3210,11				
9/2	5/2	1111,11				
9/2	7/2	4211,11	4010,111			
9/2	9/2	6210,111	2410,111	2010,1111		
11/2	3/2	2111,01				
11/2	5/2	4111,11	4101,011			
11/2	7/2	4111,111	4201,111	4200,0111		
11/2	9/2	4311,111	4210,1111	3210,1111	3111,0111	
11/2	11/2	5310,1111	3320,1111	3121,1111	3101,2111	3101,0111,1

Таблица 47

$(l_1 0_2 0/L0)^2$

l_1 l_2	$L=0$	2	4	6	8	10	12
0 0	e						
1 1	*01	11					
2 2	001	*1001	1211				
3 3	*0001	2101	*1201,1	2121,1			
4 4	02	*2221,1	1401,11	*2210,1	1212,11		
5 5	*0000,1	1120,11	*1200,11	*4110,101	*1012,1101	2402,1111	
6 6	0000,01	*1001,11	2201,111	*4020,1011	1021,1101	*2402,0111,1	2201,2111,1
0 2		e					
0 4			e				
0 6				e			
1 3		*0101	2001				
1 5			*0010,1	1100,1			
2 4		1001	*2011,1	0010,1			
2 6			0210,11	*1011,1	*2011,01		
3 5		*1121,1	2211,11	*0101,1	3001,11		
4 6		0020,11	*2010,11	2001,101	*3201,1101	1112,0111	

Продолжение табл. 47

l_1 l_2	$L=1$	3	5	7	9	11
0 1	e					
0 3		e				
0 5			e			
1 2	*101	011				
1 4		*22	021			
1 6			*1100,01	0001,01		
2 3	0211	*211	1111			
2 5		1110,1	*1110,01	0201,11		
3 4	*2101	1000,1	*2011,01	0121,11		
3 6		*2120,11	0101,01	*3201,111	2101,011	
4 5	0110,1	*2010,11	1000,01	*3121,111	1202,111	
5 6	*1200,11	0102,11	*4110,011	2221,1111	*2111,111	1201,1111

Таблица 48

$(l_1 - 1 l_2 1\, L0)^2$

l_1 l_2	$L=0$	1	2	3	4	5	6
1 1	01	*1	11				
2 2	*001	101	1001	*101	3011		
3 3	0001	*2001	*2101	11	1001,1	*2121	2121,1
1 2		111	*1	001			
1 3			1001	*1	1101		
2 3		*3011	0001	111	*1011	0111	

Таблица 49

Факториалы

$1! = e$	$7! = 4211$	$13! = \bar{0}521,11$	$19! = \bar{6}832,1111$
$2! = 1$	$8! = 7211$	$14! = \bar{1}522,11$	$20! = \bar{8}842,1111$
$3! = 11$	$9! = 7411$	$15! = \bar{1}632,11$	$21! = \bar{8}943,1111$
$4! = 31$	$10! = 8421$	$16! = \bar{5}632,11$	$22! = \bar{9}943,2111$
$5! = 311$	$11! = 8421,1$	$17! = \bar{5}632,111$	$23! = \bar{9}943,2111,1$
$6! = 421$	$12! = \bar{0}521,1$	$18! = \bar{6}832,111$	$24! = \bar{2}\bar{0}43,2111,1$

Таблица 50

$\left(j_1 m_1 \frac{1}{2} m_2 | jm\right)$

$j=$	$m_2=\frac{1}{2}$	$m_2=-\frac{1}{2}$
$j_1+\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$
$j_1-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$

Таблица 51

$(j_1 m_1 1 m_2 | jm)$

$j=$	$m_2=1$	$m_2=0$	$m_2=-1$
j_1+1	$\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
j_1-1	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)}}$

Таблица 52

$$\left(j_1 m_1 \tfrac{3}{2} m_2 | jm\right)$$

$j=$	$m_2=\frac{3}{2}$	$m_2=\frac{1}{2}$
$j_1+\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1+\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{3\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$-\left(j_1-3m+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$-\left(j_1+3m-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1-\frac{3}{2}$	$-\sqrt{\frac{\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

Продолжение табл. 52

$j=$	$m_2=-\frac{1}{2}$	$m_2=-\frac{3}{2}$
$j_1+\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{3}{2}\right)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1+\frac{1}{2}$	$\left(j_1+3m+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m+\frac{1}{2}\right)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1-\frac{1}{2}$	$-\left(j_1-3m-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{3\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1-\frac{3}{2}$	$-\sqrt{\frac{3\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1-m-\frac{1}{2}\right)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{\left(j_1+m-\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{1}{2}\right)\left(j_1+m+\frac{3}{2}\right)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

