

МЕТОД ОГИБАЮЩИХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В УСКОРИТЕЛЯХ¹

А. М. Балдин, [В. В. Михайлов], М. С. Рабинович

Приводится вывод уравнения свободных колебаний в ускорителях для произвольного магнитного поля, обладающего плоскостью симметрии. Для решения основных задач теории свободных колебаний, возникающих при расчете ускорителей, разработан метод огибающих, состоящий в том, что вместо изучения отдельных орбит рассматривается огибающая траектории частиц за большее число оборотов. Применение этого метода иллюстрируется на примере ускорителей с разрезным магнитом и сильнофокусирующих ускорителей.

1. Введение

Свободными колебаниями в циклических ускорителях называют смещение частицы около некоторого среднего положения. Это среднее положение частицы обычно принято называть мгновенной орбитой. Термин «свободные» означает, что эти колебания не связаны непосредственно с процессом ускорения. Можно поэтому рассматривать свободные колебания в постоянном магнитном поле и при постоянной энергии частицы.

Независимость свободных колебаний от процесса ускорения была доказана в первых же работах по теории современных циклических ускорителей. Было показано, что при росте напряженности магнитного поля H (без изменения конфигурации) амплитуда колебаний затухает пропорционально $H^{-1/2}$.

Разделение движения частицы на движение по мгновенной орбите и на свободные колебания возможно однозначно при отсутствии так называемых резонансов. При резонансах частота свободных колебаний находится в целочисленном соотношении с частотой обращения, поэтому орбита частицы всегда замкнута. В этом случае при большом числе оборотов траектория частицы не занимает некоторой площади, которая в дальнейшем будет предметом исследования, а занимает только линию. Практически из-за наличия всякого рода возмущений в магнитном поле процесс ускорения при резонансе не может происходить, так как амплитуды свободных колебаний сильно возрастают. В дальнейшем резонансный случай мы исключим из нашего рассмотрения.

Свободные колебания возникают в процессе инжекции частиц, а также при рассеянии частиц на остаточном газе в камере ускорителя. Одной из труднейших задач при сооружении современных кольцевых ускорителей (синхротрона, синхрофазотрона) является задача обеспечения эффективной инжекции частиц, т. е. впуск частиц в камеру без соударения с инжектором (инфлекторными пластинами) и стенками вакуумной камеры.

По сути дела успешность инжекции определяет интенсивность ускоренного пучка, так как потери частиц в процессе ускорения обычно малы. Геометрические размеры зазора магнита ускорителя определяют все остальные геометрические размеры и стоимость ускорителя. Выбор указанных размеров определяется в значительной степени необходимостью обеспечить условия для эффективной инжекции.

В последние годы разработан ряд проектов ускорителей с сильной фокусировкой. Представляет интерес оценка эффективности тех или других

¹ Настоящая статья написана на основании ряда работ [1-5], выполненных в 1950-1953 гг.

вариантов сильнофокусирующих ускорителей. Одним из критериев сравнения можно считать характер свободных колебаний; как известно, другим критерием являются допуски на точность изготовления магнита и на конфигурацию магнитного поля.

Разработанная нами теория огибающих позволяет с единой точки зрения подойти к описанию влияния свободных колебаний на процесс инжекции и ускорения в циклических ускорителях любого типа.

2. Уравнение свободных колебаний

Мы рассмотрим свободные колебания в произвольном магнитном поле H , обладающем плоскостью симметрии.

Движение частицы в магнитном поле описывается релятивистским уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{e}{c} [vH]. \quad (1)$$

Если H не зависит от времени (что можно всегда считать при рассмотрен свободных колебаний), то $|v| = \text{const}$. В дальнейшем мы будем писать скорость в виде $v = v\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичный вектор. Заменяя дифференцирование по времени t дифференцированием по длине σ , отсчитываемой вдоль траектории, получим

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = \frac{e}{c} [nH]. \quad (2)$$

В дальнейшем предположим, что силовые линии пересекают некоторую плоскость под постоянным углом. Если нижний и верхний полюсы магнита являются зеркальным отображением друг друга, то такой плоскостью является средняя магнитная плоскость. Из всех возможных орбит мы выделим замкнутую (в остальном весьма произвольную) орбиту, лежащую в указанной плоскости, и будем называть ее равновесной. Возможна, конечно, и более общая постановка задачи о произвольной пространственной равновесной орбите, но для целей ускорительной техники указанное упрощение вполне достаточно. В этом случае уравнение (2) совсем упрощается:

$$RH = \text{const}, \quad (3)$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке, а H — магнитное поле в этой точке. Радиус кривизны и магнитное поле в каждой точке равновесной орбиты мы будем обозначать нулевым индексом.