Таблица 53

$(j_1\, m_1 2 m_2 \mid jm)$

$j=$	$m_2=2$	$m_2=1$	$m_2=0$
j_1+2	$\sqrt{\dfrac{(j_1+m-1)(j_1+m)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\times\dfrac{\times(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1+3)(2j_1+4)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m+2)(j_1+m+2)}{(2j_1+1)(j_1+1)}\times\dfrac{\times(j_1+m+1)(j_1+m)}{(2j_1+3)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\dfrac{3(j_1-m+2)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\times\dfrac{\times(j_1+m+2)(j_1+m+1)}{(2j_1+3)(j_1+2)}}$
j_1+1	$-\sqrt{\dfrac{(j_1+m-1)(j_1+m)}{2j_1(j_1+1)}\times\dfrac{\times(j_1+m+1)(j_1-m+2)}{(j_1+2)(2j_1+1)}}$	$\times\sqrt{\dfrac{-(j_1-2m+2)}{2j_1(2j_1+1)}\times\dfrac{\times(j_1+m+1)(j_1+m)}{(j_1+1)(j_1+2)}}$	$m\sqrt{\dfrac{3(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(j_1+2)}}$
j_1	$\sqrt{\dfrac{3(j_1+m-1)(j_1+m)}{(2j_1-1)2j_1}\times\dfrac{\times(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(j_1+1)(2j_1+3)}}$	$\times\sqrt{\dfrac{(1-2m)}{3(j_1-m+1)(j_1+m)}\times\dfrac{\times}{(2j_1-1)j_1(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\dfrac{3m^2-j_1(j_1+1)}{\sqrt{(2j_1-1)\,j_1(j_1+1)(2j_1+3)}}$
j_1-1	$-\sqrt{\dfrac{(j_1+m-1)(j_1-m)}{2(j_1-1)j_1}\times\dfrac{\times(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(j_1+1)(2j_1+1)}}$	$\times\sqrt{\dfrac{(j_1+2m-1)}{(j_1-m+1)(j_1-m)}\times\dfrac{\times}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$-m\sqrt{\dfrac{3(j_1-m)(j_1+m)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(j_1+1)}}$
j_1-2	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m-1)(j_1-m)}{(2j_1-2)(2j_1-1)2j_1}\times\dfrac{\times(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\dfrac{(j_1-m+1)(j_1-m)}{(j_1-1)(2j_1-1)}\times\dfrac{\times(j_1-m-1)(j_1+m-1)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\dfrac{3(j_1-m)(j_1-m-1)}{(2j_1-2)(2j_1-1)}\times\dfrac{\times(j_1+m)(j_1+m-1)}{j_1(2j_1+1)}}$

Продолжение табл. 53

$j=$	$m_2=-1$	$m_2=-2$
j_1+2	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m+2)(j_1-m+1)(j_1-m)(j_1+m+2)}{(2j_1+1)(j_1+1)(2j_1+3)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(2j_1+4)}}$
j_1+1	$(j_1+2m+2)\sqrt{\dfrac{(j_1-m+1)(j_1-m)}{j_1(2j_1+1)(2j_1+2)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1+m+2)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(2j_1+4)}}$
j_1	$(2m+1)\sqrt{\dfrac{3(j_1-m)(j_1+m+1)}{(2j_1-1)j_1(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\dfrac{3(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1-1)j_1(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
j_1-1	$-(j_1-2m-1)\sqrt{\dfrac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1-m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1-2	$-\sqrt{\dfrac{(j_1-m-1)(j_1+m+1)(j_1+m)(j_1+m-1)}{(j_1-1)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\dfrac{(j_1+m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1-2)(2j_1-1)2j_1(2j_1+1)}}$

Таблица 54

$$W\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\ \frac{1}{2};\ L\right)$$

$l_1 = J_1 + \frac{1}{2}$	$l_1 = J_1 - \frac{1}{2}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(J_1+J_2+L+2)(J_1+J_2-L+1)}{(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2+1)(2J_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)}{(2J_1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1-J_2+1)(L-J_1+J_2)}{(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{(J_1+J_2+L+1)(J_1+J_2-L)}{(2J_1)(2J_1+1)(2J_2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Таблица 55

$$W(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 1,\ L)$$

$l_2 = J_2 + 1$
$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{4(2J_1+3)(J_1+1)(2J_1+1)(2J_2+3)(J_2+1)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)}{4J_1(2J_1+1)(J_1+1)(2J_2+1)(J_2+1)(2J_2+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{4(2J_1+1)(2J_1-1)(J_1)(J_2+1)(2J_2+1)(2J_2+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 55

$$l_2 = J_2$$

$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(J_1+J_2-L+1)(L-J_1+J_2)}{4(2J_1+1)(J_1+1)(2J_1+3)(J_2)(J_2+1)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{J_1(J_1+1)+J_2(J_2+1)-L(L+1)}{[4J_1(J_1+1)(2J_1+1)(J_2)(J_2+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}}}\right]$
$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2+1)}{4(2J_1+1)(J_1)(2J_1-1)(J_2)(2J_2+1)(J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$l_2 = J_2 - 1$$

$l_1 = J_1 + 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{4(2J_1+1)(J_1+1)(2J_1+3)(2J_2-1)(J_2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2+1)(L+J_2-J_1)(J_1+J_2-L)}{4J_1(2J_1+1)(J_1+1)(J_2)(2J_2+1)(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_1 = J_1 - 1$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)}{4(2J_1+1)(J_1)(2J_1-1)(2J_2+1)(J_2)(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Таблица 56

$$M\left(l_1 J_1 l_2 J_2;\quad \frac{3}{2}\, L\right)$$

$l_1 = J_1 + \frac{3}{2}$	
$l_2 = J_2 + \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1+J_2+4)\,(L+J_1+J_2+3)\,(L+J_1+J_2+2)\times (-L+J_1+J_2+3)\,(-L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)\,(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_2+4)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3\,(L+J_1+J_2+3)\,(L+J_1+J_2+2)\,(L+J_1-J_2+1)\times (L-J_1+J_2)\,(-L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)\,(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3\,(L+J_1+J_2+2)\,(L+J_1-J_2+2)\,(L+J_1-J_2+1)\times (L-J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2-1)\,(J_1+J_2-L+1)}{(2J_1+4)\,(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L-J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2-1)\,(L-J_1+J_2-2)\times (L+J_1-J_2+3)\,(L+J_1-J_2+2)\,(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+4)\,(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)\,(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 56