Для рассмотрения отклонений частицы от равновесной орбиты введены криволинейные и, вообще говоря, неортогональные координаты: σ — длина отсчитывается вдоль равновесной траектории, ρ — расстояние по нормали к этой траектории. Радиус кривизны в этих координатах записывается следующим образом:

$$\frac{1}{R} = \left[-\rho'' \left(1 + \frac{\rho}{R_0} \right) + 2\rho'^2 \frac{1}{R_0} - \rho' R_0' \frac{\rho}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{\rho}{R_0} \right)^2 \right] \left[\left(1 + \frac{\rho}{R_0} \right)^2 + \rho'^2 \right]^{-3/2}, \quad (4)$$

где штрихи означают дифференцирование по σ .

Поскольку отклонения частиц от равновесной орбиты малы, мы можем уравнение (4), а также зависимость напряженности магнитного поля $H(\sigma, \rho)$ от ρ записать в линейном приближении

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - \rho'' - \frac{\rho}{R_0}; \quad H(\sigma, \rho) = H(\sigma, 0) + \frac{\partial H}{\partial \rho} \rho. \quad (5)$$

После подстановки (5) уравнение (3) примет вид

$$\frac{1}{R_0} - \rho'' - \frac{\rho}{R_0} = \text{const} \left[H(\sigma, 0) + \frac{\partial H}{\partial \rho} \rho \right].$$

Согласно определению для равновесной орбиты справедливо равенство $1/R_0(\sigma) = \text{const } H(\sigma, 0)$, поэтому окончательно уравнение свободных колебаний примет следующий простой вид:

$$\rho'' + q(\sigma)\rho = 0, \quad q(\sigma) = R_0^{-2}(\sigma)[1 - n(\sigma)], \quad (6)$$

$n(\sigma)$ — показатель магнитного поля

$$n(\sigma) = -(R_0(\sigma)/H(\sigma, 0))(\partial H(\sigma, \rho)/\partial \rho)_{\rho=0}. \quad (7)$$

3. Решение уравнения свободных колебаний

Функция $q(\sigma)$ является периодической функцией от σ . В слабофокусирующих ускорителях период функции равен периметру Π орбиты $q(\sigma + \Pi) = q(\sigma)$. В сильнофокусирующих ускорителях, а также в ускорителях с разрезным магнитом, период функции $q(\sigma)$ равен $\Pi/N = L$, где N — число элементов периодичности системы. К уравнению (6) можно применить общую теорию уравнений с периодическими коэффициентами.

Решение уравнения (6) внутри области устойчивости запишем в следующем виде:

$$\rho(\sigma) = \text{Re } D e^{i\mu\sigma/L} \varphi(\sigma), \quad (8)$$

где $\varphi(\sigma)$ — периодическая функция от σ с периодом L .

Коэффициент μ — характеристический показатель, $\varphi(\sigma)$ — комплексная функция Флоке могут быть найдены для каждого конкретного случая аналитическим методом или численным интегрированием по одному из участков² длиной L . Мы примем далее, что вронскиан комплексных решений уравнения (6):

$$\Psi = e^{i\mu\sigma/L} \varphi(\sigma) \text{ и } \Psi^* = e^{-i\mu\sigma/L} \varphi^*(\sigma) \text{ равен } -2i.$$

Решение уравнения (8) можно также записать в другом более удобном виде:

$$\rho(\sigma) = F(\sigma) \cos[\mu\sigma/L + \alpha(\sigma)], \quad (9)$$

$$F(\sigma) = |D\varphi(\sigma)|; \quad \alpha(\sigma) = \arg(D\varphi(\sigma)). \quad (10)$$

Очевидно, что $F(\sigma)$ и $\alpha(\sigma)$ — периодические функции с периодом L .

Таким образом свободные колебания можно всегда представить как синусоидальные с переменной амплитудой $F(\sigma)$, фазой $\alpha(\sigma)$ и частотой μ/L . Однако такое толкование ничего нового не дает, так как в большинстве случаев частота изменений $F(\sigma)$ и $\alpha(\sigma)$ больше или того же порядка, что μ/L . Поэтому не имеет смысла говорить о свободных колебаниях как о модулированных гармонических, как делали некоторые авторы [6].

В теории ускорителей при исследовании свободных колебаний рассматривают две задачи: а) о соударении частиц с инжекторными пластинами и б) о соударении частиц со стенками вакуумной камеры.

Рассмотрим частицу, выпущенную из инжектора под углом γ к мгновенной орбите и на расстояние ρ_0 от нее. Если на азимуте инжектора σ_i отклонение ρ на последующих оборотах будет больше $\rho_0 - \Delta$, то частица соударится с пластинами инжектора. Здесь Δ — расстояние от места вылета частицы до передней пластины инжектора (рис. 1).

Для решения сформулированных задач нам полезно знать отклонения частицы только на вполне определенном азимуте σ , в частности на азимуте инжектора. Очевидно, что координаты σ и $\sigma + \Pi k$ соответствуют одному и тому же азимуту (Π — периметр орбиты, k — целое число). В этом случае (9) можно переписать

$$\rho(\sigma) = F(\sigma) \cos(\mu N k + \alpha(\sigma)). \quad (11)$$

² Например, если положить $\Psi(0) = 1 + i \cdot 0$, то $\cos \mu = \text{Re } \Psi(L)$.

Здесь σ — постоянное число, а k можно рассматривать как число оборотов, совершенных частицей, $\rho(\sigma)$ — положение частицы на азимуте σ после k -го оборота. Если бы k было непрерывной переменной, то мы могли сказать, что колебания частиц на данном азимуте всегда являются гармоническими с постоянной амплитудой. При переходе от одного азимута к другому меняется лишь амплитуда и фаза колебаний. Здесь напрашивается аналогия

состоящей волной, хотя в нашем случае меняется в пространстве не только амплитуда, но также и фаза колебаний.

На самом деле k может принимать лишь целые значения. Если бы, например, N_m равнялось $2\pi/lg$, где l, g — простые целые числа, то отклонение ρ принимало бы на каждом азимуте g значений. Практически g должно быть достаточно велико, чтобы не возникли опасные резонансы, поэтому мы можем считать, что на любом азимуте ρ принимает практически любое значение от $-F(\sigma)$ до $+F(\sigma)$.

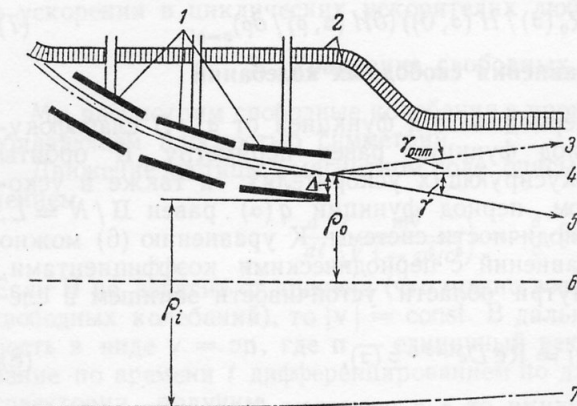


Рис. 1. Схема выпуска частиц в ускоритель. 1 — инжекторные пластинки, 2 — стенки камеры, 3 — оптимальное направление, 4 — направление касательной к мгновенной орбите, 5 — направление частицы, 6 — мгновенная равновесная орбита, 7 — средняя орбита в камере

Выше мы считали $F(\sigma)$ амплитудой квазигармонических колебаний на азимуте σ . Можно также кривую $\rho = \pm F(\sigma)$ рассматривать как огибающую траектории частицы. Действительно, если $\rho(\sigma) = F(\sigma)$, то согласно (9) $d\rho/d\sigma = dF/d\sigma$, т. е. касательные к траектории частицы (9) и к кривой $\rho = F(\sigma)$ совпадают на азимутах, где ρ максимально. В дальнейшем кривые $\rho = \pm F(\sigma)$ будем называть огибающими.