$l_1 = J_1 + \frac{1}{2}$	
$l_2 = J_2 + \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3\,(L+J_1+J_2+3)\,(L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+2)\times (-L+J_1+J_2+1)\,(L-J_1+J_2+1)\,(L+J_1-J_2)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_2+4)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\,\frac{[(L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+1)]^{\frac{1}{2}}\times [(L+J_1+J_2+3)\,(-L+J_1+J_2)-2\,(L-J_1+J_2)\,(L+J_1-J_2)]}{[(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)]^{\frac{1}{2}}}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\,\frac{[(L+J_1-J_2+1)\,(L-J_1+J_2)]^{\frac{1}{2}}\times [2\,(L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2)-(L-J_1+J_2-1)\,(L+J_2-J_2)]}{[(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)]^{\frac{1}{2}}}$
$l_2 = J_2 - \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{3\,(L+J_1+J_2+1)\,(L-J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2-1)\times (L+J_1-J_2+2)\,(L+J_1-J_2+1)\,(-L+J_1+J_2)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)\,(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 56

$l_1 = J_1 - \frac{1}{2}$	
$l_2 = J_2 + \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2+2)\times}{\times(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)}{(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\frac{[(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)]^{\frac{1}{2}}\times}{\times[(L-J_1+J_2)(L+J_1-J_2-1)-2(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2)]}{[(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)]^{\frac{1}{2}}}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\frac{[(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)]^{\frac{1}{2}}\times}{\times[(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2-1)-2(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2)]}{[(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)]^{\frac{1}{2}}}$
$l_2 = J_2 - \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L-J_1+J_2)\times}{\times(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)}{(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 56

$l_1 = J_1 - \frac{3}{2}$	
$l_2 = J_2 + \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)\times}{\times(L-J_1+J_2+3)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L+J_1-J_2)\times}{\times(L+J_1-J_2-1)(L-J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - \frac{1}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L}\left[\frac{3(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2)\times}{\times(-L+J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2)(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - \frac{3}{2}$	$(-1)^{J_1+J_2-L-1}\left[\frac{(L+J_1+J_2+1)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)\times}{\times(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2-2)}{(2J_1+1)(2J_1)(2J_1-1)(2J_1-2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Таблица 57

$W(l_1 J_1 l_2 J_2;\ 2L)$

$l_1 = J_1 + 2$	
$l_2 = J_2 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{(L+J_1+J_2+5)(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+4)(-L+J_1+J_2+3)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{4(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2+3)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2)}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)\times(2J_2+1)(2J_2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)\times(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)\cdot(2J_2+3)(2J_2+2)\times(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{4(L+J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L-J_1+J_2-2)\times(L+J_1-J_2+3)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)\cdot(2J_2+2)(2J_2+1)\times(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L-J_1+J_2-2)(L-J_1+J_2-3)(L+J_1-J_2+4)\times(L+J_1-J_2+3)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+5)(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)\cdot(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)\times(2J_2-2)(2J_2-3)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 57

$l_1 = J_1 + 1$	
$l_2 = J_2 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{4(L+J_1+J_2+4)(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)\times(-L+J_1+J_2+3)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)\cdot(2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)\times(2J_2+2)(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{(L+J_1+J_2+3)(L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+2)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)\cdot(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)\times(2J_2+1)(2J_2)\times\times 4[(J_1+1)(J_1-J_2)-L(L+1)+J_2(J_2+2)]}\right]^{\frac{1}{2}}\times$
$l_2 = J_2$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{6(L+J_1+J_2+2)(L-J_1+J_2)(L+J_1-J_2+1)(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)\cdot(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)\times(2J_2)(2J_2-1)\times\times 2[J_1(J_1+2)+J_2(J_2+1)-L(L+1)]}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)\cdot(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)\times(2J_2-2)\times\times 4[J_1(J_1+2)+J_2(J_2+1)+J_1J_2-L(L+1)]}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{4(L+J_1+J_2+1)(-L+J_1+J_2)(L-J_1+J_2)(L-J_1+J_2-1)\times(L-J_1+J_2-2)(L+J_1-J_2+3)(L+J_1-J_2+2)(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+4)(2J_1+3)(2J_1+2)(2J_1+1)(2J_1)\cdot(2J_2+2)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)\times(2J_2-3)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 57