Траектория частиц заключена между кривыми $\rho = \pm F(\sigma)$ и в практически интересных случаях за большое число оборотов занимает всю область между огибающими. Найти огибающую значительно проще, чем вычислять траекторию частиц. В то же время все основные вопросы теории ускорителей, связанные со свободными колебаниями, могут быть решены, если известна только огибающая.

4. Огибающая

Найдем выражение для квадрата модуля функции $F(\sigma)$ в зависимости от начальных условий:

$$\sigma = \sigma_i; \quad \rho(\sigma_i) = \rho_0; \quad (d\rho/d\sigma)_{\sigma_i} = \gamma; \quad k = 0,$$

где σ_i — азимут инжектора, ρ_0 — начальное отклонение частицы от орбиты, γ — угол между направлением вылета частицы и касательной к мгновенной орбите (см. рис. 1). Подставляя начальные условия в (8), найдем константу D

$$D^* = i[\gamma\Psi'(\sigma_i) - \rho_0\Psi''(\sigma_i)]. \quad (12)$$

Здесь штрих означает производную по σ , а звездочка комплексно-сопряженную величину:

$$F^2(\sigma) = DD^*\varphi(\sigma)\varphi^*(\sigma) = DD^*\Phi(\sigma), \quad (13)$$

где $\Phi(\sigma)$ — квадрат модуля функции Флоке.

Подставляя (12) в (13) и производя упрощения, получим

$$F^2(\sigma) = \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(\sigma_i)} \left[\rho_0^2 + \Phi^2(\sigma_i) \left(\gamma - \frac{\rho_0 \Phi'(\sigma_i)}{2\Phi(\sigma_i)} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

В обычном ускорителе со слабой фокусировкой $\Phi(\sigma)$ равняется постоянной величине $R_0 / \sqrt{1-n}$, где R_0 — радиус круговой орбиты, а n — показатель магнитного поля. В этом случае

$$F^2(\sigma) = \rho_0^2 + \frac{R_0^2 \gamma^2}{1-n}. \quad (15)$$

Если нас интересует соударение с пластинами инжектора, то существенно знать, насколько $F(\sigma)$ превышает ρ_0 при заданном угле отклонения γ ; чем меньше это превышение, тем менее вероятно соударение частиц с инжектором. Таким образом чем меньше $\Phi(\sigma_i)$, тем больше отклонения от оптимального угла (для (15) от $\gamma = 0$) допустимы; чем сильнее фокусировка, тем меньше $\Phi(\sigma)$.

Функция $\Phi(\sigma)$ имеет размерность длины, поэтому максимум $\Phi(\sigma)$ можно назвать эффективным радиусом ускорителя

$$\max \Phi(\sigma) = R_{эфф}. \quad (16)$$

Как известно, размеры зазора определяют вес магнита, что для ускорителей на сверхбольшую энергию имеет существенное значение. При сравнении ускорителей разного типа отношение линейных размеров зазора магнита к $R_{эфф}$ является параметром, характеризующим максимальное значение фокусирующих сил и требуемую точность впуска частиц в камеру ускорителя, в то же время отношение этих величин к радиусу кривизны R не имеет физического смысла.

Минимальное значение амплитуды колебаний на азимуте инжектора равно ρ_0 , когда частица выпущена под оптимальным углом

$$\gamma = \gamma_{опт} = (\rho_0 / 2) (d \ln \Phi(\sigma) / d\sigma)_{\sigma_i}. \quad (17)$$

Направление оптимального впуска частиц в камеру ускорителя совпадает с направлением касательной к огибающей. Существенно, что оптимальный угол впуска зависит от ρ_0 . При инжекции в синхрофазотроны обычно ρ_0 меняется от нуля до максимального значения, поэтому меняется и оптимальный угол. Если угловая ширина впускаемого пучка меньше $\gamma_{опт}$, то число частиц, захватываемых в режим ускорения, резко уменьшится. Правда, можно найти на орбите азимут, на котором $\Phi'(\sigma_i) = 0$, но не всегда удобно по конструктивным соображениям помещать в этом месте инжекторные пластины.

При решении задач о соударении со стенками камеры нам необходимо исследовать функцию $f(\sigma) = \Phi(\sigma) / \Phi(\sigma_i)$, характеризующую отношение амплитуд колебаний на произвольном азимуте (σ) и на азимуте инжектора. Как это практически делается, будет показано в разделах 5 и 6.

До сих пор мы рассматривали для определенности радиальные колебания частиц. Вертикальные колебания рассматриваются аналогично. Необходимо лишь учесть, что величина $q(\sigma)$ для них имеет другое значение

$$q(\sigma) = n(\sigma) R_0^{-2}(\sigma). \quad (18)$$

5. Ускоритель с разрезным магнитом

Синхрофазотроны со слабой фокусировкой обычно строятся с четырьмя прямолинейными промежутками. Например, в синхрофазотроне Академии наук СССР на 10 000 MeV имеется 4 восьмиметровых промежутка. Средний радиус четырех секторов равен 28 м. В первом приближении можно считать для уравнения (6)

$$q(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{— в прямолинейных промежутках длины } l, \\ \kappa^2 = (-n) / R_0^2 & \text{— в магнитных секторах длины } \nu. \end{cases}$$

Для нахождения огибающей достаточно знать решение на одном элементе периодичности длиной L

$$\Psi(\sigma) = \begin{cases} D(\sin \kappa \sigma + d \cos \kappa \sigma) & \text{— в секторах,} \\ D(e^{i\mu} \kappa \sigma + s + dc_i) & \text{— в прямолинейных промежутках.} \end{cases}$$

Здесь приняты следующие сокращения:

$$\begin{aligned} s &= \sin \kappa v; & c &= \cos \kappa v; & d &= (c - e^{i\mu})/s; \\ \cos \mu &= c - \kappa l s / 2. \end{aligned} \quad (19)$$

В соответствующих формулах отсчет длины σ проводится от начала сектора и от начала прямолинейного промежутка.

Как уже упоминалось, константу D нужно выбрать³ таким образом, чтобы вронскиан функций Ψ и Ψ^* равнялся $-2i$, поэтому потребуем, чтобы

$$DD^* = s / \kappa \sin \mu. \quad (20)$$

Отсюда легко найти выражение для огибающей

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} [s + \kappa l \cos \kappa \sigma \cdot \cos \kappa (v - \sigma)] / \kappa \sin \mu & \text{— для секторов,} \\ [s + \kappa l c + s \kappa^2 (\sigma - l) \sigma] / \kappa \sin \mu & \text{— для промежутков.} \end{cases} \quad (21)$$

Огибающая для данных синхрофазотрона Академии наук СССР изображена на рис. 2. Функция $\Phi(\sigma)$ максимальна в середине секторов и минимальна в середине прямолинейных промежутков. Из (21) легко найти оптимальный угол вылета

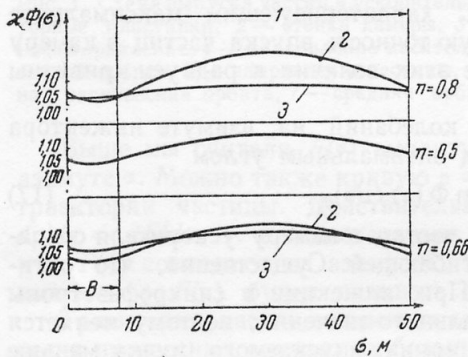


Рис. 2

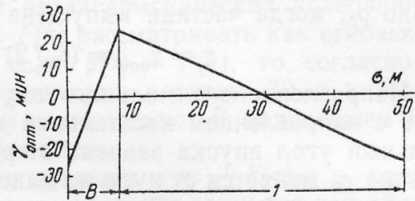


Рис. 3

Рис. 2. Модуль функции Флоке уравнения свободных (вертикальных и радиальных) колебаний для данных синхрофазотрона АН СССР. 1 — круговой сектор, 2 — вертикальные колебания, 3 — радиальные колебания, прямолинейный промежуток

Рис. 3. Оптимальный угол $\gamma_{\text{опт}}$ для данных синхрофазотрона АН СССР. $\rho_0 / R = 1/56$; $l / R = 2/7$; 1 — круговой сектор, B — прямолинейный промежуток

частиц из камеры ускорителя. Для параметров советского синхрофазотрона $\gamma_{\text{опт}}$ изображено на рис. 3.