$l_1 = J_1$	
$l_2 = J_2 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6\,(L+J_1+J_2+3)\,(L+J_1+J_2+2)\,(L+2-J_1+J_2)\,(L+1-J_1+J_2)\times \times(L+J_1-J_2)\,(L+J_1-J_2-1)\,(-L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_1-1)\,(2J_2+5)\,(2J_2+4)\,(2J_2+3)\times \times(2J_2+2)\,(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{6\,(L+J_1+J_2+2)\,(L+J_1-J_2)\,(L-J_1+J_2+1)\,(-L+J_1+J_2+1)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_1-1)\,(2J_2+4)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\times \times(2J_2+1)\,(2J_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 2\,[J_1(J_1+1)+J_2(J_2+2)-L(L+1)]$
$l_2 = J_2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{1}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_1-1)\,(2J_2+3)\,(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 6\left[A(A+1)-\frac{4}{3}\,J_1(J_1+1)\,J_2(J_2+1)\right]$, где $A \equiv L(L+1)-J_1(J_1+1)-J_2(J_2+1)$
$l_2 = J_2 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6\,(L+J_1+J_2+1)\,(L-J_1+J_2)\,(L+J_1-J_2+1)\,(-L+J_1+J_2)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_1-1)\cdot(2J_2+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)\,(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 2\,[J_1(J_1+1)-L(L+1)+J_2^2-1]$
$l_2 = J_2 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6\,(L+J_1+J_2+1)\,(L+J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2-1)\,(-L+J_1+J_2)\times \times(-L+J_1+J_2-1)\,(L+J_1-J_2+2)\,(L+J_1-J_2+1)}{(2J_1+3)\,(2J_1+2)\,(2J_1+1)\,(2J_1)\,(2J_1-1)\cdot(2J_2+1)\,(2J_2)\,(2J_2-1)\,(2J_2-2)\times \times(2J_2-3)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Продолжение табл. 57

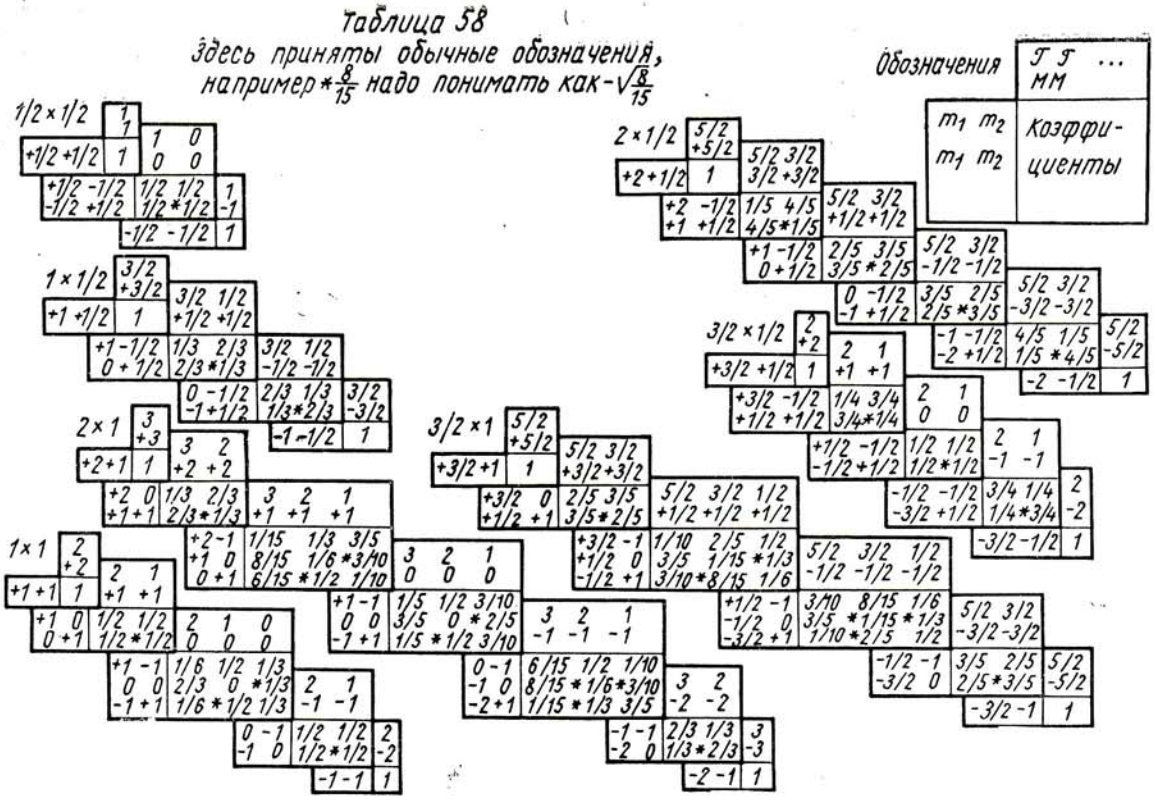
$l_1 = J_1 - 1$	
$l_2 = J_2 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{4\,(L+J_1+J_2+2)\,(-L+J_1+J_2+1)\,(L-J_1+J_2+3)\,(L-J_1+J_2+2)\times \times(L-J_1+J_2+1)\,(L+J_1-J_2)\,(L+J_1-J_2-1)\,(L+J_1-J_2-2)}{(2J_1-2)\,(2J_1-1)\,(2J_1)\,(2J_1+1)\,(2J_1+2)\,(2J_2+1)\,(2J_2+2)\,(2J_2+3)\times \times(2J_2+4)\,(2J_2+5)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{(L-J_1+J_2+2)\,(L-J_1+J_2+1)\,(L+J_1-J_2)\,(L+J_1-J_2-1)}{(2J_1-2)\,(2J_1-1)\,(2J_1)\,(2J_1+1)\,(2J_1+2)\,(2J_2)\,(2J_2+1)\,(2J_2+2)\,(2J_2+3)\,(2J_2+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 4\,[(J_1-1)(J_1+J_2+2)-(L+J_2+2)(L-J_2-1)]$
$l_2 = J_2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6\,(L+J_1+J_2+1)\,(L+J_1-J_2)\,(-L+J_1+J_2)\,(L-J_1+J_2+1)}{(2J_1-2)\,(2J_1-1)\,(2J_1)\,(2J_1+1)\,(2J_1+2)\,(2J_2-1)\,(2J_2)\,(2J_2+1)(2J_2+2)\times \times(2J_2+3)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 2\,[J_1^2-1-(L+J_2+1)(L-J_2)]$
$l_2 = J_2 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{(L+J_1+J_2+1)\,(L+J_1+J_2)\,(-L+J_1+J_2)\,(-L+J_1+J_2-1)}{(2J_1-2)\,(2J_1-1)\,(2J_1)\,(2J_1+1)\,(2J_1+2)\cdot(2J_2-2)\,(2J_2-1)\,(2J_2)\times \times(2J_2+1)\,(2J_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\times \times 4\,[(J_1-1)(J_1-J_2+1)-(L+J_2)(L-J_2+1)]$
$l_2 = J_2 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{4\,(L+J_1+J_2+1)\,(L+J_1+J_2)\,(L+J_1+J_2-1)\,(L+J_1-J_2+1)\,(-L+J_1+J_2)\times \times(-L+J_1+J_2-1)\,(-L+J_1+J_2-2)\,(L-J_1+J_2)}{(2J_1-2)\,(2J_1-1)\,(2J_1)\,(2J_1+1)\,(2J_1+2)\,(2J_2-3)\,(2J_2-2)\,(2J_2-1)(2J_2)\,(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

$l_1 = J_1 - 2$

$l_2 = J_2 + 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{(L+4-J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2)(L+J_1-J_2)\times}{\times(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)(L+J_1-J_2-3)}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)((2J_2+5)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)\times}{\times(2J_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 + 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2-1}\left[\frac{4(L+1+J_1+J_2)(L+3-J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2)\times}{\times(L+J_1-J_2)(L+J_1-J_2-1)(L+J_1-J_2-2)(-L+J_1+J_2)}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_2+4)(2J_2+3)(2J_2+2)\times}{\times(2J_2+1)(2J_2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{6(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+2-J_1+J_2)(L+1-J_1+J_2)(L+J_1-J_2)\times}{\times(L+J_1-J_2-1)(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)\cdot(2J_2+3)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)\times}{\times(2J_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 1$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{4(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(L+J_1+J_2-1)(L+1-J_1+J_2)(L+J_1-J_2)\times}{\times(-L+J_1+J_2)(-L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2-2)}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_2+2)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$l_2 = J_2 - 2$	$(-1)^{L-J_1-J_2}\left[\frac{(L+1+J_1+J_2)(L+J_1+J_2)(J+J_1+J_2-1)(L+J_1+J_2-2)(-L+J_1+J_2)\times}{\times(-L+J_1+J_2-1)(-L+J_1+J_2-2)(-L+J_1+J_2-3)}{(2J_1-3)(2J_1-2)(2J_1-1)(2J_1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2)(2J_2-1)(2J_2-2)(2J_2-3)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Таблица 58

Здесь приняты обычные обозначения, например $*\frac{8}{15}$ надо понимать как $-\sqrt{\frac{8}{15}}$



Литература к I части

1. Балдин А. М., Гольданский В. И., Розенталь И. Л. Кинематика ядерных реакций. М., Физматгиз, 1959.
2. Hagedorn R. Relativistic Kinematics. Benjamin N. A. Inc., N. V.— Amsterdam, 1963.
3. Michalowcz A. Cinématique des réactions nucléaires, Dunod Paris, 1964.
4. Sternheimer R. M. Kinematics, Appendix 2 in Methods of Experimental Physics, vol. 5, part B (Nuclear Physics), edited by Yuan L. C. L. and Wu C. S. Academic press, N.Y.— London, 1963.
5. Williams W. S. C. Relativistic Kinematics. Sect. IX in High Energy and Nuclear Physics Data Handbook, editors W. Galbraith and W. S. C. Williams, National Institute for Research in Nuclear Science, Rutterford High Energy Laboratory, Chilton, 1963.
6. Coghen T. Relativistic Kinematics of New Models of Multiple Meson Production and Some Related Topics, Report № 552/VI. Institute of Nuclear Research, Warsaw, 1964.
7. Werbrouck A. Relativistic Kinematics, Ecole Internationale de la Physique Particules Elementaires (Herceg Novi, Yougoslabie), Strasbourg — Belgrade, 1965.
8. Czyzewski O. Kinematics of Resonances, Ecole Internationale de la Physique Particules Elementaires (Herceg Novi, Yougoslavie), Strasbourg — Belgrade, 1965.
9. Dedrick K. G. Rev. Mod. Phys., **34**, 429 (1962).
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
11. Бубелев Э. Г. «Изв. АН СССР», **28**, 1835 (1964); Acta Phys. Polonica, **26**, 279 (1964); В кн. «XII Международная конференция по физике высоких энергий. Дубна, 5—15 августа, 1964 г.». Т. 1. М., Атомиздат, 1966, стр. 561.
12. Moller C. The Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford, 1955.
13. Koch N. Proceedings of the 1964 Easter School for Physicists, vol. II, CERN 64—13, Geneva, 1964.
14. Marscak R. E. Meson Physics, Mc Graw-Hill Book Company Inc., N.Y., 1952.