При небольших длинах прямолинейных промежутков $\kappa \Phi(\sigma)$, конечно, не очень сильно отличается от 1, но это отличие уже сказывается при расчете интенсивности пучка [3] и рассеянии на остаточном газе. Гораздо большую роль огибающие играют при расчете сильнофокусирующих ускорителей.

6. Ускорители с сильной фокусировкой

В качестве примера рассмотрим обычный тип сильнофокусирующего ускорителя. Для упрощения формул рассмотрим ускоритель без прямолинейных промежутков. Конечно, развитая здесь общая теория может быть применена к любому типу ускорителей с постоянным или переменным магнитным полем.

³ Если $D = 1/d$, то $\Psi(0) = 1$ и $\text{Re } \Psi(L) = \cos \mu$ (см. примечание на стр. 995).

Пусть ускоритель состоит из $2N$ магнитов с одинаковым размером ν по дуге радиуса R_0 , причем в четных секторах показатель магнитного поля $n_1 < 0$, а в нечетных секторах $n_2 > 0$. На границе секторов n скачком изменяется от n_1 до n_2 . Если мы не рассчитываем конкретный ускоритель, а интересуемся особенностью движения, то это допущение не является существенным. Не представляет труда учесть прямолинейные промежутки, а также переходную область между n_1 и n_2 . В нашем случае

$$q(\sigma) = \begin{cases} \kappa_1^2 = (1 - n_1) / R_0^2 & \text{— для четных секторов,} \\ -\kappa_2^2 = (n_2 - 1) / R_0^2 & \text{— для нечетных секторов.} \end{cases}$$

Решая уравнение (1) шиванием, найдем комплексные решения на одном элементе периодичности длиной $L = 2\nu$:

$$\Psi(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\kappa_1(f-f^*)}} \begin{cases} \sin \kappa_1 \sigma + f \cos \kappa_1 \sigma & \text{— для четных секторов,} \\ \rho(c - fs) \operatorname{sh} \kappa_2(\sigma - \nu) + (s + fc) \operatorname{ch} \kappa_2(\sigma - \nu) & \text{— для нечетных секторов.} \end{cases}$$

счет длины ведется от начала фокусирующего сектора. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\rho = \kappa_1 / \kappa_2; \quad s_1 = \sin \kappa_1 \nu; \quad c_1 = \cos \kappa_1 \nu; \quad c_2 = \operatorname{ch} \kappa_2 \nu; \quad s_2 = \operatorname{sh} \kappa_2 \nu,$$

а функция f равна

$$f = f_1 - f_2 e^{i\mu}, \quad f_1 = (s_1 s_2 + \rho c_1 c_2) / (\rho s_1 c_2 - c_1 s_2); \quad f_2 = \rho / (\rho s_1 c_2 - c_1 s_2).$$

Легко убедиться, что $\Psi(\sigma)$ удовлетворяет всем сформулированным выше условиям и уравнению (1), если

$$\cos \mu = c_1 c_2 + (1 - \rho^2) s_1 s_2 / 2\rho.$$

Выражение для функции $\Phi(\sigma)$ найдем сначала в фокусирующем (четном) секторе

$$\Phi_1(\sigma) = \Phi(0) + [(1 + \rho^2) s_2 / 2\kappa_1 \rho \sin \mu] [\cos \kappa_1(\nu - 2\sigma) - c_1], \quad (22)$$

$$\Phi(0) = (s_1 c_2 + \rho c_1 s_2) / \kappa_1 \sin \mu. \quad (23)$$

Функция $\Phi_1(\sigma)$ максимальна в середине фокусирующего сектора

$$\Phi_1(\nu/2) = \Phi(0) + (1 - c_1)(1 + \rho^2) s_2 / 2\kappa_1 \rho \sin \mu. \quad (24)$$

Обратим внимание на симметрию функции $\Phi(\sigma)$ относительно точки $\sigma = \nu/2$. Рассмотрим $\Phi(\sigma)$ в дефокусирующем секторе

$$\Phi_2(\sigma) = \Phi(0) - [s_1(1 + \rho^2) / 2\kappa_1 \sin \mu] [c_2 - \operatorname{ch} \kappa_2(3\nu - 2\sigma)]. \quad (25)$$

Как видно из этой формулы, $\Phi_2(\sigma)$ минимальна в середине дефокусирующего сектора.