15. Heisenberg N. Z. Phys., **133**, 65 (1952).
16. Bradt H., Kaplon M., Peters B. Helv. phys. acta., **23**, 26 (1950).
17. Максименко В. М. Препринт А-14. Физ. ин-т АН СССР, 1965.
18. Подгорецкий М. И., Розенталь И. Л., Чернавский С. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **29**, 309 (1955).
19. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
20. Копылов Г. И. Препринт ОИЯИ Р-166, Дубна, 1958.
21. Sternheimer R. M. Phys. Rev., **98**, 205 (1955).
22. Salzman F., Salzman G. Phys. Rev., **125**, 1703 (1962).
23. Копылов Г. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 430 (1957); в сб «Вопросы физики элементарных частиц». Труды пятой сессии школы экспериментальной и теоретической физики в Ереване. Изд-во АН АрмССР, 1966, стр. 325.
24. Тяпкин А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 1150 (1956).
25. Sternheimer R. M. Phys. Rev., **99**, 277 (1955).
26. Rosenfeld A. H. Phys. Rev., **96**, 139 (1954).
27. Прокошкин Ю. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 732 (1956).
28. Cocconi G., Silverman A. Phys. Rev., **88**, 1230 (1952).
29. Васильков Р. Г., Говорков Б. Б., Гольданский В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 11 (1959).
30. Kaplon M. F., Yamanouchi. T. Nuovo cimento, **15**, 519 (1960).
31. Merlo Y. P. Cinematique de la desintegration $\pi^0 \to 2\gamma$ dans les reacto ins a plusieurs corps. Commissariat a l'Energie Atomique. Centre d'Etudes Nucléaires de Sailay, 1962.
32. Скобельцын Д. В. В сб. «Памяти С. И. Вавилова». М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 292.
33. Fermi E. Progr. Theoret. Phys., 5, 570 (1950).
34. Ландау Л. Д. «Изв. АН СССР. Серия физ.», **17**, 51 (1953).
35. Мур В. Д., Розенталь И. Л. В сб. «Физика элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966, стр. 3.
36. Srivastava P. P., Sudarshan G. Phys. Rev., **110**, 781 (1958).
37. Максименко В. М., Розенталь И. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 754 (1960).
38. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
39. Lewis H. W. Rev. Mod. Phys., **24**, 241 (1952).
40. Lewis H. W., Oppenheimer I. R., Wonthuysen. Phys. Rev., **73**, 127 (1948).
41. Максименко В. М., Розенталь И. Л. ««Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 658 (1957).
42. Копылов Г. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 1426 (1958); **39**, 1091 (1960).
43. Cerulus F., Hagedorn R. Nuovo cimento, **9**, Suppl. 2, 646, 659 (1958).
44. Беленький С. З., Максименко В. М., Никишов А. И., Розенталь И. Л. «Усп. физ. наук», **62**, 1 (1957).

45. Подгорецкий С. И., Розенталь И. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **27**, 129 (1954).
46. Розенталь И. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **28**, 118 (1955).
47. Максименко В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 232 (1957).
48. Колкунов В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1448 (1962).
49. Lurcat F., Mazur P. Nuovo cimento, **31**, 140 (1964).
50. Skieggestad O. Notes on Phase Space, Proceedings of the 1964 Easter School for Physicists», II, CERN 64—13, Geneva, 1964.
51. Копылов Г. И. Препринт ОИЯИ Р-1079, Дубна, 1962.
52. Maglic B. C. et al. Phys. Rev. Lett., **7**, 178 (1961); Stevenson M. L. et el. Phys. Rev., **125**, 687 (1962).
53. Ross R. R. et al. В кн.: «XII Международная конференция по физике высоких энергий. Дубна, 5—15 августа 1964 г.». М., Атомиздат, 1966, стр. 642.
54. Dalitz R. Phill. Mag., **44**, 1068 (1953).
55. Fabri E. Nuovo cimento, **11**, ser. 9, 479 (1954).
56. Zemach C. Phys. Rev., **133**, B 1201 (1964).
57. Sternheimer R. Phys. Rev., **93**, 642 (1954).
58. Яковлев Л. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 142 (1956).
59. Duller N. M., Walker W. D. Phys. Rev., **93**, 215 (1954).
60. Григоров Н. Л., Мурзин В. С., Рапопорт И. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 506 (1958).
61. Glasser R. G., Shein M. Phys. Rev., **90**, 218 (1953).
62. Dilworth C. C. et al. Nuovo cimento, **10**, 1261 (1953).
63. Castagnoli C. et al. Nuovo cimento, **10**, 1539 (1953).
64. Мурзин В. С. «Изв. АН СССР. Серия физ.», **29**, 1644 (1965).
65. Galtieri A. et al. Nuovo cimento, **20**, 487 (1961).
66. Никишов А. И., Розенталь И. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 165 (1958).
67. Никишов А. И., Розенталь И. Л., Славатинский С. А. В. кн. «Труды Московской конференции по космическим лучам». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1960.
68. Ciok P. et al. Nuovo cimento, **8**, 166 (1958).
69. Ciok P. et al. Nuovo cimento, **10**, 741 (1960).
70. Gierula I., Miesowicz M., Zielinski P. Nuovo cimento, **18**, 102 (1960).
71. Cocconi G. Phys. Rev., **111**, 1699 (1958).
72. Niu K. Nuovo cimento, **10**, 994 (1958).
73. Gierula I. Conference on Ultra High Energy Nuclear Physics, Bristol, 1963.
74. Фейнберг Е. Л., Чернавский Д. С. «Успехи физ. наук», **82**, 3 (1964).
75. Доробтин П. А., Славатинский С. А. «Изв. АН СССР. Серия физ.», **30**, 1566 (1966).
76. «Труды Всесоюзной конференции по физике космических лучей, Алма-Ата, 1966». «Изв. АН СССР. Серия физ.», **31**, № 9 (1967).
77. Биргер Н. Г., Смородин Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1159 (1959).