График безразмерной функции $\Phi(\sigma)/\nu$ в зависимости от $\kappa\sigma$ изображен на рис. 4, для случая, когда $n_1 + n_2 = 0$ и $\kappa\nu = 1,5$. При данных пара-

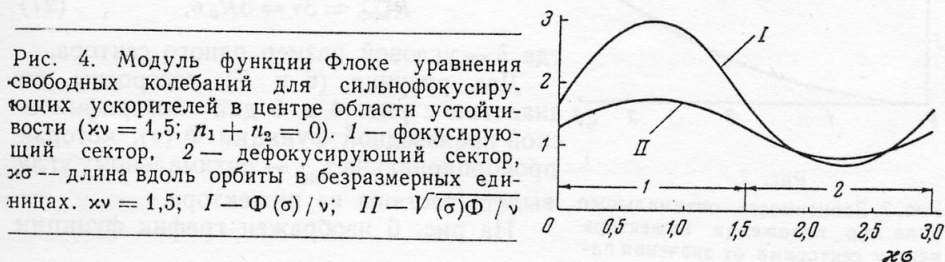


Рис. 4. Модуль функции Флоке уравнения свободных колебаний для сильнофокусирующих ускорителей в центре области устойчивости ($\kappa\nu = 1,5$; $n_1 + n_2 = 0$). 1 — фокусирующий сектор, 2 — дефокусирующий сектор, $\kappa\sigma$ — длина вдоль орбиты в безразмерных единицах. $\kappa\nu = 1,5$; I — $\Phi(\sigma)/\nu$; II — $\sqrt{(\sigma)\Phi}/\nu$

метрах устойчивость движения максимальна. По оси абсцисс рис. 4 отложена не длина σ , а безразмерная величина $\kappa\sigma$. Выбор такого масштаба позволяет использовать приведенные графики для разных величин κ .

Для того чтобы получить представление о функции $\Phi(\sigma)$ не только в центре области устойчивости, но и при других значениях $\kappa\nu$, на рис. 5

изображена зависимость функции $\Phi(\sigma)/\nu$ от величины $x^2\nu^2$ для трех азимутов: в середине фокусирующего сектора — функция $\Phi_1(\nu/2)/\nu$, в середине дефокусирующего сектора — функция $\Phi_2(3\nu/2)/\nu$ и на стыке двух секторов — функция $\Phi(0)/\nu$. Как видно на рис. 5, устойчивость в широких пределах измерения $x\nu$ остается практически постоянной. Как известно, жесткий допуск на величину $x\nu$ определяется не проблемой устойчивости в заданном магнитном поле,

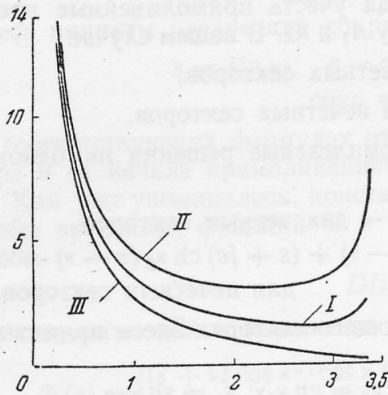


Рис. 5

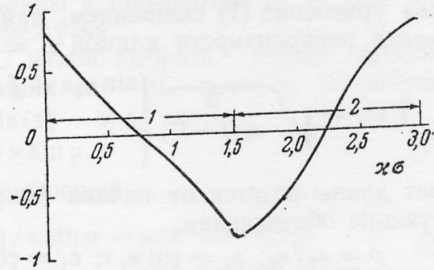


Рис. 6

Рис. 5. Значения модуля функции Флоке в центрах фокусирующих и дефокусирующих секторов $\Phi_1(\nu/2)$ и $\Phi_2(3\nu/2)$ и между секторами $\Phi(0)$ в зависимости от значения параметра сильно фокусирующего ускорителя $x^2\nu^2$ ($n_1 + n_2 = 0$). По оси ординат отложено: I — $\Phi(0)/\nu$; II — $\Phi_1(\nu/2)/\nu$; III — $\Phi_2(3\nu/2)/\nu$. По оси абсцисс $x^2\nu^2$

Рис. 6. Зависимость оптимального угла от азимута в сильнофокусирующих ускорителях в центре области устойчивости ($x\nu = 1,5$; $n_1 + n_2 = 0$). 1 — фокусирующий сектор, 2 — дефокусирующий сектор, $x\sigma$ — длина вдоль орбиты в безразмерных единицах. Сплошная кривая — $(R/x\nu) d \ln \Phi(\sigma) / d\sigma = (2R/x\nu\rho_0) \gamma_{\text{опт}}$

а наличием большого числа резонансов с искажениями магнитного поля. Выше мы ввели эффективный радиус. Очевидно, что для сильнофокусирующего ускорителя

$$R_{\text{эфф}} = \Phi_1(\nu/2).$$

Например, если $n_1 + n_2 = 0$, то

$$R_{\text{эфф}} = \nu 2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{x^2 \nu^2}{4} - \frac{x^4 \nu^4}{80} + \dots \right) / x^2 \nu^2 \sqrt{1 - x^4 \nu^4 / 12 + \dots} \quad (26)$$

Минимальное значение функции $\Phi_1(\nu/2)/\nu$ (в зависимости от $x\nu$) можно найти из рис. 5 или по формуле (26). Оно равно 3,026 (при $x\nu \approx 1,5$).

Таким образом оптимальное значение $R_{\text{эфф}}^{\text{опт}}$

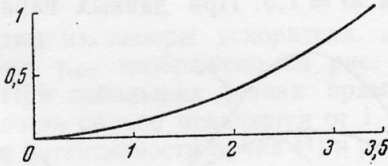


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость оптимального угла при положении инжектора между секторами от значения параметра ускорителя $x^2\nu^2$ ($n_1 + n_2 = 0$). По оси ординат отложено: $(2R/x\nu\rho_0) \gamma_{\text{опт}}$, по оси абсцисс $x^2\nu^2$

$$R_{\text{эфф}}^{\text{опт}} \approx 3\nu = 3R_0 \delta, \quad (27)$$

где δ — угловой размер одного сектора.

Два рисунка (6 и 7) построены по аналогии с рис. 4 и 5 для логарифмической производной функции $\Phi(\sigma)$, которая пропорциональна $\gamma_{\text{опт}}$ — оптимальному углу вылета частицы из инжектора.

На рис. 6 изображен график функции

$$(R/x\nu) d \ln \Phi(\sigma) / d\sigma = 2R \gamma_{\text{опт}} / x\nu\rho_0$$

при $x\nu = 1,5$ в зависимости от $x\sigma$. (Здесь ρ_0 — расстояние от инжектора до мгновенной орбиты.)

На рис. 7 та же функция изображена в зависимости от $\kappa^2 \gamma^2$ при фиксированном значении $\kappa \sigma$ (на стыке фокусирующих и дефокусирующих секторов, где $\gamma_{\text{опт}}$ принимает максимальное значение). В центре области устойчивости $\gamma_{\text{опт}} \approx 0,6 \rho_0 / R$. Изменение во времени (вместе с изменением ρ_0) оптимального угла приводит к дополнительным трудностям при длительной инжекции в сильнофокусирующих ускорителях.

Развитая выше общая теория и рассмотренные примеры показывают, что метод огибающих наиболее адекватен задачам, возникающим при расчете и проектировании разного типа ускорителей. При помощи этого метода можно легко сравнить фокусировку в различных типах ускорителей и решить задачи, связанные с обеспечением наиболее эффективной инжекции.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 июля 1946 г.

Литература

- [1] А. М. Балдин, В. В. Михайлов, М. С. Рабинович. Исследование движения частиц в синхрофазотроне с прямолинейными промежутками. Отчет, ФИАН, 1949 г.—[2] А. М. Балдин, В. В. Михайлов, М. С. Рабинович. К теории свободных колебаний, Отчет, ФИАН, 1950 г.—[3] М. С. Рабинович. Основы теории синхрофазотрона, Диссертация, ФИАН, 1952.—[4] А. М. Балдин, В. В. Михайлов. Почти периодическое движение заряженных частиц в произвольном постоянном во времени магнитном поле, Отчет, ФИАН, 1952.—[5] М. С. Рабинович. Теоретическое исследование ускорителя с переменным показателем поля, Отчет, ФИАН, 1953 г.—[6] D. M. Depnison, T. H. Berlin. Phys. Rev., 70, 764, 1946.