78. Биргер Н. Г., Смородин Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1355 (1959).
79. Koba Z., Krzywicki A. Nuovo cimento, **21**, 1077 (1961).
80. Kaplon M. F., Shen M. L. Nuovo cimento, **37**, 423 (1965).
81. Fujioka G. et al. Nuovo cimento 1, Suppl., 1143 (1963).
82. Акимов В. Н., Дремин И. М. Препринт ФИАН, 1966.
83. Дремин И. М. и др. «Письма ЖЭТФ», **4**, 152 (1966).

Литература ко II части

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., Гостехиздат, 1949.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
3. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
4. Фок В. А. Начала квантовой механики. КУБУЧ, 1932.
5. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Широков Ю. М. Лекции по основам релятивистской квантовой теории. Н. Г. У., 1964.
7. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., Физматгиз, 1960.
8. Werle J. Relativistic Theory of Reactions. Warsaw, 1966.
9. Wigner E. Gottingen Nachricten, **31**, 546 (1932).
10. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Гостехиздат, 1948.
12. Wigner E. Gruppen theorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, 1931.
13. Racah G. Phys. Rev., **61**, 186 (1942); **62**, 438 (1942); **63**, 367 (1943).
14. Левинсон И. Б. «Тр. Физ.-техн. института АН ЛитССР»,**2**, 17, (1957); «Тр. АН ЛитССР. Серия Б», 4 (1957).
15. Wolfenstein L., Ashkin J. Phys. Rev., **85**, 947 (1952).
16. Биленький С. М. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 959 (1958).
17. Чжоу Гуан Чжао, Широков М. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1230 (1958).
18. Simon A. Phys. Rev., **92**, 1050 (1953).
19. Blatt J. Biedenharn L. Rev. Mod. Phys., **24**, 258 (1952).
20. Ахиезер А., Берестецкий В. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959.
21. Coester F. Phys. Rev., **89**, 619 (1953); Huby R. Proc. Phys. Soc., A. **67**, 1103 (1954).
22. Тер-Мартиросян К. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **21**, 894 (1950).
23. Балдин А. М., Широков М. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, 784 (1956); Широков М. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 1022 (1957).
24. Широков М. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1524 (1959).

25. Simon A. Phys. Rev., **92**, 1050 (1953); Phys. Rev., **93**, 1435 (1954).
26. Morita M., Sugie A., Yoshido S. Prog. Theor. Phys., **12**, 713 (1954).
27. Biedenharn L. C., Rose M. E. Rev. Mod., **25**, 735 (1953).
28. Yang C. N. Phys. Rev., **74**, 764 (1948).
29. Simon A., Welton T. Phys. Rev., **90**, 1037 (1952).
31. Peshkin M., Siegert A. I. E. Phys. Rev., **87**, 735 (1952).
32. Биленький С. М., Лапидус Л. И. и Рындин Р. М. «Успехи физ. наук», **84**, 243 (1964).
33. Чжоу Гуан Чжао. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 909 (1959).
34. Широков Ю. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 1208 (1957); Чешков А. А., Широков Ю. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.» **42**, 144 (1962).
35. Yacob M., Wick G. C. Ann. of Phys., **7**, 404 (1959).
36. Широков М. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 633 (1960).
37. Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 1264 (1957).
38. Широков Ю. М. «Докл. АН СССР», **99**, 737 (1954); «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 1005 (1958).
39. Ритус В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 352 (1961).
40. Goldberger M. L. et al. Phys. Rev., **120**, 2250 (1960).
41. Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н., Соловьев Л. Д. Nucl. Phys., **4**, 427 (1957); Chew G. F. et al. Phys. Rev., **106**, 1345 (1957).
42. Rollnik H. Proc. of the 1965 CERN Easter School. Geneva, 1965.
43. Ueda Y., Okubo S. Nucl. Phys., **49**, 345 (1963).
44. Berman S. M., Jacob M., SLAC-PUB, 73 (1965).
45. Sharp W. T. et al. Chalk River Report CRT 556 (1953); Chalk River Report CRT-569 (1954).
46. Obi S. et al. Ann. Tokyo Astr. Observ. Second Series **III**, 3, (1953); **IV**, 2 (1955); **IV**, 1 (1954).
47. Byers N., Fenster S. Phys. Rev. Letters, **11**, 52 (1963).
48. Широков М. И. «Успехи физ. наук». **78**, 471 (1962).
49. Scachs R. Phys. Rev., **121**, 350 (1961).
50. Окунь Л. Б. «Успехи физ. наук», **89**, 603 (1966).
51. Charpak G. Gourdin M., CERN 67—18 (1967).
52. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионная теория сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
53. Rose M. E. Elementary Theory of Angular Momentum John Wiley and Sons I пс. 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию. 3
Из предисловия к первому изданию 4

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение 6

Глава 1. Основы релятивистской кинематики

§ 1. Системы координат 11
§ 2. Основные характеристики релятивистского движения. Четырехмерные векторы 13
§ 3. Преобразования Лоренца I (Преобразования энергии и импульса) 18
§ 4. Преобразования Лоренца II (Релятивистский закон сложения скоростей. Преобразование лоренц-факторов) 23
§ 5. Преобразования Лоренца III (Графическое представление и преобразование углов) 26
§ 6. Последовательные преобразования Лоренца 33
§ 7. Релятивистские инварианты 36
§ 8. Определение характеристик *Ц*-системы по измерениям в *Л*-системе 38
§ 9. Кинематические характеристики одной частицы в системе покоя другой частицы 40
§ 10. Законы сохранения энергии и импульса. Энергетические пороги реакций 43

Глава 2. Преобразование дифференциальных сечений (распределений)

§ 11. Эффективные сечения взаимодействия и распределения физических величин 46
§ 12. Якобианы 49
§ 13. Несколько частных случаев преобразования распределений 55

Глава 3. Кинематика взаимодействий с образованием двух частиц

§ 14. Инвариантные переменные 68
§ 15. Связь между энергией и углом вылета продукта реакции . . . 72
§ 16. Графический метод определения кинематических характеристик 77
§ 17. Угол разлета продуктов реакции 80
§ 18. Передаваемый 4-импульс и передаваемая кинетическая энергия 88
§ 19. Дифференциальные сечения 91
§ 20. Связь между спектром нестабильных частиц и спектрами продуктов их распада 93
§ 21. Определение массы частицы в двухчастичных реакциях 105

Глава 4. Множественные процессы

§ 22. Инвариантный и неинвариантный фазовые объемы 108
§ 23. Основные выводы статистической теории 111
§ 24. Распределение по эффективной массе 117
§ 25. Реакции с тремя частицами в конечном состоянии. Диаграмма 453

Далица 129
§ 26. Предельные соотношения 142
§ 27. Угловые распределения вторичных частиц в струях высокой энергии 148
§ 28. Кинематический метод определения энергии быстрых частиц . . 157
§ 29. Кинематика файрбольной модели множественного образования частиц 163
§ 30. Масса мишени 176
§ 31. Квадрат передаваемого 4-импульса в струях высокой энергии 178

Часть II

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Глава 5. Матрица рассеяния и ее свойства

§ 32. *S*-матрица 182
§ 33. Унитарность *S*-матрицы 185
§ 34. Интегралы движения 187
§ 35. Обращение времени 193
§ 36. Функции преобразования 197
§ 37. Связь *S*-матрицы с эффективным сечением 200

Глава 6. Применения общей теории *S*-матрицы

§ 38. Связь сечений упругих и неупругих процессов 207
§ 39. Связь сечений прямых и обратных реакций 213

Глава 7. Столкновения частиц, обладающих спином

§ 40. Постановка вопроса. Примеры. Параметризация *S*-матрицы . 216
§ 41. Коэффициенты векторного сложения 221
§ 42. Некоторые примеры 224
§ 43. Суммы произведений коэффициентов векторного сложения . . 227
§ 44. Угловые распределения в ядерных реакциях (случай, когда частицы имеют массу покоя, отличную от нуля) 237

Глава 8. Поляризация частиц в ядерных реакциях

§ 45. Общая формула 242
§ 46. Основные закономерности возникновения поляризованных частиц в ядерных реакциях 246

Глава 9. Реакции с участием фотонов

§ 47. Общие формулы 248
§ 48. Связь процессов фоторождения, рассеяния π-мезонов и комптон-эффекта на нуклоне 254

Глава 10. Реакции с участием поляризованных и ориентированных частиц

§ 49. Преобразования конечных вращений 257
§ 50. Матрица плотности 264
§ 51. Реакции с участием частиц спина 1/2 270
§ 52. Реакции с участием ориентированных частиц, имеющих произвольное значение спина 281
§ 53. Представление спиральностей. Релятивистская кинематика . . 285
§ 54. Связь различных параметризаций *S*-матрицы. Часто встречающиеся на практике примеры ядерных реакций. Распады 299
§ 55. Реакции образования и распады нестабильных частиц. Зарядовое сопряжение. *G*-четность. 310

Приложение I

Зависимость величин β, γ—1 и p от $p\beta$ кинетической энергии для различных частиц 329

Приложение II

Переход от полярных углов ϑ в Л-системе к полярным углам ϑ* в Ц-системе при различных значениях γ_c и β_c 345

Приложение III

Энергетические пороги реакций 353

Приложение IV

Простейшие примеры взаимодействия элементарных частиц при высоких энергиях. 361
Приложение V 370

А. М. Балдин, В. И. Гольданский, В. М. Максименко,
И. Л. Розенталь
КИНЕМАТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Редактор А. И. Мельникова
Художественный редактор А. С. Александров.
Технический редактор В. И. Володина. Корректор Г. Л. Кокосова.
Сдано в набор 22/I 1968 г. Подписано в печать 25/X 1968 г. Т-15731
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 28,25
Уч. изд. л. 25,57 Тираж 3700 экз. Заказ изд. 1395 Цена 2 р. 14 к.
Зак. тип. 1924
Атомиздат, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46